MINESEC
LYCEE CLASSIQUE ET MODERNE DE NDERE
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

ANNEE SCOLAIRE : 2021-2022
CLASSE : 1ière C COEF : 6
DUREE : x heures 00 min

TRAVAUX DIRIGES DE MATHEMATIQUES
TRIGONOMETRIE

Classe : PC

Proposée par : Cédric DONTSA

EXERCICE 1 **:**

1) soit x un réel appartenant à l'intervalle] $\frac{\pi}{2}$; π [tel que tanx= $-\frac{3}{4}$

a) Démontrer que 1 + tan² x= $-\frac{1}{cos\ 2\ x}$

b) Déterminer les valeurs de cos x et sin x

2) Déterminer les valeurs exactes de cos $(\frac{59\pi}{3})$ et sin $(-\frac{59\pi}{4})$

3) Sachant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ Calculer les valeurs exactes de cos $\frac{\pi}{12}$ et sin $\frac{\pi}{12}$

4) Démontrer que tan²x – sin ²x = tan²x.sin ²x

EXERCICE 2 **:**

I-1) Démontrer que cos $\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et en déduire sin $\frac{5\pi}{12}$

2) a) Résoudre dans $]-\pi\,;\,\pi]$ l'equation (E) : sin3x= sin2x

b) Représenter les images des solutions de (E) sur le cercle trigonométrique

2) a) Démontrer que ∀ x ∈ ℝ, sin3x =sinx (4cos ² x -1)

c) En déduire que l'équation (E) ⇔ sinx (4cos ² x -2cosx -1) =0

d) Parmi les solutions de (E) lesquelles sont solutions de l'équation
4cos ² x -2cos -1 = 0

3) En posant X= cosx, déterminer les valeurs exactes de cos $\frac{\pi}{5}$; et cos $\frac{3\pi}{5}$

II-1) soit x ∈ $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ tel que sin x = $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

a) Déterminer cox2x

b) En déduire la valeur de x

2) a) Démontrer que pour tout x ∈ $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, tanx sin2x = 1 – cos 2x

b) En déduire les valeurs exactes de tan $\frac{\pi}{8}$ et tan $\frac{\pi}{12}$

3) a) Montrer que pour tout x ∈ ℝ 4sinxsin $(\frac{\pi}{3} - x)$sin $(\frac{\pi}{3} + x)$ = sin 3x

c) En déduire la valeur de sin $\frac{\pi}{9}$ sin $\frac{2\pi}{9}$ sin $\frac{4\pi}{9}$

EXERCICE 3**:**

1) a est un réel de l'intervalle $[\frac{\pi}{2};\pi]$ tel que cosa=$-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Déterminer les valeurs exactes de sina ; tana ; cos2a ;sin2a et cos$\frac{a}{2}$

2) Résoudre dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ l'equation : cos(3x)= $-\frac{1}{2}$

3)vérifier que $\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{5\pi}{12}$ et donner les valeurs exactes de cos$\frac{5\pi}{12}$ et de sin$\frac{5\pi}{12}$

4) Déterminer les réels a, b, p et φ *tel* que :

$$A= (\sqrt{6}-\sqrt{2})\cos 2t + (\sqrt{6}+\sqrt{2})\sin 2t = a\cos(2t+b) = p\sin(2t+\varphi)$$

EXERCICE 4**:**

Pour tout réel x on pose A(x) = 2−2sinx cosx−2cos² x.

1. Écrire A(x) sous la forme acos2x + bsin2x + 1 où a et b sont deux réels.

2. Montrer que $A(x) = 1 + \sqrt{2}\cos(2x + \frac{3\pi}{4})$.
3. Résoudre dans R puis dans $]-\pi, 0]$, l'équation $A(x) = 0$.
4. En déduire dans l'intervalle$]-\pi, 0]$, l'ensemble solutions de l'inéquation $\cos^2 x + \sin x \cos x \geq 1$.

