

Genius Corporation	Année 2021/2022	Propose par : NENGOUYEY TAKAM
Départ. Mathématiques	Classes : Premières C,E	Mail : takamdilanho@gmail.com
Cours de soutiens scolaires	TD	Tels : 691831680

FICHE DE TRAVAUX DIRIGES DEMATHEMATIQUES N°1

Première partie : Equations et Inéquations dans $\mathbb{R}$

Exercice 1

Mettre chacun des polynômes suivants sous forme canonique et en déduire ses racines éventuelles :

- a. $P(x) = 4x^2 - 4x - 3$ b. $Q(x) = 2x^2 - 12x + 18$
c. $R(x) = 2x^2 - x + 3$ d. $P(x) = 2x^2 - x - 6$

Exercice 2

1. Déterminer le polynôme du second degré tel que : $P(0) = -3$ et dont les racines sont -2 et $\frac{3}{2}$.
2. Reprendre la même question pour un polynôme dont $P(0) = 1$, $P(1) = -1$ et $P(-1) = 0$;

- a. Que dire de -1 pour ce polynôme ?
b. Déterminer toutes racines de polynôme.

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- $x^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$
- $2x^2 - 4\sqrt{3}x + 6 = 0$
- $x^2 - (2 + \sqrt{2})x + 2\sqrt{2} = 0$
- $4x^2 + 12|x| + 9 = 0$
- $\sqrt{2-x} = x + 10$
- $-x - 2\sqrt{x} + 15 = 0$
- $\left(\frac{x}{2+x}\right)^2 - \frac{5x}{4+2x} + 1 = 0$
- $ax^2 - (2 + a^2)x + 2a \quad (a \in \mathbb{R}^*)$

9. $a^2t^2 - 2t + \frac{1}{a^2} = 0 \quad (a \in \mathbb{R}^*)$

10. $\frac{\frac{1}{x^2} - \frac{3}{2x} + 1}{x+2} = 0$

Exercice 4

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

- a. $x^4 - 11x^2 + 18 = 0$ b. $x^4 + x^2 + 1 = 0$
c. $9x^4 - 12x^2 + 4 = 0$ d. $2x^4 + 11x^2 + 5 = 0$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^4 - 2(a^2 + b^2)x^2 + (a^2 - b^2)^2 = 0$, où a et b sont deux nombres réels donnés.

3. On considère l'équation d'inconnue x : $x^4 + (m-2)x^2 + m + 1$.
Déterminer les valeurs du nombre réel m pour lesquelles cette équation a :
a. Quatre solutions distinctes ;
b. Deux solutions distinctes ;
c. Trois solutions distinctes.

Exercice 5

On considère le polynôme P défini par : $P(x) = -5x^2 - 3x + 2$. Il a deux racines a et b .

1. Montrer qu'aucune de ces racines n'est nulle.
2. Sans calculer ces racines, déterminer : $a+b$; ab ; $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$; $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.

Exercice 6

On considère le polynôme de degré 3 défini par : $P(x) = x^3 + 4x^2 - 5x + 8$.

On suppose que P admet trois racines distinctes a , b et c . Déterminer (sans calculer les racines) les nombres réels U, X et Y définis par : $U = abc$; $X = a + b + c$ et $Y = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Exercice 7

On considère le polynôme de degré 3 défini par : $P(x) = x^3 - 3x + 1$. On suppose que P admet trois racines distinctes a , b et c . Déterminer les nombres réels U, X, Y et Z définis par : $U = abc$; $X = a + b + c$; $Y = ab + ac + bc$ et $Z = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Exercice 8

Soit P un polynôme défini par : $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

Déterminer une condition portant sur les nombres réels a , b et c pour que :

1. P ait deux racines opposées ;
2. P ait deux racines inverses l'une de l'autre ;
3. P ait une racine nulle ;
4. P ait une racine égale à -2 ;
5. P ait deux racines 1 et -3 .

Exercice 9

Déterminer le polynôme du second degré tel que : $P(0) = 1$, $P(1) = 4$ et

$P(-1) = 2$.

Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) > 0$.

