MINESEC
Délégation Régionale du SUD
DD-VALLÉE Du NTEM

Lycée Technique d'Ambam
Département de Mathématiques

Année scolaire 2021-2022
Tle F_2,F_3, F_4 ,$CMA-MVT$, $AMEB$
Octobre 2021
Durée : 2h
Proposé par : KAM TSÉMO Patrick

Devoir surveillé de Mathématiques

Le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie.

EXERCICE 1 : 04 Points

1. Déterminer le module et un argument de $Z = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$. **1.5 pt**
2. Calculer $\cos 3x$ et $\sin 3x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$. **1 pt**
3. Linéariser les expressions suivantes : $A = \sin^3 x$ et $B = \cos x \sin^2 x$. **1.5 pt**

EXERCICE 2 : 05 Points

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes le polynôme :

$$P(z) = z^4 - 4z^3 + 17z^2 - 36z + 72$$

1. a. Vérifier que $3i$ est une solution de l'équation (E) : $P(z) = 0$. **0,5pt**
   b. Montrer que si z_0 est une solution alors son conjugué $\overline{z_0}$ est aussi une solution. **0,5pt**
   c. En déduire les solutions de l'équation (E). **1pt**
2. a. Écrire les solutions de (E) sous la forme exponentielle. **1pt**
   b. Montrer que le polynôme $P(z)$ peut s'écrire sous la forme d'un produit de deux polynômes du second degré à coefficient réels. **0,5pt**
3. Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
   On donne les points A, B, C et D d'affixes respectives : $3i$; $-3i$; $2-2i$ et $2+2i$.
   a. Placer les points A, B, C et D. **1pt**
   b. Montrer que $ABCD$ est un trapèze isocèle. **0,5pt**

PROBLÈME : 11 Points

sujetexa.com

Partie A 06 Points

Les performances réalisées par 10 coureurs à pied sur un semi-marathon et un marathon (les temps sont données en minutes) sont données dans le tableau suivant :

✎ x_i = Temps au semi-marathon.

✎ y_i = Temps au marathon.

$N°$ coureur	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	68	70	76	80	90	96	104	110	125	138
y_i	145	150	170	185	200	220	250	285	320	345

1 Représenter le nuage de points dans un repère orthogonal. **1 pt**

2 Calculer la moyenne, la variance et l'écart-type de la série des temps (x_i) réalisés au semi-marathon, puis de la série des temps (y_i) réalisés au marathon. **2 pts**

3 Calculer la covariance de x et y, et le coefficient de corrélation linéaire. **1 pt**

4 Déterminer une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés. représenter cette droite sur le graphique de la question 1). **1 pt**

5 Estimer le temps mis sur un marathon par un coureur ayant réalisé un temps de 1h56 au semi-marathon. **1 pt**

Partie B 05 Points

Soit $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et l'équation $(E_\theta) : z^2 - 2(i+\cos\theta)z + 1 + 2ie^{-i\theta} = 0$

1 a Vérifier que : $-8 + 4\cos^2\theta - 8\sin\theta = \left[2i(1+\sin\theta)\right]^2$. **0,5pt**

b Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_θ). **1,5pt**

2 Dans le plan complexe, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A := i$; $z_B := e^{-i\theta}$ et $z_C := 2i + e^{i\theta}$.

a Vérifier que $z_B - z_A = \overline{z_C - z_A}$. En déduire que $AB = AC$. **1,5pt**

b Montrer que : $z_C - z_A = 2\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}$. **0,75pt**

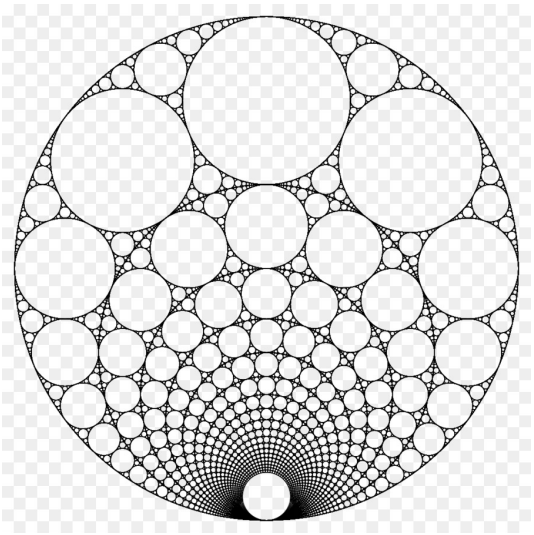
c En déduire la valeur de θ pour laquelle le triangle ABC est équilatéral. **0,75pt**

Quand vous vous demandez où est Dieu pendant les périodes difficiles de votre vie, souvenez vous que le professeur reste toujours silencieux pendant l'examen.

