LYCEE DE MADINGRING	$1^{ère}$ EVALUATION DU PREMIER TRIMESTRE	CLASSE : T^{le}D
ANNEE : 2021/2022 Samedi, 16 octobre 2021	EPREUVE DE : MATHEMATIQUES	DUREE : 4 HEURES COEF : 04

L'épreuve comporte deux parties sur deux pages. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation de la copie du candidat.

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES **[15,5pts]**

EXERCICE 1 : 06,5pts (NOMBRES COMPLEXES)

I. On considère l'équation (E) : $z^3-(3+7i)z^2-(13-15i)z+6i+18=0$ où z désigne un nombre complexe.

1. Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure notée z_0. **[0,5pt]**
2. Déterminer les racines carrées du nombre complexe $-4-6i$. **[0,75pt]**
3. Résoudre l'équation $z^2-(3+5i)z-3+9i=0$ dans $\mathbb{C}$. **[0,75pt]**
4. Montrer que l'équation (E) est équivalente à $(z-2i)(z^2-(3+5i)z-3+9i)=0$, puis déduire les solutions de (E) dans $\mathbb{C}$. **[0,5pt]**

II. Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$, on considère les points A,B et C d'affixes respectives $2i$, $2+i$ et $1+4i$.

1. Représenter dans ce repère les points A, B et C. **[0,75pt]**
2. Déterminer le module et un argument de $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$. En déduire la nature du triangle ABC. **[0,75pt]**
3. Soit D le symétrique du point B par rapport au point A. Déterminer l'affixe du point D, puis déduire la nature du triangle BCD. **[0,5pt]**

III. Soit z un nombre complexe distinct de $-i$. Soit Z un nombre complexe tel que $Z=\dfrac{z+2-i}{z+i}$.

On pose $z=x+iy$.

1. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et y. **[0,5pt]**
2. Déterminer l'ensemble $(\mathcal{C})$ des points $M(z)$ tel que Z soit réel. **[0,5pt]**
3. Déterminer l'ensemble (Γ) des points $M(z)$ tel que Z soit imaginaire pur. **[0,5pt]**
4. Déterminer l'ensemble (Δ) des points $M(z)$ tel que $|Z|=1$. **[0,5pt]**

EXERCICE 2 : 05pts

Soit la fonction f définie sur $D=\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$ par : $f(x)=\dfrac{2x^3+3}{x^2-1}$. On nomme $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (unité graphique : 1cm). Le but de l'exercice est d'étudier cette fonction.

I. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3-3x-3$

1. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation **[0,75pt]**
2. En déduire que l'équation $g(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution que l'on note α et telle que $2,10<\alpha<2,11$ **[0,5pt]**
3. Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$ **[0,5pt]**
4. Démontrer que $f(\alpha)=3\alpha$ **[0,5pt]**

II.

1. Etudier les limites de f aux bornes de son domaine de définition et donner une interprétation graphique des résultats obtenus. **[0,75pt]**

2.a. Calculer f' et en déduire à l'aide de la partie I le signe de f' **[0,5pt]**

b.Dresser le tableau de variation de la fonction f **[0,5pt]**

3. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ et ses asymptotes **[1pt]**

EXERCICE 3 : 04pts

1. On considère la fonction h définie sur l'intervalle $I=]1;+\infty[$ par $h(x)=\dfrac{x+1}{x^3-1}$.

a. Montrer que h est une bijection de I vers un intervalle J à déterminer. **[0,75pt]**

b. Dresser le tableau de variation de h^{-1}, représenter h puis h^{-1}. **[0,75pt]**

2. Donner l'écriture algébrique des nombres complexes suivants : $a)$ $(1+i\sqrt{3})^{10}$ et $b)$ $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^{20}$ **[1pt]**

3. Montrer que $P = \left(\dfrac{\sqrt[3]{1024} \times \sqrt{64} \times \sqrt[5]{7776}}{\sqrt{18} \times \sqrt{\sqrt[3]{256}}}\right)^{\frac{1}{4}}$ est un entier. **[0,5pt]**

4. On considère la fonction K définie Sur $[-1; +\infty[$ par : $K(x) = \sqrt{1+x}$

   a. Donner un encadrement de $K^{'}(x)$ $\forall x \in [0; \frac{1}{2}]$ **[0,5pt]**

   b. Démontrer que pour tout $x \in [0; \frac{1}{2}]$, on a : $1 + \frac{\sqrt{6}}{6}x \leq K(x) \leq 1 + \frac{1}{2}x$. **[0,5pt]**

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES **[04,5pts]**

Situation :

Raoul possède trois terrains dont il veut absolument clôturer car il lui est rapporté que des personnes mal intentionnés utilisent ces espaces non occupés à des mauvaises fins. Raoul décide donc d'utiliser le fil barbelé vendu à 10500 $FCFA$ le rouleau de $0,05hm$.

– Le premier terrain a la forme d'un rectangle dont les dimensions sont les parties réelle et imaginaire de la solution de l'équation : $(1+4i)z + (3-4i)\overline{z} = 4 - 8i$, $z = x + iy$.

– le deuxième quant à lui est formé de tous les points $M(x; y)$ du plan vérifiant $|z-3-i| = 3$, $z = x+iy$.

– Le troisième terrain est formé de tous les points $M(x; y)$ du plan solution de l'équation $Re(Z^{'}) = 0$ où $Z^{'} = \dfrac{z-4-6i}{z-2i}$, $z = x + iy$.

Tâche 1 : Déterminer le montant à dépenser par Raoul pour l'achat du fil barbelé devant permettre de clôturer le premier terrain **[1,5pt]**

Tâche 2 : Déterminer le montant à dépenser par Raoul pour l'achat du fil barbelé devant permettre de clôturer le deuxième terrain **[1,5pt]**

Tâche 3 : Déterminer le montant à dépenser par Raoul pour l'achat du fil barbelé devant permettre de clôturer le troisième terrain **[1,5pt]**

EXAMINATEUR : M. KALDAOUSSA MATTHIEU (PLEG-MATHS)