LYCEE D'AKWA-NORD
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
ANNEE SCOLAIRE : 2021- 2022
Examinateur : Dr. NGUIMBOUS

DEVOIR SURVEILLE N°1
CLASSE : T^{le}D
DUREE : 04 HEURES
COEFF : 04

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte deux parties obligatoires reparties sur deux pages ; le raisonnement et la lisibilité seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat

A- EVALUATION DES RESSOURCES 15 Points

EXERCICE 1 05,75 points

A- On donne les nombres complexes $z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 - i$.

1. Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2. **(1pt)**
2. Ecrire sous forme algébrique et trigonométrique $\frac{z_1}{z_2}$ **(1pt)**
3. En déduire les valeurs de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$. **(1pt)**

B- On considère l'équation $(E): z^3 + (4 - 5i)z^2 + (8 - 20i)z - 40i = 0$

1. Démontrer que (E) admet une solution imaginaire pure $z_0 = ib$. **(0,75pt)**
2. Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$. **(1pt)**
3. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. **(1pt)**

EXERCICE 2 08,75 points

A- Le plan complexe P est rapporté à un repère orthogonal $(o, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 - 8 = 0$ **(1pt)**
2. On considère dans le plan complexe P les points A, B et C d'affixes respectives

   $\boldsymbol{z_A = -1 + i\sqrt{3}}$; $\boldsymbol{z_B = 2}$; $\boldsymbol{z_C = -1 - i\sqrt{3}}$

   a) Ecrire z_A et z_C sous la forme trigonométrique **(1pt)**
   b) Placer les points A, B et C dans le repère (**unité sur les axes 1cm**) **(0,75pt)**
   c) Déterminer la nature du triangle ABC. **(0,75pt)**
3. On considère l'application f du plan dans lui-meme qui à tout point M(z) associe le point M'(z') telle que $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} z$.

   a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f. **(0,75pt)**
   b) Déterminer les images des points A et C par f. **(0,5pt)**
   c) En déduire l'image de la droite (AC) par f. **(0,75pt)**

B- Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthogonal $(o, \vec{u}, \vec{v})$, On considère la transformation g de P dans P qui à tout point M d'affixe $z = x + iy$ associe le point M' d'affixe

$$z' = x' + iy' \text{ tel que } \begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 2y + \sqrt{3} \end{cases}$$

1. **a)** Déterminer l'écriture complexe de g. **(0,75pt)**

   b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g. **(0,75pt)**

2. **2.** Soit la transformation r qui à tout point M d'affixe z associe le point M_1 d'affixe $\boldsymbol{z_1} = (\frac{1}{2} - \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2})$z.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $\boldsymbol{r}$. **(0,75pt)**

3. Soit la transformation $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{rog}$ qui au point M(x ;y) d'affixe z associe le point M_2 d'affixe z_2.

a) Exprimer z_2 en fonction de z. **(0,75pt)**

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S. **(1pt)**

EVALUATION DES COMPETENCES **4.5 Points**

Mr MORO décide d'acheter du fil barbelé pour clôturer ses trois terrains. Le rouleau de 5m de fil barbelé est vendu à 3500 F. Le premier terrain est formé de l'ensemble de tous les points $M(x, y)$ du plan complexe vérifiant $|\boldsymbol{1} + \boldsymbol{iz}| = \boldsymbol{2}$. Le second terrain quant à lui est de forme rectangulaire et dont les dimensions sont la partie réelle et la partie imaginaire des solutions de l'équation $(\boldsymbol{1} + \boldsymbol{4i})\boldsymbol{z} + (\boldsymbol{5} - \boldsymbol{4i})\bar{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{4} - \boldsymbol{8i}$ où $\bar{z}$ est le conjugué de z. Le troisième terrain est formé de l'ensemble des points M d'affixe z du plan complexe tel que $\boldsymbol{Re}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{0}$ avec $\boldsymbol{Z} = \frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{z+2i}}$

NB Les distances de tous ces terrains sont exprimées en décamètres

1. Quel est le montant à dépenser par Mr MORO pour l'achat du fil barbelé permettant de clôturer entièrement le premier terrain ? **1,5pt**
2. Quel est le montant à dépenser par Mr MORO pour l'achat du fil barbelé permettant de clôturer entièrement le deuxième terrain ? **1,5pt**
3. Quel est le montant à dépenser par Mr MORO pour l'achat du fil barbelé permettant de clôturer entièrement le troisième terrain ? **1,5pt**

Présentation : 1 pt