.

(Albert EINSTEIN)

sujetexa.com



KAM TSEMO Patrick Noël

Professeur de Lycée

Lauréat de la 55^{ieme} promotion de l'ENS de Yaoundé

CAMEROUN

MINESEC

Enseignement Technique-professionnel

Terminale F-BT

Correction évaluation $N°1$

Adresse :

+237696445986 :
+237673414635 :
+237667872725 :
+237620274457 :
kam.noel@yahoo.fr :
kamtsemo@gmail.com :

Quand vous vous demandez où est Dieu pendant les périodes difficiles de votre vie, souvenez vous que le professeur reste toujours silencieux pendant l'examen.

.

(Albert EINSTEIN)

sujetexa.com

Corrigé évaluation 1 : Terminale F-BT

EXERCICE 1

1. Déterminons le module et un argument de $Z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$:

On a : $|Z| = \left|\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}\right| = \left|\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)\right|^{20} = \left(\frac{|1+i\sqrt{3}|}{|1-i|}\right)^{20} = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^{20} = \sqrt{2}^{20} = 1024.$

$arg(Z) = arg\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} = 20 \times arg\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right) + k2\pi = 20 \times \left[arg(1+i\sqrt{3}) - arg(1-i)\right] + k2\pi$

Ainsi, $arg(Z) = 20 \times \left[\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] + k2\pi = 20\left(\frac{7\pi}{12}\right) + k2\pi = \frac{35\pi}{3} + k2\pi = -\frac{\pi}{3} + k2\pi.$

Moralité

$$|Z| = 1024 \text{ et } Arg(Z) = -\frac{\pi}{3}.$$

2. Calculons $\cos 3x$ et $\sin 3x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$:

D'après la formule de Moivre on a : $\begin{cases} \cos 3x = Re\left[(\cos x + \mathrm{i}\sin x)^3\right] \\ \sin 3x = Im\left[(\cos x + \mathrm{i}\sin x)^3\right] \end{cases}$

Or : $(\cos x + \mathrm{i}\sin x)^3 = (\cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x) + \mathrm{i}(-\sin^3 x + 3\cos^2 \sin x).$

Moralité

$$\begin{cases} \cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x \\ \sin 3x = -\sin^3 x + 3\cos^2 \sin x \end{cases}.$$

3. Linéarisons les expressions $A = \sin^3 x$ et $B = \cos x \sin^2 x$:

On a : $A := \sin^3 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2\mathrm{i}}\right)^3 = \frac{-1}{8\mathrm{i}}(e^{ix} - e^{-ix})^3 = \frac{-1}{8\mathrm{i}}(e^{i3x} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-i3x})$

Ainsi, $\sin^3 x = \frac{-1}{8\mathrm{i}}\left[e^{i3x} - e^{-i3x} - 3(e^{ix} - e^{-ix})\right] = \frac{-1}{8\mathrm{i}}\left[2\mathrm{i}\sin 3x - 3(2\mathrm{i}\sin x)\right] = -\frac{1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x.$

Enfin pour B On a : $B = \cos x \sin^2 x = \left[\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right]\left[\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right]^2 = -\frac{1}{8}(e^{i3x} - e^{ix} - e^{-ix} + e^{-i3x})$

Ainsi, $B = -\frac{1}{8}\left[(e^{i3x} + e^{-i3x}) - (e^{ix} + e^{-ix})\right] = -\frac{1}{8}(2\cos 3x - 2\cos x) = -\frac{1}{4}\cos 3x + \frac{1}{4}\cos x$

Moralité

$$A = -\frac{1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x \text{ et } B = -\frac{1}{4}\cos 3x + \frac{1}{4}\cos x$$

EXERCICE 2

1. a. Vérifions que $3i$ est solution de l'équation $(E) : P(z) = 0$

On a : $P(3i) = (3i)^4 - 4(3i)^3 + 17(3i) - 36(3i) + 72 = 81 + 108i - 153 - 108i + 72 = 0.$

Par conséquent, $3i$ est solution de l'équation $(E) : P(z) = 0$.

sujetexa.com

b. Montrons que si z_0 est solution de (E) alors $\overline{z_0}$ est également solution de (E).