EXERCICE 5:

1. On considère l'expression $p(x) = \cos 4x + 5\cos 2x + 2$ dans laquelle x appartient l'intervalle $]-\pi;\pi]$.
(a) Montrer que $p(x) = 2\cos^2 2x + 5\cos 2x + 1$.
(b) Résoudre dans R l'équation (E) : $2x^2 + 5x + 2 = 0$.
(c) Résoudre sur $[-\pi;\pi]$ l'équation $P(x) = -1$.
2. a) Montrer que $\forall x \in R$, $8\cos^2 x + 1 = \cos 4X$
b) Déduire dans R la résolution de l'équation $32\cos^2 X + 4 = O$
c) Placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.
d) Déduire dans la résolution de l'équation $32\cos^4 X - 32\cos^2 X + 4 \geq O$
3. On considère l'expression $P(x) = \sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x$ où x est un nombre réel.
a) Déterminer deux réels a et θ tels que $p(x) = a\cos(2X - \theta)$
b) On considère l'équation (E) : $\frac{\sqrt{3}}{2} cos2X + cosx\ sinX = \frac{\sqrt{2}}{2}$ résoudre dans $[o\ ;\ 2\pi[$ l'équation E

EXERCICE 6:

1) Résoudre dans IR l'équation (E) $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$, sachant que (-1) est une solution de (E)
2) a) Ecrire cos3x en fonction de cosx et sin3x en fonction de sinx
b) En déduire que $\tan 3x = \frac{3 - tan^2 x}{1 - 3tan^2 x} tanx$
3) Montrer que $\tan\frac{5\pi}{12}$ est solution de (E)
4) En déduire que $\tan\frac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$

EXERCICE 7:

1) Montrer que $\forall x \in N$, $8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 = \cos 4x$
2) Déduire dans la résolution de l'équation $32\cos^4 x - 32\cos^2 x + 4 =$
3) Placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.
4) Déduire dans R la résolution de l'équation $32\cos^4 x - 32\cos^2 x + 4 \geq 0$
5) On considère l'expression $P(x) = \sqrt{3}cos2x + sin2x$ où x est un nombre réel.
a) Déterminer deux réels a et θ tel que p(x) = a, cos(2x-θ)
b) On considère l'équation (E) : $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x + \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Résoudre (E) dans $[0\ ;2\pi[$.
6) On considère le polynôme P définie par p(x) = 2sinx.tanx+ 4cos
a) Montrer que $p(x) = \frac{2cos^2(x) + 2}{\cos(x)}$, pour tout réel $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi : K\epsilon Z$
b) Résoudre dans $[0\ ;2\pi[$. L'équation p(x)=5
c) Représenter les points images sur des solutions sur le cercle trigonométrique

EXERCICE 8:

1. Montrer que pour tout réel x, $\cos x \sin x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \frac{1}{16}\sin 16x$
2. En déduire que $\cos\frac{\pi}{32} \sin\frac{\pi}{32} \cos\frac{\pi}{16} \quad \cos\frac{\pi}{8} \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{16}$.
3. On considère la fonction polynôme P définie sur R par : $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$.
(a) Calculer $P(-1)$; en déduire que $P(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$ où a,b et c sont des réels que l'on déterminera.
(b) Résoudre alors dans R l'équation $P(x) = 0$ et en déduire dans $]-\pi;\pi[$ les solution de l'équation : $2\sin^3 2x + 5\sin^2 2x + \sin 2x - 2 = 0$

EXERCICE 9:

1. Donner les valeurs exactes du $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\tan\frac{\pi}{12}$ sachant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$
2. On considère l'équation (E) : $\sin 3x = \sin 2x$.
3. Résoudre (E) dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$, puis représenter les points images des solutions sur le cercles trigonométrique
4. (a) Démontrer que pour tout nombre réel x, $\sin 3x = \sin x\,(4\cos^2 x - 1)$.
(b) En déduire que l'équation (E) est équivalente à
(E') : $\sin x\ (4\cos^2 x - 2\cos x - 1) = 0$
(c) Quelle sont parmi les solutions de (E) trouvées à la question 1. celles qui sont solution de (E'') : $4\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0$.
5. (a) Résoudre dan R l'équation : $4t^2 - 2t - 1 = 0$
(b) En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{5}$

EXERCICE 10:

1. En remarquant que $\frac{\pi}{6} = 2\times\frac{\pi}{12}$ déterminer $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\tan\frac{\pi}{12}$.
2. (a) Écrire $(1-\sqrt{3})^2$, puis $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ sous la forme $a + b\sqrt{3}$ où a et b sont des réels.
(b) Résoudre dans R l'équation $x^2 - (3-\sqrt{3})x + 2 - \sqrt{3} = 0$
(c) En déduire dans $[0;2\pi[$, les solutions de (E) : $\tan^2 2x - (3-\sqrt{3})\tan 2x + 2 - \sqrt{3} = 0$.
(d) Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométriques.