Exercice 10

Utiliser la forme canonique, pour étudier suivant les valeurs de x , le signe de chacun des polynômes suivants :

- | | |
|--------------------------|-------------------------------------|
| a. $P(x) = x^2 - x + 1$ | b. $Q(x) = 2x^2 + \frac{3}{2}x + 5$ |
| c. $R(x) = -x^2 - x - 6$ | d. $S(x) = -2x^2 + 5x - 2$ |

Exercice 11

Déterminer s'ils existent deux nombres réels dont la somme est S et le produit est P dans chacun des cas suivants :

- | | |
|---------------------------|--|
| a. $S = -1$ et $P = 12$; | b. $S = -9$ et $P = 20$; |
| c. $S = 3$ et $P = 4$; | d. $S = \sqrt{2}$ et $P = \frac{1}{2}$. |

Exercice 12

Déterminer s'ils existent les nombres réels p et q dans chacun des cas suivants :

- | | |
|---|--|
| a. $p^2 + q^2 = \frac{25}{4}$ et $pq = -3$; | b. $\frac{q}{p} + \frac{p}{q} = -\frac{25}{12}$ et $pq = -\frac{1}{3}$; |
| c. $pq = -6$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{6}$; | d. $p + q = 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = -\frac{1}{6}$. |

Exercice 13

Soit le polynôme défini par : $P(x) = x^2 + 2(m-1)x + m-3$.

Discuter suivant les valeurs de m , le nombre et le signe de ses racines.

Exercice 14

Soit P le polynôme défini par : $P(x) = x^2 + (2m+1)x + m^2 + 1$.

1. Déterminer les valeurs du nombre réel m pour que P ait deux racines α et β telles que :
 - a. $\alpha^2 + \beta^2 = 29$;
 - b. $|\alpha - \beta| = 1$.
2. Dans chacun des cas, calculer α et β .

Exercice 15

1. Un triangle rectangle a pour périmètre 30 m et pour aire 30 m^2 . Quelles sont ses dimensions ?
2. L'aire d'un jardin rectangulaire est égale à 360 m^2 . Si on augmente sa longueur et sa largeur de 6 m , l'aire est alors égale à 630 m^2 . Quelles sont les dimensions de ce jardin ?

Exercice 16

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

- | | |
|---|---|
| a. $3x^2 + 6x - 9 \leq 0$ | b. $2x^2 + x - 1 > 0$ |
| c. $2x^2 + x - 1 < 0$ | d. $S(x) = \sqrt{3}x^2 - 6x + 3\sqrt{3} \geq 0$ |
| e. $x^2 - 2(1 - \sqrt{3})x + 2\sqrt{3} < 0$ | f. $x^2 - 2x + 3 > 0$ |

Exercice 17

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\frac{4}{x} + \frac{3}{x-1} > \frac{x}{4} + \frac{x-1}{3}$;

En déduire (sans plus refaire les calculs) les solutions de l'inéquation :

$$\frac{4}{x} + \frac{3}{x-1} \leq \frac{x}{4} + \frac{x-1}{3}.$$

Exercice 18

Soit la fonction $f: x \mapsto f(x) = \frac{2x^3 - x^2 - 5x - 2}{3x^2 - 5x + 2}$.

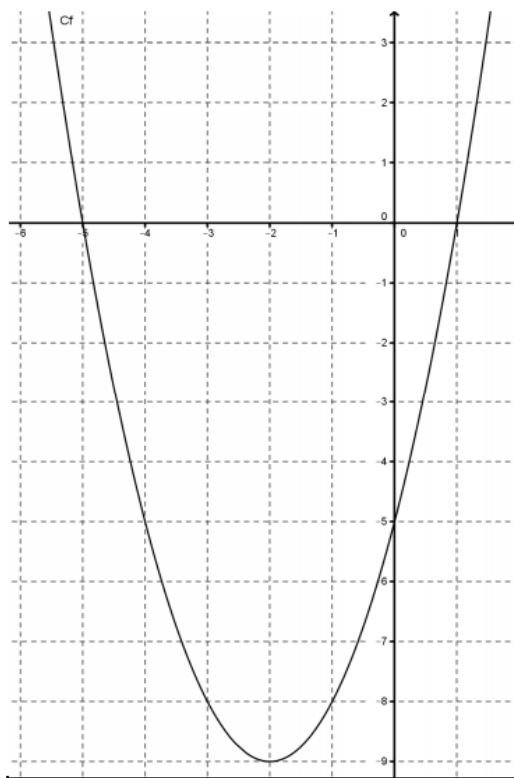
1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f ;
2. Calculer l'image du réel -1 par f ;
3. En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = 0$;
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) < 0$.