Supposons z_0 est solution de (E) alors nous avons $z_0^4 - 4z_0^3 + 17z_0^2 - 36z_0 + 72 = 0$.

ie $\overline{z_0^4 - 4z_0^3 + 17z_0^2 - 36z_0 + 72} = \overline{0}$ ***ie*** $(\overline{z_0})^4 - 4(\overline{z_0})^3 + 17(\overline{z_0})^2 - 36(\overline{z_0}) + 72 = 0$.

D'où, $P(\overline{z_0}) = 0$. Ainsi $\overline{z_0}$ est solution de (E).

Moralité

si z_0 est solution de (E) alors $\overline{z_0}$ est également solution de (E).

c. Déduisons toutes les solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E) :

D'après $1-a)$ $3i$ est solution de (E) ; il s'ensuit d'après $1-b)$ que $\overline{3i} = -3i$ est aussi solution de (E).

Dès lors, $(z-3i)$ et $(z+3i)$ divise $P(z)$.

D'où, $(z-3i)(z+3i)$ divise $P(z)$ ***ie*** z^2+9 divise $P(z)$.

Par conséquent en effectuant la division euclidienne de $P(z)$ par z^2+9 on obtient :

$$P(z) = (z^2+9)(z^2-4z+8)$$

Dès lors, il reste à résoudre $z^2 - 4z + 8 = 0$ pour déterminer le reste de solution.

On a $\Delta = -16 = (4i)^2$, $z = \dfrac{4-4i}{2} = 2-2i$ ou $z = \dfrac{4+4i}{2} = 2+2i$.

Moralité

$$S = \{3i; -3i; 2-2i; 2+2i\}$$

2. a. Écrivons les solutions de (E) sous forme exponentielle

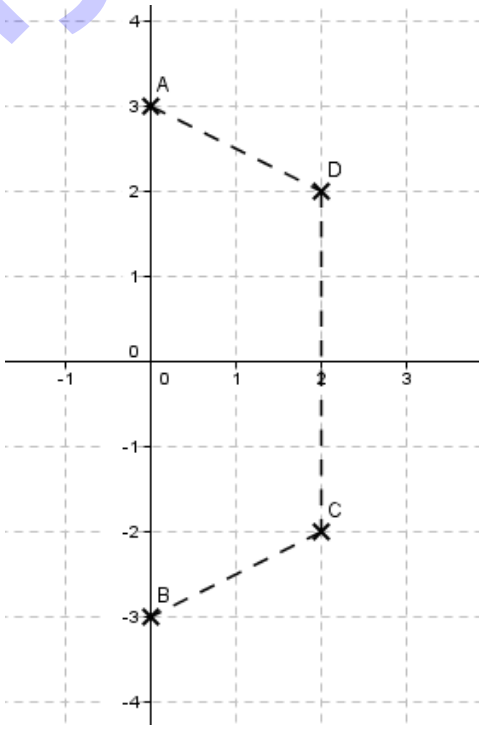
On a : $3i = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$; $-3i = 3e^{-i\frac{\pi}{2}}$; $2+2i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $2-2i = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

b. Écrivons le polynôme P comme produit de deux polynômes de second degré à coefficient réels

D'après la question **1-c)** On a :

$$P(z) = (z^2+9)(z^2-4z+8).$$

3. a. Plaçons les points A, B, C et D :



sujetexa.com

b. Montrons que $ABCD$ est un trapèze isocèle :

Il suffit de montrer que : $\begin{cases} AD = BC \\ (AB) \parallel (DC) \end{cases}$ ***ie*** $\begin{cases} |Z_{\overrightarrow{AD}}| = |Z_{\overrightarrow{BC}}| \\ Z_{\overrightarrow{AB}} = kZ_{\overrightarrow{DC}}, k \in \mathbb{R} \end{cases}$

Au préalable on a :

$Z_{\overrightarrow{AD}} = Z_D - Z_A = 2 - i$; $Z_{\overrightarrow{BC}} = Z_C - Z_B = 2 + i$; $Z_{\overrightarrow{AB}} = -6i$ et $Z_{\overrightarrow{DC}} = -4i$.