EXERCICE 11:

1. Déterminer la mesure principale de $\frac{11\pi}{6}$.
2. Déterminer les valeurs exactes de $\cos\frac{11\pi}{6}$ et de $\sin\frac{11\pi}{6}$.
3. En déduire que $\cos^2\frac{11\pi}{12} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$ et que $\sin^2\frac{11\pi}{12} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$
4. Déterminer les valeurs exactes de $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$.
5. Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'équation : $\sqrt{2-\sqrt{3}}\,\sin x - \sqrt{2+\sqrt{3}}\,\cos x = -\sqrt{2}$
6. Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'inéquation : $\sqrt{2-\sqrt{3}}\,\sin x - \sqrt{2-\sqrt{3}}\,\cos x \geq -\sqrt{2}$

EXERCICE 12:

1. (a) Démontrer que $\frac{1}{1+\tan^2 x} = \cos^2 x$ et que $(1+\sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$
(b) Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'équation (E) : $\frac{2}{1+\tan^2 x} + (1-\sqrt{2})\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$ et placer les solutions sur le cercle trigonométrique
(c) En déduire dans $[0;2\pi]$ les solutions de l'inéquation $\frac{2}{1+\tan^2 x} + (1-\sqrt{2})\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$
2. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longrightarrow \sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x$
(a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = 2\sin(2x - \frac{\pi}{3})$
(b) Résoudre dans $[-\pi;\pi]$ l'équation $f(x) - 1 = 0$

EXERCICE 13:

1. (a) Vérifier que : $\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$
(b) Résoudre dans R l'équation $4x^2 + 2(\sqrt{2}-\sqrt{3})x - \sqrt{3} = 0$
(c) En déduire dans l'intervalle $[-\pi\,,\pi]$ les solutions de l'équation
$4\sin^2 x + 2(\sqrt{2}-\sqrt{3})\sin x - \sqrt{6} = 0$
(d) Placer les points A; B; C et D , images respectives des solutions x_1, x_2, x_3 et x_4 tels que $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$
(e)Quelle est la nature du polygone ABCD? Calculer la valeur exacte de son aire 2. Résoudre dans $[0,\pi]$ l'inéquation $4\cos^2 x + 2(\sqrt{2}-\sqrt{3})\cos x - \sqrt{6} \geq 0$

EXERCICE 14:

1. Écrire cos3x en fonction de cos x , sin3x en fonction de sin x.
2. En déduire que : $\tan 3x = \tan x\frac{3-\tan^2 x}{1-3\tan^2 x}$.

EXERCICE 15:

On rappelle que $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

1. Démontrer que pour tout élément x de $R-\{\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, (k \in Z)\}$ $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$. On pose $t = \tan\frac{\pi}{12}$
2. Montrer que t est une solution de l'équation (E) : $x^2\sqrt{3} + 6x - \sqrt{3} = 0$.
3. Résoudre dans R l'équation (E). En déduire que $\tan\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$.
5. Résoudre dans $]-\pi ,\pi]$ puis dans $[0,2\pi[$ l'inéquation $\tan x \geq 2-\sqrt{3}$.

EXERCICE 16:

1. Soit l'équation (E) : $|\cos x| = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$. Exprimer cos2x en fonction de cos x.
2. En déduire que l'équation (E) peut s'écrire : $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. En déduire la résolution de l'équation (E) dans $\mathbb{R}$ et représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

EXERCICE 17:

1. Résoudre dans R l'équation $y^2 + 2y-1 = 0$.
2. Démontrer que pour tout élément a et b de $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in Z)\}$ $\tan(a+b) = \frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$, puis en déduire l'expression de tan2a en fonction de tan a pour a élément de $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} ,(k \in Z)\}$.
3. Déduire de ce qui précède que $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$.
4. Soit l'équation (E) $\cos a - (\sqrt{2} + 1) \sin a = 0$.
(a) Montrer que (E) est équivalent à (E') : $\tan a = \sqrt{2}-1$.
(b) Résoudre (E'), puis en déduire les solutions dans $[0, 2\pi[$ de l'équation (E).
(c) Représenter les images des solutions de (E) sur le cercle trigonométrique.
5. Résoudre dans $]-\pi ,\pi]$ puis dans R l'inéquation $\tan a \geq \sqrt{2}-1$.

