



TRAVAUX DIRIGES N°3

EXERCICE 1

Simplifier chacune des expressions ci-dessous :

$$A = \cos\left(\frac{19\pi}{2} + x\right) - \sin\left(-\frac{21\pi}{2} - x\right) + \sin(53\pi - x) - \cos\left(x - \frac{101\pi}{2}\right)$$

$$B = \cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right); \quad C = \frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}$$

$$D = \cos \frac{\pi}{18} \cos \frac{\pi}{9} - \sin \frac{\pi}{18} \sin \frac{\pi}{9}; \quad E = \cos \frac{\pi}{10} + \cos \frac{9\pi}{10} + \cos \frac{3\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5}$$

EXERCICE 2

1. En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, donner les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et de $\sin \frac{\pi}{12}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\sqrt{2 - \sqrt{3}} \cos x + \sqrt{2 + \sqrt{3}} \sin x = -\sqrt{2}$.
3. Représenter les points images des solutions de (E) sur le cercle trigonométrique.
4. Déduire sur l'intervalle $]-\pi; \pi]$ l'ensemble solution de l'inéquation (I) :

$$\sqrt{2 - \sqrt{3}} \cos x + \sqrt{2 + \sqrt{3}} \sin x + \sqrt{2} < 0.$$

EXERCICE 3

1. Montrer que $\left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}\right)^2 = 2 - \sqrt{3}$.
2. Soit θ un réel de $\left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$ tel que $\sin \theta = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

a) Démontrer que $\cos \theta = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$.

b) Calculer $\cos 2\theta$ et en déduire la valeur exacte de θ .

3. On considère sur $]-\pi; \pi]$ l'équation (E) : $(\sqrt{2} + \sqrt{6}) \cos 2x + (\sqrt{2} - \sqrt{6}) \sin 2x = -2$.

a) Déterminer deux réels r et φ tels que

$$(\sqrt{2} + \sqrt{6}) \cos 2x + (\sqrt{2} - \sqrt{6}) \sin 2x = r \sin(2x + \varphi).$$

b) Résoudre l'équation (E).

c) Déduire sur $]-\pi; \pi]$ l'ensemble solution de l'inéquation (I) :

$$(\sqrt{2} + \sqrt{6}) \cos 2x + (\sqrt{2} - \sqrt{6}) \sin 2x < 0.$$

EXERCICE 4

Soit α un réel de $]0; \frac{\pi}{2}[$. On considère l'équation $(E_\alpha): 2x^2 - 2x\sqrt{2}(\cos \alpha) + \cos 2\alpha = 0$.

1. Montrer que le discriminant de cette équation est $\Delta = 8 \sin^2 \alpha$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_α) .
3. Mettre les expressions $\cos \alpha + \sin \alpha$ et $\cos \alpha - \sin \alpha$ sous la forme $r \cos(x + \theta)$ où r et θ sont des réels à déterminer.
4. Déterminer les valeurs possibles de α pour que $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$ soient solutions de (E_α) .

EXERCICE 5

1. a et b sont des réels de $]0; \frac{\pi}{2}[$ tels que $\sin a = \frac{1}{2}$ et $\sin b = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.
 - a) Calculer $\cos a$, puis montrer que $\cos b = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.
 - b) Calculer $\cos(a + b)$ et $\sin(a + b)$. En déduire les valeurs exactes de $a + b$ et b .
2. a) Démontrer que pour tout nombre réel x , on a : $8 \sin x \cos x \cos 2x \cos 4x = \sin 8x$.
 - b) Montrer que $\sin \frac{8\pi}{7} = -\sin \frac{\pi}{7}$.
 - c) Déduire que $\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{8}$.

EXERCICE 6

1. Soit (E) l'équation $4x^2 + 2(\sqrt{2} - 5)x - 5\sqrt{2} = 0$.
 - a) Montrer que (E) admet deux solutions de signes contraires
 - b) Montrer que $\frac{5}{2}$ est une solution de (E) , puis déduire sans résolution l'autre solution.
2. On considère sur $]-\pi; \pi]$ l'équation $(E'): 2 \cos 4x + 2(\sqrt{2} - 5) \cos 2x + 2 - 5\sqrt{2} = 0$.
 - a) En posant $X = \cos 2x$, montrer que (E) et (E') sont équivalentes.
 - b) Résoudre (E') , puis placer ses solutions sur le cercle trigonométrique.

