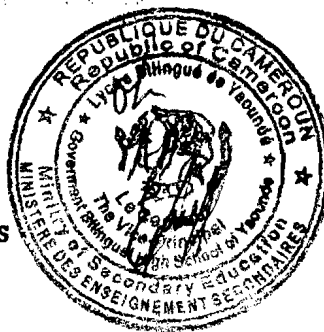




PARTIE A/ Evaluation de ressources : 15,5pts

EXERCICE 1 : Arithmétique 5,5pts

I) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 5. On considère les entiers $a = n^3 - n^2 - 12n$ et $b = 2n^2 - 7n - 4$ et $d = \text{pgcd}(a; b)$

- 1) a) Montrer que a et b sont tous deux multiples de $n - 4$. 0,5pt
- b) Exprimer $\text{pgcd}(a; b)$ en fonction de $n - 4$. 0,25pt
- 2) On pose $\alpha = 2n + 1$ et $\beta = n + 3$.
- a) Montrer que tout diviseur commun à α et β est un diviseur de 5. 0,25pt
- b) Montrer que $2n + 1$ et n sont premiers entre eux. 0,25pt
- 3) Déterminer suivant les valeurs de n et en fonction de $\text{pgcd}(a; b)$. 0,75pt

II) On considère l'équation $36x - 25y = 6$ (E)

- 1) Montrer que pour toute solution $(a; b)$ de cette équation, b est un multiple de 6. 0,5pt
- 2) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ cette équation. 0,75pt
- 3) Soit d le plus grand diviseur commun de a et b lorsque $(a; b)$ est solution de l'équation (E).
- a) Quelles sont les valeurs possibles de d ? 0,5pt
- b) Quelles sont les solutions pour lesquelles a et b ne sont pas premiers entre eux? 0,5pt

III) On pose $u = 2 + \sqrt{3}$ et $v = 2 - \sqrt{3}$.

- 1) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on peut écrire : $u^n = a_n + b_n\sqrt{3}$ et $v^n = a_n - b_n\sqrt{3}$ où a_n et b_n sont des entiers naturels. 0,5pt
- 2) Exprimer $a_{n+1} + b_{n+1}$ en fonction de a_n et b_n . 0,5pt
- ~~3) Etablir que : $a_n^2 - 3b_n^2 = 1$ et que $a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n = 1$.~~ 0,5pt
- 4) En déduire que les fractions $\frac{a_n}{b_n}$; $\frac{a_{n+1}}{a_n}$; $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ sont irréductibles. 0,5pt

EXERCICE 2 Etude d'une fonction irrationnelle 4pts

I) Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{|x^2 - 6x + 5|}$ et (C_f) sa représentation graphique.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f puis écrire f sans symbole valeur absolue. 0,5pt
- 2) Etudier la dérivabilité de f en 1 et 5 puis donner une interprétation graphique du résultat. 0,5pt
- 3) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation. 1pt
- 4) Démontrer que les droites d'équations $y = x - 3$ et $y = -x + 3$ sont asymptote à (C_f) . 0,5pt
- 5) Tracer et montrer qu'elle admet un axe de symétrie dont on précisera l'équation. 0,75pt
- 6) Démontrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1; 5]$, le point $M(x; y)$ est à une distance constant (C_f) et du point $A(3; 1)$. 0,5pt
- 7) En déduire la nature de (C_f) sur l'intervalle $[1; 5]$. 0,5pt

EXERCICE 3 : Inégalité des accroissements finis et application aux suites numériques : 2,5pts

Soit f la fonction définie sur $J = [0; 1]$ par : $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$

- 1) Résoudre dans J l'équation $f(x) = x$ 0,25pt
- 2) Montrer pour tout $x \in J$, $f(x) \in J$ et que pour tout $x \in J$, $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$ 0,25pt
- 3) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in [0; 1]$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$
- a) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in J$. 0,5pt
- b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n , $|u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |u_n - 1|$. 0,5pt
- c) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n , $|u_n - 1| \leq (\frac{1}{2\sqrt{2}})^n$. 0,5pt

EXERCICE 4 : Produit vectoriel, et espace vectoriel. 4pts

- I- L'espace (ϵ) est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et W est l'ensemble des vecteurs de (ϵ) . On considère les points $A(3; -2; 2)$, $B(6; 1; 5)$, $C(6; -2; -1)$. On considère l'endomorphisme φ de W qui, à tout vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, associe $\varphi(\vec{u}) = (2x + 2y)\vec{i} - (x + y)\vec{j} + z\vec{k}$
- 1) Donner une équation cartésienne du plan (ABC) . 0,5pt
 - 2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (S) des points M de l'espace tels que : $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$. 0,5pt
 - 3) Donner une représentation paramétrique de la droite (AC) . 0,5pt
 - 4) Déterminer la matrice de l'endomorphisme φ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. 0,5pt
 - 5) Déterminer le noyau du $\text{Ker}\varphi$ et l'image $\text{Im}\varphi$ de l'endomorphisme. on donnera une base de chacun. 0,5pt
 - 6) On pose $\vec{e}_1 = \vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{e}_2 = 2\vec{i} - \vec{j}$
 - a) Montrer que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{k})$ est une base de W . 0,5pt
 - b) Déterminer la matrice de φ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{k})$. 0,5pt
 - c) Déterminer la matrice $\varphi O \varphi$, puis donner la nature et les éléments caractéristiques de φ . 1pt

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES 4,5pts

Développer un raisonnement logique et communiquer à l'aide du langage mathématiques en faisant appel au PGCD, PPCM, théorème des restes chinois, et des nombres complexes pour résoudre un problème.

Deux municipalités A et B ont au total 6192 habitants. A fin d'accomplir l'une de leurs promesses de la campagne électorale, les maires de ces deux communes reçoivent des ordinateurs qu'ils doivent partager équitablement à la population. Pour que le partage puisse bien se passer, il a fallu prévoir au moins 18 060 ordinateurs.

On a observé dans la municipalité A, au jour J_0 , un phénomène naturel qui apparaît périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard ($J_0 + 6$), on observe un autre phénomène naturel dans la municipalité B dont la période d'apparition est de 81 jours. On désigne par J_1 le jour de la prochaine apparition simultanée des deux phénomènes dans ces deux municipalités et par u et v le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre J_0 et J_1 .

Pour mieux comprendre ces phénomènes, un comité scientifique a été créé afin de déterminer la zone située à la frontière de deux communes qui sera plus touchée pendant la prochaine apparition simultanée de ces phénomènes. On muni le plan complexe du repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ et on définit l'application f qui à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{z-4-2i}{z+2+i}$. Soit $A(4 + 2i)$ un point de la municipalité A et $B(-2 - i)$ un point de la municipalité B. Les points les plus impactés seront tels que z' soit imaginaire pur.

TACHES

- 1) Déterminer le nombre d'habitants de chaque municipalité sachant que la municipalité A a au moins 3000 habitants et la municipalité B a au moins 2500 habitants. 1,5pt
- 2) Déterminer le couple $(u; v)$ et en déduire le nombre de jours qui s'écouleront entre J_0 et J_1 . 1,5pt
- 3) Déterminer l'ensemble des points M situé à la frontière de ces deux municipalités qui subiront plus d'impact à la prochaine apparition simultanée des deux phénomènes. 1,5pt