EXERCICE 18:

1. Résoudre dans IR l'équation : $2t^2 +\sqrt{3}t-3 = 0$.
2. Déterminer deux nombres a et φ tels que pour tout x de IR, on ait : $\sqrt{3}\cos x + \sin x = a\cos(x-\varphi)$.
3. (a) Utiliser les résultats des questions 1) et 2) pour résoudre dans $[0;2\pi[$, l'équation (E) : $(2\sin^2 x +\sqrt{3}\sin x-3)(\sqrt{3} \cos x + \sin x - \sqrt{2}) = 0$.
(b) Représenter les images des solutions de (E) sur un cercle trigonométrique.

EXERCICE 19:

Soit A l'expression définie par $A(x) = 2\cos^2 x-2\sqrt{3} \sin x \cos x - 1$

1. Exprimer $\cos^2 x$ en fonction de cos2x.
2. Exprimer sin2x en fonction de cos x et sin x.
3. Montrons que $A(x) = a\cos 2x + b\sin 2x$ où a et b sont à déterminer.
4. Montrer que $A(x) = a_1 \cos(2x + \alpha)$ où a_1 et α sont à déterminer.
5. Résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'équation $A(x) = 1$ et représenter les images des solutions dans le cercle trigonométrique.
6. Résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'inéquation $A(x) \geq 1$.

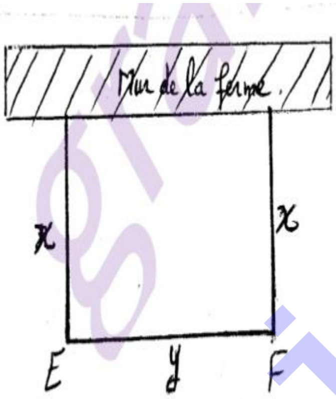
ACTIVITES D’INTEGRATION:

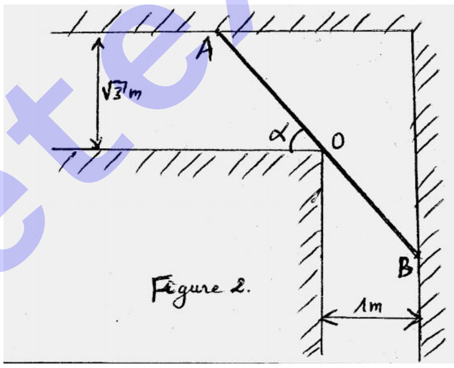
Situation 1 :

Un fermier voulait réaliser un poulailler (en forme rectangulaire) le long du mur de sa ferme (figure 1) . Il dispose 80m de grillage pour couvrir les 3 cotés. Il doit aussi porter des planches qu’il doit faire passer dans un couloir de largeur $\sqrt{3}$m qui tourne à angle droit et dont la largeur n’est plus que de 1 m après le virage. une planche [AB] est positionnée dans le couloir comme le montre la figure 2 ; elle fait avec l’un des mures un angle de mesure a le fils du fermier, éleve en classe de premiere C cherche à exprimer la distance AB en fonction de a et declare que : $AB = \frac{4\cos(a-\frac{\pi}{6})}{sin2a}$. Le technicien d’élevage rappelle au fermier que pour une croissance optimale , une volaille a besoin d’une surface au sol 25 dm²et d’un volume (d’air) l’un de ses poulaillé qui a la forme d’un pavé droit de coté de base 17 m et 46m de hauteur 1,5m.

TACHE

1. A quelle distance du mur doit-on placer les piquets E et F pour que l’aire du poulailler soit maximale ?
2. Le fils du fermier a-t-il raison ?
3. Quel est le nombre maximal de poussins que le fermier doit commander pour le poulailler en forme de pavé droit pour avoir une croissance optimal ?