Exercice 19

La courbe C_f ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f définie par : $f(x) = x^2 + 4x - 5$.

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) .

1. Déterminer par simple lecture graphique $f(-5)$; $f(-3)$ et $f(0)$;
2. Résoudre graphiquement



- $f(x) \leq 0$;
- $f(x) = -8$;
- $x^2 + 4x - 5 > 2x - 2$.

Deuxième Partie : Equations et inéquations rationnelles

Exercice 20

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

- $\sqrt{2-x^2} - \sqrt{x^2-1} = 0$;
- $\sqrt{4-x^2} = x-1$;
- $\sqrt{x^2-9} + x = 9$;
- $\sqrt{x^2-9} = |x-9|$;
- $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = 2\sqrt{x}$;
- $\sqrt{-2x^2+3x+5} = x^2-9$

Exercice 21

Démontrer sans résoudre que l'équation (E) : $\sqrt{-2x^2+3x+5} = x^2-9$ n'admet de solutions réelles.

Exercice 22

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

- $\sqrt{2-x^2} - \sqrt{x^2-1} \geq 0$;
- $\sqrt{2(x^2-2x+2)} < \sqrt{x^2+1}$;
- $\sqrt{2x+3} > \sqrt{x-1}$;
- $\sqrt{4x+3} \geq 2x+1$;
- $\sqrt{3x^2+2x-1} < \sqrt{2x^2+x+1}$;
- $\sqrt{-2x^2+3x+5} \leq x^2-9$;
- $\sqrt{5x-4} \geq \sqrt{x}+2$;
- $0 < \sqrt{-2x^2+7x-5} < 3$.

Troisième Partie : Systèmes linéaires

Exercice 23

- Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : (S): $\begin{cases} -x+3y=2 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$
- En déduire l'ensemble des solutions des systèmes suivants :

$$(S_1): \begin{cases} -\frac{1}{x+3} + \frac{3}{2y+1} = 2 \\ \frac{3}{x+3} + \frac{2}{2y+1} = 5 \end{cases}$$

$$(S_2): \begin{cases} -(1-3x)^2 + 3(y+5)^2 = 2 \\ 3(1-3x)^2 + 2(y+5)^2 = 5 \end{cases}$$

Exercice 24

Résoudre et discuter suivant les valeurs du nombre réel m , chacun des systèmes suivants :

$$a. \begin{cases} (\sqrt{2}-1)x - my = \sqrt{2}-1 \\ x - (\sqrt{2}+1)y = m \end{cases}; \quad b. \begin{cases} mx\sqrt{2} - 3y\sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -x\sqrt{3} + 2my\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Exercice 25

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ chacun des systèmes d'équations suivants :

$$a. \begin{cases} \frac{4}{x} - \frac{5}{y} = -3 \\ \frac{2}{x} - \frac{3}{y} = 1 \end{cases}; \quad b. \begin{cases} 5(x+y) - 3(x-y) = 9\sqrt{2} \\ 3(x+y) + (x-y) = 4\sqrt{2} \end{cases};$$

$$c. \begin{cases} 2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = -1 \\ \sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 2 \end{cases}; \quad d. \begin{cases} x+y+4xy = -1 \\ 3(x+y) - xy = 10 \end{cases}.$$

Exercice 26

Le plan est muni du repère (O, I, J) .

- Représenter graphiquement l'ensemble E des points M dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient le système d'inéquations :

$$(\Sigma) : \begin{cases} x+2y \geq 6 \\ 5x+4y \leq 40 \\ x \geq 0 \\ 0 \leq y \leq 7 \end{cases}$$

2. Parmi les points de E, déterminer ceux dont les coordonnées :
 - a. Rendent maximale l'expression $x + y$;
 - b. Rendent maximale en nombre entier $x + y$.
 Préciser les valeurs de ces optimums.
3. Parmi les points de E, déterminer celui dont les coordonnées rendent minimale l'expression $2x+y$. Préciser la valeur de ce minimum.

