COLLÈGE F-X. VOGT		Année scolaire 2021-2022
Département de Mathématiques	CONTRÔLE	Date : 25/09/2021

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Niveau : TTI **Durée : 4 heures** **Coefficient: 4**

Partie A : ÉVALUATION DES RESSOURCES (15,5 POINTS)

Exercice 1: (5 points)

1) Soit n un entier naturel. On pose $a = 9n + 2$ et $b = 12n + 1$. Montrer que les seuls diviseurs positifs commun à a et à b sont 1 et 5. *1pt*
2) Soit b un entier naturel non nul. Dans la division euclidienne de 990 par b, le quotient est 39.
   a) Démontrer que $39b \leq 990 \leq 40b$. *0,75pt*
   b) En déduire les valeurs possibles de b est du reste r. *0,75pt*
3) Déterminer le reste de la division euclidienne du nombre $200 \times 146^{16} + 257^{11}$ par 3. *1pt*
4) Déterminer les chiffres x et y pour que le nombre $\overline{x43y}$ en écriture décimal soit divisible par 2 et par 9. *1,5pt*

Exercice 2: (4 points)

Soit n un entier naturel non nul et différent de 1. On pose $A = n^2 - 2n + 2$ et $B = n^2 + 2n + 2$.

1) Factoriser $n^4 + 4$. *1pt*
2) Montrer que $A|n^4 + 4$ et $B|n^4 + 4$. *1pt*
3) Montrer que tout diviseur de A qui divise n divise 2. *1pt*
4) Montrer que tout diviseur commun de A et B divise n. *1pt*

Exercice 3 : (3 points)

1) Pour tout entier naturel n, déterminer le reste de la division euclidienne de 7^n par 6.
2) En utilisant les congruences, démontrer que $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7. *0,75pt*
3) Déterminer les entiers relatifs n tels que $n^2 + 4n + 18 \equiv 0[7]$. *0,75pt*
4) Déterminer le chiffre des unités du nombre $N = (3548)^9 \times (2537)^{37}$. *1pt*

Exercice 4 : (3,5 points)

Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1. On pose $a = n - 1$ et $b = n^2 - 3n + 6$.

1) Déterminer deux entiers α et β tels que $n^2 - 3n + 6 = (\alpha n + \beta)(n - 1) + 4$ et déduire que tout diviseur de a et b est un diviseur de 4. *1,5pt*
2) Montrer que tout diviseur de a et de 4 est un diviseur de a et de b et en déduire que $PGCD(a; b) = PGCD(a; 4)$. *1pt*
3) Pour quelles valeurs de n, le nombre $\frac{(n^2-3n+6)(2n-1)}{n-1}$ est-il un entier? *1pt*

Partie B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES (4,5 POINTS)

Situation :

Dans le but de protéger la confidentialité des échanges de l'armée sur un front de guerre, les responsables de l'agence militaire (base des opérations militaires) ont contacté une agence de sécurité informatique pour mettre sur pied un procédé de codage des informations échangées par les militaires. Le manifeste de confidentialité que l'ingénieur de l'agence de sécurité a mis sur pied stipule qu'à chaque lettre de l'alphabet, on associe, grâce au tableau ci-dessous, un nombre entier compris entre 0 et 25. Ensuite, son procédé de codage continu de façon suivante :

Étape 1 : à la lettre que l'on veut coder, on associe le nombre x correspondant dans le tableau.

Étape 2 : On calcule le reste de la division euclidienne de $17x + 5$ par 27 et on le note m.

Étape 3 : Au nombre m, on associe la lettre correspondante dans le tableau.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Le général de l'armée lui aussi informaticien de formation, propose une procédure de décodage pour le chef de l'agence militaire uniquement. Il dit au chef de l'agence que x est le reste de la division euclidienne de $8m - 40$ par 27 et au nombre x , on associe la lettre correspondante dans le tableau.

Tâches :

1) Utiliser la procédure de codage de l'ingénieur pour coder le mot « BAC ». ***1,5pt***
2) Utiliser la procédure de codage de l'ingénieur pour coder le mot « BIR ». ***1,5pt***
3) Montrer que le général a raison utiliser sa procédure de décodage pour décoder le sigle « TIR ». ***1,5pt***