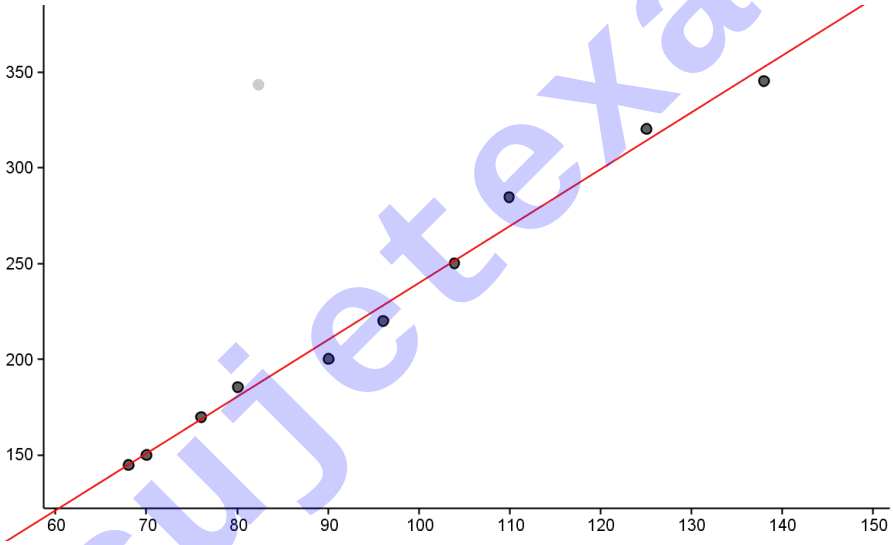
Dès lors, on a $|Z_{\overrightarrow{AD}}| = \sqrt{5} = |Z_{\overrightarrow{BC}}|$ et $Z_{\overrightarrow{AB}} = \frac{3}{2} Z_{\overrightarrow{DC}}$.

Moralité : $ABCD$ est un trapèze isocèle

PROBLÈME

Partie A

1. Représentons le nuage de points dans un repère orthogonal :



Au préalable dressons un tableau pratique d'usage courante, pour les questions qui vont suivre dès à présent :

											Totaux
x_i	68	70	76	80	90	96	104	110	125	138	***957***
y_i	145	150	170	185	200	220	250	285	320	345	**2270**
x_i^2	4624	4900	5776	6400	8100	9216	10816	12100	15625	19044	**96601**
y_i^2	21025	22500	28900	34225	40000	48400	62500	81225	102400	119025	**560200**
$x_i y_i$	9860	10500	12920	14800	18000	21120	26000	31350	40000	47610	**232160**

2. Calculons les moyennes $\overline{x}$, $\overline{y}$; les variances $Var(X)$, $Var(Y)$ et les écart-types σ_X et σ_Y

On a : $\overline{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = \frac{957}{10} = 95,7$ ***ie*** $\overline{x} = 95,7$ et $\overline{y} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} y_i = \frac{2270}{10} = 227$ ***ie*** $\overline{y} = 227$.

$Var(X) = \frac{1}{10}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i^2\right) - \overline{x}^2 = \frac{96601}{10} - 95,7^2 = 501,61$. Donc $Var(X) = 501,61$.

sujetexa.com

$Var(Y) = \frac{1}{10}\Big(\sum_{i=1}^{10} y_i^2\Big) - \overline{y}^2 = \frac{560200}{10} - 227^2 = 4491$. Donc $Var(Y) = 4491$.

$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{501,61} = 22,396$ ***ie*** $\sigma(X) = 22,396$.

$\sigma(Y) = \sqrt{Var(Y)} = \sqrt{4491} = 67,01$ ***ie*** $\sigma(Y) = 67,01$.

3. Calculons la covariance $Cov(X;Y)$ et le coefficient de corrélation linéaire r :

$Cov(X;Y) = \frac{1}{10}\Big(\sum_{i=1}^{10} x_i y_i\Big) - \overline{x}.\overline{y} = \frac{232160}{10} - 95,7 \times 227 = 1492,1$ ***ie*** $Cov(X;Y) = 1492,1$.