Situation 2 :

Le fleuriste Jonas voudrait construire un parterre de fleurs ayant la forme d’un secteur circulaire (figure 2). Pour cela son papa, M. Albert lui a donné un espace dans sa plantation. Jonas essaye de se souvenir de l’emplacement exact de la plantation de papa. Il sait qu’elle a la forme d’un carré et que :

- La plantation possède une entrée au milieu de chacun de ses cotés.
- Un arbre se trouve à 20 mètres de l’entrée Nord et à l’extérieur de la plantation.
- Cet arbre est visible d’un point que l’on atteint en faisant 14 mètres vers le sud à partir de la porte sud. Pour l’espace, ayant la forme d’un secteur circulaire, que Jonas va occuper, son papa lui a remis 100 mètres de fil de fer pour l’entourer. Jonas, fin mathématicien, va choisir le rayon r pour que la surface de son parterre soit la plus grande possible. A l’intérieur de son parterre, Jonas crée un espace (triangle PQR) pour y planter les tulipes. La longueur du fil (QIJ) est de $10\sqrt{2}$ mètres et on a $2sin\alpha sin\beta = 1$ (figure 3).

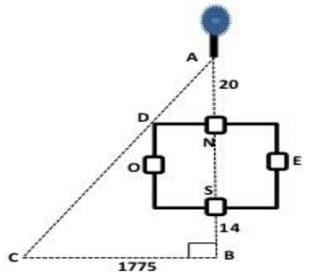


Figure 1

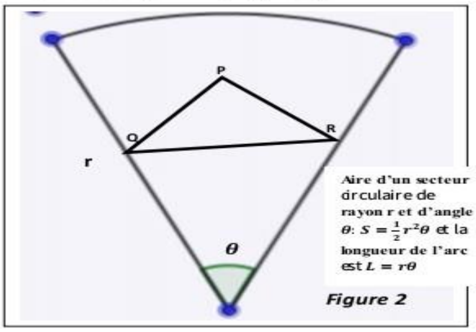
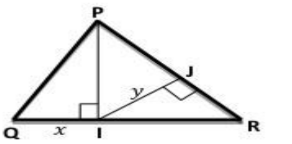


Figure 2



$PQ = IR = 10$; $QI = x$; $IJ = y$; $\widehat{QPI} = \alpha$ et $\widehat{IRJ} = \beta$.

Figure 3

Tâches :

1. Déterminer l'aire de la plantation de M. Albert.
2. Déterminer l'aire du parterre de fleur de Jonas.
3. Déterminer l'aire de la zone réservée à la culture des tulipes.

Situation 3 :

La vue transversale d'une bordure de fleuve est représentée par la figure ci-dessous. Une équipe de plongeurs y est installée pour mener des expériences de plongée verticale en eau profonde. Afin d'amortir les vagues, le bord (BC) n'est pas vertical et jonché d'obstacles ; l'autorité portuaire a installé une source lumineuse en , émettant un rayon rectiligne (BE) très puissant et faiblement réfracté dans l'eau. Ce rayon (BE) a pour rôle de limiter la zone de plongée dangereuse aux abords de la mer. Dans un premier temps, l'angle de la zone autorisée est le double de l'angle b de la zone non autorisée, dans un second temps sina=3cosb et tanb = 2tana , puis dans un troisième temps tan a=$\sqrt{2}\,\tan b$. Un plongeur saute d'une petite embarcation en un point A pour une plongée verticale. On doit lui accrochée un fil inextensible au dos pour le retenir en cas de danger. On donne AC=$10\sqrt{3}m$ et AB =10m.

Tâches :

1) Quelle est la longueur exacte du fil pour que le plongeur atteigne la limite autorisée à la verticale dans le premier test ?

2) Quelle est la longueur exacte du fil pour que le plongeur atteigne la limite autorisée à la verticale dans le troisième test ?

3) A quelle distance minimale exacte du bord B, le plongeur doit 'il sauter de l'embarcation afin qu'il puisse atteindre le fond de la mer sans restriction de sécurité dans le deuxième test ?