EXERCICE 7

1. Montrer que $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ et $\cos \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$.
2. On se propose de résoudre l'équation $(E): \sin 2x = \cos x + \sin x - \frac{1}{2}$.

3. Montrer que (E) est équivalente à (E') : $2 \cos^2 X - \sqrt{2} \cos X - \frac{1}{2} = 0$ avec $X = x - \frac{\pi}{4}$.

4. Résoudre (E') dans $\mathbb{R}$, puis déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de (E) .

EXERCICE 8

On considère l'équation (E) : $\sin 3x = -\sin 2x$

1. Résoudre (E) sur $[-\pi; \pi]$ et placer ses solutions sur le cercle trigonométrique.

2. Démontrer que $\sin 3x = \sin x (4 \cos^2 x - 1)$.

3. En déduire que (E) est équivalente à (E') : $\sin x (4 \cos^2 x + 2 \cos x - 1) = 0$.

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $4t^2 + 2t - 1 = 0$.

5. En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{2\pi}{5}$ et de $\cos \frac{4\pi}{5}$.

EXERCICE 9

1. Soit P le polynôme défini par $P(x) = 4x^3 - 2x^2 - 3x + 1$.

Montrer que $P(x)$ est divisible par $x - 1$, puis résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

2. On considère l'équation (E) : $\cos 2x = \sin 3x$.

a) Exprimer $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$.

b) Montrer que $\frac{\pi}{10}$ est solution de l'équation (E) .

c) Déduire de ce qui précède que $\sin \frac{\pi}{10}$ est solution de l'équation $4t^2 + 2t - 1 = 0$.

d) Déduire la valeur exacte de $\sin \frac{\pi}{10}$.

3. Soit x un réel non nul et différent de $\frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

a) Montrer que : $\frac{\sin 5x}{\sin x} - \frac{\cos 5x}{\cos x} = 4 \cos 2x$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\frac{\sin 5x}{\sin x} - \frac{\cos 5x}{\cos x} = \sqrt{5} - 1$.

EXERCICE 10

1. On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $3 \cos^2 2x - \sin^2 2x + 1 = 0$.

a) Montrer que (E) est équivalente à l'équation $\cos 4x + 1 = 0$.

b) Résoudre (E) sur $[0; \pi]$, et placer les solutions sur un cercle trigonométrique.

c) Déduire sur $[0; \pi]$ les solutions de l'inéquation $3 \cos^2 2x - \sin^2 2x \geq -1$.

2. Soit α un réel de $[0; \pi]$. ABC est un triangle rectangle et isocèle en A tel que

$BC = 4a\sqrt{2}$; $a \in \mathbb{R}_+^*$. On nomme G_α le barycentre des points pondérés $(A, 3 \cos^2 2x)$; $(B, -\sin^2 2x)$ et $(C, 1)$.

a) Déterminer l'ensemble des valeurs de α pour lesquelles G_α n'existe pas.

b) On suppose dans la suite que $\alpha = \frac{\pi}{6}$ et on note G le barycentre pour cette valeur de α .

✓ Construire le point G , puis calculer GA^2 , GB^2 et GC^2 .

✓ On nomme (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que :

$$3MA^2 + 3\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = k \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

- Discuter suivant les valeurs de k , la nature de (Γ) .
- Déterminer k pour que $A \in (\Gamma)$, puis construire (Γ) .

EXERCICE 11

1. Démontrer que $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$.

2. Dédurre les valeurs exactes de $\sin \frac{\pi}{8}$, $\cos \frac{3\pi}{8}$ et de $\sin \frac{3\pi}{8}$.

3. Développer $(1 - \sqrt{2})^2$, puis déduire $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$. Dédurre la valeur exacte de $\tan \frac{\pi}{8}$.

4. Soit (E) l'équation : $4x^2 + 2(3 + \sqrt{3})x + 3\sqrt{3} = 0$.

a) Montrer que (E) admet deux solutions toutes négatives.

b) Vérifier que $-\frac{3}{2}$ est une solution de (E) , puis déduire sans résolution l'autre solution.

5. On considère sur $[-\pi; \pi]$ l'équation (E') :

$$[\cos x - (\sqrt{2} - 1) \sin x][2 \cos 2x + 2(3 + \sqrt{3}) \cos x + 2 + 3\sqrt{3}] = 0.$$

a) Résoudre (E') et placer ses solutions sur un cercle trigonométrique.

b) Dédurre sur $[-\pi; \pi]$ les solutions de l'inéquation (I) :

$$[\cos x - (\sqrt{2} - 1) \sin x][2 \cos 2x + 2(3 + \sqrt{3}) \cos x + 2 + 3\sqrt{3}] > 0.$$

EXERCICE 12

Soit x un nombre réel.

