| COLLÈGE F-X. VOGT | | Année scolaire 2021-2022 |
|---|---|---|
| Département de Mathématiques | **CONTROLE** | **Situation Scolaire N°1** Date : 09 Octobre 2021 |

**EPREUVE DE MATHEMATIQUES**

Niveau : **Tle D** Durée : **04 heures** Coef: 4

## PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES 15,5 POINTS

**Exercice 1 : 03 Points**

**A-** On considère les fonctions $f, g, h$ et $k$ telles que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ; $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ ; $h(x) = 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{f(x)}}$ et $|k(x) - 1| \leq g(x)$, de plus $f(x) > 0$ pour tout réel $x$.

1- Déterminer la limite de $h$ en $+\infty$. ***0,5pt***

2- Déterminer la limite de $k$ en $+\infty$. ***0,5pt***

**B-** Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x+\sqrt{x^2+2x-1}}{x}$ ; b) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 2x}{\sin 4x}\right)$; c) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+2}}{x}\right)$; d) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x}\right)$. ***2pts***

**Exercice 2 : 0 5,5 Points**

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes le polynôme $P$ défini par :
$P(z) = (1+i)z^3 - (3+2i)z^2 + (4+2i)z - 2$.

1- Montrer que $1 + i$ est une racine de P. ***1pt***

2- On admet qu'il existe 3 nombres complexes $a$, $b$ et $c$ tels que : $P(z) = (z - 1 - i)(az^2 + bz + c)$.
Montrer alors que $a = 1 + i$ ; $b = -3$ et $c = 1 - i$. ***1pt***

3- Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$. ***1pt***

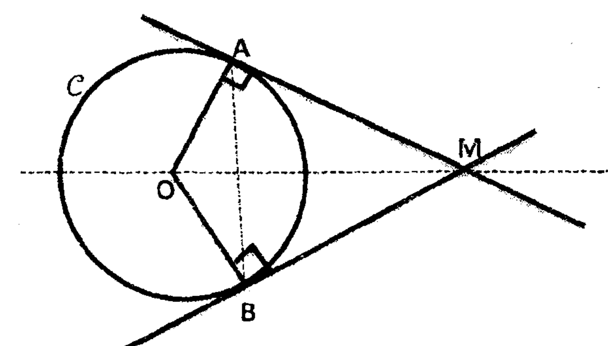
4- On considère l'ensemble $(E)$ des points $M$ du plan d'affixe $z$ différent de $1 - i$ tels que le nombre complexe $z' = \frac{z}{z-1+i}$ soit imaginaire pur.

**a)** En posant $z = x + iy$, montrer que $z' = \frac{x^2+y^2-x+y}{(x-1)^2+(y+1)^2} - \frac{x+y}{(x-1)^2+(y+1)^2}i$. ***1pt***

**b)** Déterminer $(E)$. ***1pt***

**Exercice 3 : 04 Points**

On considère un cercle $C$ de rayon $R$, deux points A et B distincts de ce cercle, M est le point d'intersection des tangentes au cercle en A et B. l'angle géométrique $\widehat{AOB}$ a une mesure en radians égale à $x$. on désigne par $S(x)$ l'aire du triangle ABM et par $T(x)$ l'aire du secteur du disque limité par le segment $[AB]$ et le petit arc de cercle $AB$. L'objectif est de déterminer la limite en 0 de $R(x) = \frac{T(x)}{S(x)}$.




***On rappelle que:*** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim_{x\to 0}\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} = 1$.

L'aire d'un triangle ABC est égale à : $\frac{1}{2}AB.AC\sin\hat{A}$

$\sin(\pi - x) = \sin x$

1- Montrer que $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right).\sin x}{x^3} = \frac{1}{4}$. ***0,5pt***

2- Montrer que : $S(x) = \frac{1}{2}R^2 tan^2\left(\frac{x}{2}\right).sinx$ et $T(x) = \frac{1}{2}R^2(x - sinx)$. **1pt**

3- En déduire une expression de $R(x)$ en fonction de $x$. **0,5pt**

4- On admet que que : $x - \frac{x^3}{6} \leq sinx \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

a) Montrer que : $\frac{\left(1-\frac{x^2}{20}\right)x^3}{6tan^2\left(\frac{x}{2}\right).sinx} \leq R(x) \leq \frac{x^3}{6tan^2\left(\frac{x}{2}\right).sinx}$. **1pt**

b) En déduire la limite de $R(x)$ en 0. **1pt**

**Exercice 4 : 03 Points**

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2+4} - \frac{x}{2} - 2$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. L'objectif de cet exercice est l'étude des branches infinies à $(\mathcal{C}_f)$.

1- Déterminer la limite de $f$ en $-\infty$. **0,5pt**

2- Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$. **0,5pt**

3- Calculer $\lim_{x \to -\infty}\left[f(x) - \left(-\frac{3}{2}x - 2\right)\right]$ et conclure. **1pt**

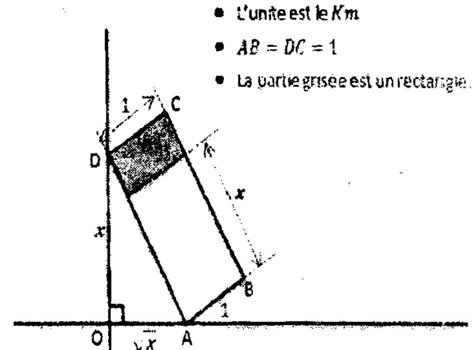
4- Etudier les branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$ en $+\infty$. **1pt**

**PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES** **04,5 POINTS**

***Compétences à développer*** : Résoudre une situation problème, déployer un raisonnement mathématique et communiquer à l'aide du langage mathématique dans les situations de vie où interviennent les lieux géométriques et les équations du second degré et les fonctions.

***Situation :***

- L'unité est le $Km$
- $AB = DC = 1$
- La partie grisée est un rectangle.




Monsieur Onana a un terrain représenté par la figure ci-contre, OABCD où OAD est un triangle rectangle en O, $OD = x$ et $OA = \sqrt{x}$ , $x$ étant un réel strictement positif.

Sur son domaine, la partie grisée est réservée pour l'élevage des poules. Le souhait de M. Onana est d'augmenter la valeur de $x$ autant que possible pour que la partie réservée à l'élevage ait une aire strictement supérieure à 0,5 $Km^2$, tout en prenant soins de garder la même forme pour son terrain.

Son fils Atéba, après quelques calculs et observation lui dit que ce qu'il veut là (avoir une aire supérieure à 0,5 $Km^2$) n'est pas possible.

Dans le repère orthonormé d'origine O où la droite $(OA)$ représente l'axe des abscisses et $(OD)$ l'axe des ordonnées, la commune a pour projet de tracer une route qui est représentée par l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ tels que le nombre complexe $Z = \frac{z-4-2i}{z+2+i}$ soit un nombre réel.

***Tâches***

1- Déterminer $x = OD$ pour que la partie reservée à l'élevage ait pour aire 0,25 $Km^2$. **1,5pt**

2- Atéba a-t-il raison ? Justifier votre réponse. **1,5pt**

3- Sur votre feuille de composition, en prenant $OD = 4$ ; représenter la route à construire par la commune. **1,5pt**