COLLEGE DE MAZENOD			
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES			
Deuxième Évaluation	Classe : T_C	Année scolaire 2021-2022	Date :
Épreuve de mathématiques	Durée : 4h	Coef : 7	20 /11/ 2021

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES/15.5 points

EXERCICE 1 (3.75 points)

a est un nombre réel strictement positif et différent de 1. on considère la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et définie par : $f(x) = \sqrt{1 + ax^2}$. On admettra que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^*$. Soit la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. On suppose que : $0 < a < 1$.
   a) Démontrer par récurrence que :
      i) Pout tout n élément de $\mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{1-a}}$; **0.75pt**
      ii) La suite (u_n) est croissante. **0.5pt**
   b) Démontrer que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite. **0.5pt**
2. On supppose que : $a > 1$.
   Soit la suite (v_n) définie par : $v_n = (u_{n+1})^2 - (u_n)^2$ pour tout entier naturel n.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme. **0.75pt**
   b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, (u_{n+1})^2 - (u_n)^2 = a^n$. **0.25pt**
   c) On pose $S_0 = 1$ et $S_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
      Calculer S_n. **0.5pt**
   d) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{S_n}$. **0.5pt**

EXERCICE 2 (4.5 points)

I- On considère l'équation (E) : $\forall (x; y) \in \mathbb{Z}^2$, $19x + 9y = 3$.

1) Montrer que si $(x; y)$ est une solution de (E), alors x est un multiple de 3. **0.5pt**
2) Résoudre l'équation (E). **0.75pt**

II-Soit p un nombre premier.

1. a) Démontrer que pour tout entier k tel que $1 < k < p$, C_p^k est un multiple de p. **0.5pt**
   b) En déduire que pour tous entiers relatifs a et b, on a : $(a + b)^p \equiv a^p + b^p [p]$. **0.5pt**
   c) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel a, $a^p \equiv a[p]$. **0.75pt**
   d) En déduire que si a et p sont premiers entre eux, alors $a^{p-1} \equiv 1[p]$. **0.5pt**
2. On pose : $a = n^4 - 1$ et $b = n^6 - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le PGCD et le PPCM de (a, b). **1pt**

EXERCICE 3 (4.25points)

Une entreprise spécialisée dans l'industrie du bois envisage de faire des prévisions pour l'année 2014 du coût de production des feuilles de contre plaqués en fonction du chiffre d'affaires.

Elle dispose à cet effet des données statistiques résumées dans le tableau suivant.

X=Chiffres d'affaire (en million de francs) ; Y= Coût de production (en million de francs).

Années	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
X_i	350	380	500	450	580	650	700
Y_j	40	45	50	55	60	65	70

1. Représenter graphiquement le nuage de points associé à la série double $(X;Y)$ dans le plan rapporté à un repère orthogonal (O, I, J). On prendra $1cm$ pour 50millions de francs en abscisse et $1cm$ pour 5 millions de francs en ordonnées. **1.25pt**
2. Déterminer les coordonnées du point moyen G. **0.5pt**
3. Vérifier qu'un arrondi de la covariance $cov(X,Y)$ de cette série statistique est 1193. **0.5pt**
4. a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de cette série statistique et justifier l'existence d'un ajustement linéaire entre X et Y. **0.5pt**

b) Déterminer une équation de la droite d'ajustement (D) de y en x par la méthode des moindres carrés et construire (D) dans le même repère. **1pt**

c) Prévoir le coût de production de cette entreprise pour l'année 2014 si son chiffre d'affaires est de 1000.000.000F. **0.5pt**

EXERCICE 4 (3 points)

1. Soit (w_n) la suite de terme général : $w_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

   a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq w_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$. **0.5pt**

   b) Etudier la convergence de la suite (w_n). **0.5pt**

2. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$. **1pt**

3. Etudier les branches infinies de la fonction numérique f définie par :
   $f(x) = 2x - \sqrt{4x^2 - 3x + 2}$ **1pt**

PARTIEB : EVALUATION DES COMPETENCES/4.5 points

Situation

Un astronome a observé dans une ville au jour J_0, le corps céleste A, qui apparaît périodiquement tous les 105 jours. 6 jours plus tard $(J_0 + 6)$, il observe le corps B, dont la période d'apparition est de 81 jours. On appelle J_1 le jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets aux yeux de l'astronome. Le jour J_0 était le mardi 7 décembre 1999. (On rappelle que l'année 2000 était bissextile).

Au premier janvier 2000, cette ville possédait 20000 habitants. À partir de cette année la population augmente de 5% par an. De plus, durant la même période, 1000 personnes viennent s'établir dans cette ville chaque année. Dans cette ville l'ensemble des élèves de l'enseignement primaire représente 20% de la population totale. On estime qu'il faut un instituteur pour 40 élèves.

Cet astronome a acheté dans cette ville deux plantes pour son appartement en 2015:

- un ficus mesurant 50 cm et dont la hauteur augmente de 20% par an.
- un cactus mesurant 1,50m et dont la hauteur augmente de 4 % par an.

Le plafond de l'appartement étant situé à 2,50 m au-dessus du sol.

Tâches :

1. Quelle est la date exacte du jour J_1? **1.5pt**
2. Quelle devra être le nombre d'instituteurs au 1er janvier 2008 ? **1.5pt**
3. Laquelle des deux plantes atteindra la première le plafond ?
   Au cours de quelle année ? **1.5pt**

EXAMINATEUR : M. NOUMSSI