Exercice 27

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants :

$$\begin{array}{ll} \text{a. } \begin{cases} 2x + 3y - 5z = -11 \\ 4x + y - 2z = -8 \\ x - 2y + z = -2 \end{cases} & \text{b. } \begin{cases} x - 2y + z = -5 \\ -x + y + 2z = -4 \\ 2x - y - z = -1 \end{cases} \\ \text{c. } \begin{cases} x + 2y + 3z = -2 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 3x + y + 2z = 1 \end{cases} & \text{d. } \begin{cases} x - 2y = \sqrt{2} \\ y - 2z = \sqrt{2} \\ z - 2x = \sqrt{2} \end{cases} \end{array}$$

Exercice 28

ABC est un triangle tel que $AB < CA$.

On pose : $BC = x, CA = y$ et $AB = z$. On suppose de plus que x, y et z sont solutions du système d'équations suivant :

$$(S) : \begin{cases} 2x - y^2 + z + \frac{40}{z} = -2 \\ x + y^2 - 2(z + \frac{40}{z}) = 0 \\ 4x - 2y^2 + 3(z + \frac{40}{z}) = 4 \end{cases}$$

Déterminer x, y et z ; et en déduire la nature du triangle ABC.

Exercice 29

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} x + y - 2z = -10 \\ -x + y + z = 16 \\ x - y + z = 4 \end{cases}$$

2. Un certain nombre d'oiseaux sont perchés sur trois fils. Si 10 oiseaux quittent les fils A et B pour s'envoler, alors les trois fils auront chacun le même nombre d'oiseaux. Si 8 oiseaux quittent les fils B et C pour le fil A, alors le fil A aura autant d'oiseaux que les deux autres

filles réunis. Si 2 oiseaux quittent les fils A et C pour le fil B, alors le fil B aura autant d'oiseaux que les deux fils A et C réunis.

- a. Calculer le nombre d'oiseaux perchés sur chaque fil.
- b. Quel est le nombre total d'oiseaux au départ ?

Exercice 30

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} 3x + 5y + 2z = 4430 \\ 2x + y + 2z = 1920 \\ 6x + 3y + z = 4410 \end{cases}$$

- 2.. Pour l'alimentation du bétail, un grainetier propose 3 mélanges à ses clients.

- mélange A : 30% de maïs, 50% de sorgho, 20% de son
 - mélange B : 40% de maïs, 20% de sorgho, 40% de son
 - mélange C : 60% de maïs, 30% de sorgho, 10% de son

Les pourcentages expriment des fractions de volumes, le son est en farine, le maïs et le sorgho sont des grains concassés. Sachant que 1 litre de mélange A pèse 443 grammes, 1 litre de mélange B pèse 384 grammes et 1 litre de mélange C pèse 441 grammes. Trouver combien pèse 1 litre de maïs, 1 litre de sorgho et 1 litre de son.

Exercice 31

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} \frac{x}{1,5} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3,6} \\ 14x + 2,3y - 5z = 15,2 \end{cases}$$

Exercice 32

- 1.. Daniel dit à Sabine : « j'ai deux fois l'âge que tu avais quand j'avais l'âge que tu as, et quand tu auras l'âge que j'ai, nous aurons ensemble 72 ans ».

Déterminer l'âge de Daniel et celui de Sabine.

2. Un nombre entier naturel de trois chiffres diminue de 9 quand on permute ses chiffres des unités et des dizaines, et diminue de 90 quand on permute ses chiffres de dizaines et des centaines. La somme des chiffres qui le composent est égale à 9. Quel est ce nombre ?