On pose $A = \cos^4 x + \cos^4 \left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos^4 \left(x + \frac{2\pi}{4}\right) + \cos^4 \left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$.

1. Montrer que : $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$.

2. Déduire que : $\cos^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^4\left(x + \frac{2\pi}{4}\right) = 1 - \frac{1}{2}\cos^2 2x$.

3. Montrer que $A = \frac{3}{2}$.

4. Soit l'équation (E) : $A = \frac{3}{2}(\cos 2x + \sin 2x)$

a) Montrer que (E) est équivalente à l'équation $\sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$.

b) Résoudre (E) et placer ses solutions sur un cercle trigonométrique.

EXERCICE 13

1. Montrer que $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

2. On considère l'équation (E): $4\sin^2 x + 2(\sqrt{2} - \sqrt{3})\sin x - \sqrt{6} = 0$.

a) Résoudre (E) dans $\mathbb{R}$, puis dans $[0; 2\pi]$.

b) Placer les points du cercle trigonométrique, images des solutions de l'équation (E). (**Unité : 3cm**)

c) Quelle est la nature du polygone obtenu ?

d) Calculer les valeurs exactes du périmètre et de l'aire de ce polygone.

EXERCICE 14

Soit α un réel de l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$.

1. Calculer $\sin \alpha$.

2. Déterminer $\cos 2\alpha$ et en déduire la valeur exacte de α .

3. a) Vérifier que $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^2 + (1 - \sqrt{2})x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$.

c) Déduire la résolution dans $]-\pi; \pi]$ de l'équation (E) :

$$2\cos^2 x + (1 - \sqrt{2})\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

EXERCICE 15

1. Soit (E) l'équation : $\cos 3x - \cos 2x = 0$.

a) Résoudre (E) dans $\mathbb{R}$.

b) On pose $\cos x = y$. Former une équation en y vérifiant (E).

Vérifier que 1 est solution de cette équation, puis déduire les autres solutions de cette équation.

c) Utiliser les résultats précédents pour donner les valeurs exactes de

$$\cos \frac{2\pi}{5}, \cos \frac{4\pi}{5}, \text{ puis déduire les valeurs de } \cos \frac{\pi}{5} \text{ et de } \cos \frac{3\pi}{5}$$

d) Résoudre dans $[0; \pi]$ l'équation $4 \cos 2x + 1 - \sqrt{5} = 0$.

2. Soit ABC un triangle isocèle de sommet principal A tel que $BC = a$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ et

$$\text{mes}(\widehat{BA, BC}) = \frac{2\pi}{5}. \text{ La bissectrice de l'angle } \widehat{ABC} \text{ coupe le côté } [AC] \text{ en } D.$$

a) Faire une figure.

b) Démontrer que $AD = BD = a$.

c) Démontrer que $AB = 2a \cos \frac{\pi}{5}$ et $CD = 2a \cos \frac{2\pi}{5}$. En déduire que $\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}$.

d) On nomme H le projeté orthogonal de A sur (BC) .

Calculer BH en fonction de a de deux manières différentes et déduire que

$$\cos \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}.$$

e) En remarquant que $(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy$, calculer $\cos \frac{\pi}{5}$ et $\cos \frac{2\pi}{5}$. Déduire $\sin \frac{\pi}{5}$.

EXERCICE 16

1. Calculer $(1 + \sqrt{3})^2$

2. Résoudre sur $]-\pi; \pi]$ l'équation $4(\cos^2 x - 1) - 2(\sqrt{3} - 1) \sin x + \sqrt{3} = 0$.

3. Calculer $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$ sachant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$

4. Montrer que $\sin x + \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x$

5. Résoudre sur $]-\pi; \pi]^2$ le système d'équations suivant :
$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{6} \\ \sin x + \cos y = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \end{cases}$$

EXERCICE 17

1. Exprimer $\cos 2\alpha$ en fonction de $\cos \alpha$, puis en fonction de $\sin \alpha$.

2. En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{8}$ et de $\sin \frac{\pi}{8}$.

3. En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{8}$ et de $\sin \frac{5\pi}{8}$.

4. Déterminer la valeur exacte du nombre réel $A = \cos \frac{9\pi}{8} + \cos \frac{7\pi}{8} + 2 \cos \frac{5\pi}{8}$