$r = \frac{Cov(X;Y)}{\sqrt{Var(X)} \times \sqrt{var(Y)}} = \frac{1492,1}{\sqrt{2252730,57}} = 0,9941$ ***ie*** $r = 0,9941$.

4. Déterminons par la méthode des moindres carrées une équations de la droite de régression de y en x :

On a : $y - \overline{y} = \frac{Cov(X;Y)}{Var(X)}(x - \overline{x})$ ***ie*** $y - 227 = \frac{1492,1}{501,61}(x - 95,7)$ ***ie*** $y - 227 = 2,974(x - 95,7)$.

$$y = 2,974x - 57,6118$$

5. Déterminons le temps mis sur le marathon par un coureur qui fait 1h56 min sur le semi-marathon :

On a : $x = 1h56 = 60min + 56min = 116min$.

Ainsi, $y = 2,974 \times 116 - 57,6118 = 287,3722$ minutes

Partie B

1. a. Vérifions que : $-8 + 4\cos^2\theta - 8\sin\theta = \Big[2i(1 + \sin\theta)\Big]^2$

On a : $\Big[2i(1 + \sin\theta)\Big]^2 = -4\Big[1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta\Big]$. ***Or :*** $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$.

Il s'ensuit que $-8 + 4\cos^2\theta - 8\sin\theta = \Big[2i(1 + \sin\theta)\Big]^2$.

b. Résolvons, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_θ).

On a : $\Delta = -8 + 4\cos^2\theta - 8\sin\theta = \Big[2i(1 + \sin\theta)\Big]^2$.

$z_1 = \frac{2i + 2\cos\theta - 2i(1 + \sin\theta)}{2} = e^{-i\theta}$ ou $z_2 = \frac{2i + 2\cos\theta + 2i(1 + \sin\theta)}{2} = 2i + e^{i\theta}$.

$$S = \{e^{-i\theta}; 2i + e^{i\theta}\}$$

2. a. Vérifions que $z_B - z_A = \overline{z_C - z_A}$. Puis déduisons que $AB = AC$.

On a :

$z_B - z_A = e^{-i\theta} - i$. ***Or :*** $\overline{z_C - z_A} = \overline{2i + e^{i\theta} - i} = -2i + e^{-i\theta} + i = e^{-i\theta} - i$.

D'où, $z_B - z_A = \overline{z_C - z_A}$.

Par ailleurs : $AB = |z_B - z_A| = |\overline{z_C - z_A}| = |z_C - z_A| = AC$. Donc, $AB = AC$.

b. Montrons que : $z_C - z_A = 2\cos\Big(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\Big)e^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})}$.

On a : $z_C - z_A = e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{2}}$. ***Or :*** $e^{i\alpha} + e^{i\beta} = 2\cos\Big(\frac{\alpha - \beta}{2}\Big)e^{i\frac{\alpha - \beta}{2}}$.

Dès lors, pour $\alpha = \theta$ et $\beta = \frac{\pi}{2}$, Il s'ensuit que : $z_C - z_A = 2\cos\Big(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\Big)e^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})}$.

sujetexa.com

c. Déduire la valeur de θ pour laquelle le triangle ABC est équilatéral :

On a : $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \dfrac{\overline{z_C - z_A}}{z_C - z_A} = \dfrac{2\cos\left(\dfrac{\theta}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)e^{-i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}}{2\cos\left(\dfrac{\theta}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}} = e^{-i(\theta+\frac{\pi}{2})}$.

Or : ABC est un triangle équilatéral si et seulement si $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$.

De ce fait, $\begin{cases} e^{-i(\theta+\frac{\pi}{2})} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \\ e^{-i(\theta+\frac{\pi}{2})} = e^{i\frac{\pi}{3}} \end{cases}$ ***ie :*** $\begin{cases} \theta + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{3} \\ -\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$. Ainsi, $\begin{cases} \theta = -\dfrac{\pi}{6} \\ \theta = -\dfrac{5\pi}{6} \end{cases}$.

Or : $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Par conséquent :

$$\theta = -\frac{\pi}{6}$$

.

sujetexa.com