Exercice 33

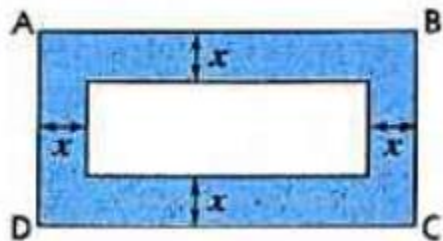
Des amis sont allés prendre un pot dans un snack, ils devraient se partager la équitablement la facture qui s'élevait à 5000 f, mais 2 d'entre eux sont partis sans payer et chacun des restants a vu sa part augmenter de 125 f,

1. Si n désigne le nombre initial d'amis, justifier n vérifier l'équation $n^2 - 2n + 80 = 0$

- Combien étaient-ils au départ ?
- Combien chacun des amis restants a-t-il eu à payer ?

Exercice 34

Un rectangle ABCD a pour dimensions : $AB = 2$ et $BC = 1$.



Déterminer la largeur x de la bande colorée pour que l'aire de cette bande soit égale à la moitié de l'aire du rectangle ABCD.

Quatrième partie : Géométrie Analytique du plan

Exercice 35

Soit (D) la droite d'équations $2x - 3y + 4 = 0$.

- Citer trois (03) vecteurs directeurs de (D) ;
- Citer trois vecteurs (03) normaux de (D) .
- Donner deux (02) représentations paramétriques de (D) au choix.

Exercice 36

1. Déterminer une équation cartésienne puis une équation paramétrique de la droite (D) passant par $A(2; 3)$ et admettant $\vec{v}(3; 2)$ pour vecteur normal.

2. Soient (D) et (D') les droites d'équations respectives $4x + 6y + 2 = 0$ et $9x - 6y + 2 = 0$.

- Ces droites sont-elles parallèles ? Perpendiculaires ? ou ni parallèles ni perpendiculaires ?
- Déterminer les deux équations normales de chacune de ces droites.

3. Déterminer une équation normale de la droite (D) passant par $A(2; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(12; -5)$.

Déterminer la distance du point $B(5; 3)$ à la droite (D) .

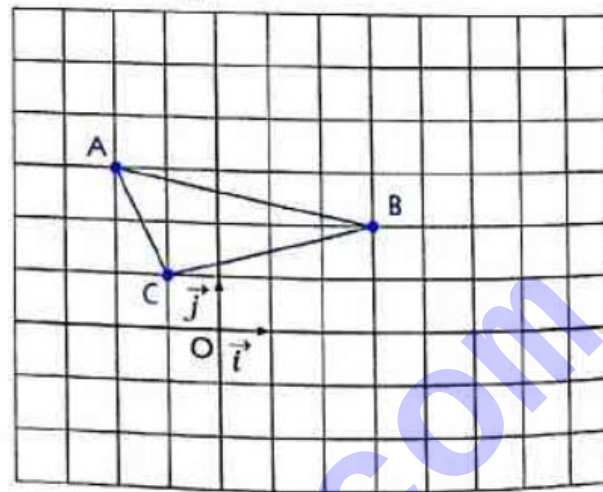
Exercice 37

Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par $A(3; -2)$ et perpendiculaire à la droite (Δ) d'équation $x - y + 3 = 0$.

En déduire deux représentations paramétriques différentes de la droite (D) .

Exercice 38

Avec les données de la figure ci-dessous, déterminer une équation de la médiatrice de $[BC]$ et de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.



Exercice 39

On donne les droites (D) et (D') d'équations respectives : $y = 3x$ et $y = -3x$.

Déterminer et construire l'ensemble des points (Γ) des points $M(x; y)$ tels que :

$$d(M, (D)) + d(M, (D')) = 4.$$

Exercice 40

1.. On donne les points $A(3; 5)$, $B(4; 1)$ et $C(-2; -1)$.

- Vérifier que A, B et C ne sont pas alignés ;
- Déterminer les coordonnées du point O centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

2.. On considère les points $A(-4; 0)$, $B(4; 0)$ et $C(0; 5)$.

Soit ρ l'abscisse d'un point M du segment $[AB]$. Exprimer en fonction de ρ les distances du point M aux droites (AC) et (BC) ;

Démontrer que la somme de ces distances est constante.

Exercice 41

1. On considère les points $A(-3; 2)$ et $B(2; -1)$.

Déterminer une représentation paramétrique du cercle de diamètre $[AB]$ et une équation de chacune des tangentes à ce cercle aux points A et B.

2. On considère le point $A(6; -1)$ et la droite (D) d'équation $x - 2y - 2 = 0$.

Déterminer une représentation paramétrique du cercle de centre A et tangent à (D).

Exercice 42

- On considère les points $A(2; 1)$ et la droite (D) d'équation $2x - y + 3 = 0$.
 - Déterminer une équation cartésienne du cercle (C) de centre A et tangent à la droite (D)
 - Calculer les coordonnées du point de contact entre (C) et (D).
- Démontrer que la droite (D) d'équation $x - y + 1 = 0$ est tangente au cercle (C) d'équation $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 3 = 0$. Calculer les coordonnées de leur point de contact.

Exercice 43

- Déterminer les valeurs du réel m telles que le cercle (C): $x^2 + y^2 + 2x - 6y - \frac{5}{2} = 0$ soit tangent à la droite $(D_m): x - y + m = 0$.
Pour chacune des valeurs obtenues, calculer les coordonnées du point de contact entre (C) et (D_m) ;

2.. m est un nombre réel. On considère la droite $(\Delta_m): x - my + \sqrt{1 + m^2} = 0$.
Démontrer que (Δ_m) est tangente à un cercle de centre $O(0; 0)$ dont on précisera le rayon.

Exercice 44

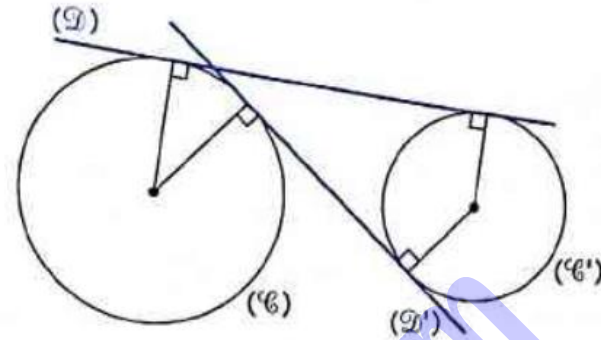
Le plan est muni d'un repère (O,I,J). Soit (C) le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{3}$,
(C') de centre $O'(0; 2)$ et de rayon 1.

- Démontrer que les deux cercles sont sécants en deux points, dont on déterminera les coordonnées.
- Démontrer qu'en ces deux points, les tangentes en (C) et (C') sont perpendiculaires.
- Déterminer une équation normale de chacune des tangentes communes à (C) et (C').

Exercice 45

Soient r, r' et d trois nombres réels strictement positifs tels que : $r + r' < d$.
On considère le cercle (C) de centre $O(0; 0)$ et de rayon r et le cercle (C') de centre $O'(d; 0)$ et de rayon r' .
On se propose de déterminer une équation cartésienne des tangentes communes extérieures et intérieures aux cercles (C) et (C').

Une droite (D), tangente à deux cercles (C) et (C'), est dite tangente « extérieure » à ces cercles si (C) et (C') sont dans le même demi plan de frontière (D) ; sinon , elle est dite tangente « intérieure ».



Dans la figure ci-dessus, (D) est une tangente extérieure à (C) et (C'), et (D') est une tangente intérieure à (C) et (C').

- Déterminer une représentation paramétrique de chacun des cercles (C) et (C').
- Soient α et β deux nombres réels. On considère le point M de (C) et le point M' de (C') tels que : $(\vec{i}, \vec{OM}) = \alpha$ et $(\vec{i}, \vec{O'M'}) = \beta$.
 - Déterminer en fonction de r, r', d, α et β , une equation de la tangente à (C) en M et une equation de la tangente à (C') en M' ;
 - Démontrer que ces deux tangentes sont confondues si et seulement si : $(\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ et $\cos \alpha = \frac{r-r'}{d}$) ou $(\hat{\alpha} = \hat{\beta} + \hat{\pi}$ et $\cos \alpha = \frac{r+r'}{d}$).
 - En déduire qu'il existe quatre tangentes communes à (C) et a (C'). Déterminer, en fonction de r, r' et d , une équation de chacune d'elles.

Application Numérique : $r = 4, r' = 1$ et $d = 6$.