GROUPE LE SAVOIR					
	TD	Série :	C & D	Session :	OCT-2021
Sujet de :	math	Durée :	1 semaine	Coefficient :	

Superviseur General: M. TSAPI LEONARD   Contact: 674-49-78-33 / 695-91-87-77

EXERCICE 1 / ACTIVITE D'INTEGRATION (TC uniquement)

On veut entourer avec un minimum d'arbres un champ rectangulaire ayant pour dimensions 525m et 285m. Les arbres seront régulièrement espacés ; de plus, il y aura un arbre à chaque sommet du rectangle. Calculer le nombre d'arbres nécessaires pour entourer le champ.

EXERCICE 2/ (TC uniquement)

n désigne un entier relatif différent de 1 et a = $\frac{n+5}{n-1}$

1-a) Démontrer que a est entier si et seulement si n-1 divise 6.
b) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles a est un entier relatif.
2-On se propose de déterminer les valeurs de n pour lesquels a = $(\frac{p}{q})^2$ *où* p et q sont premiers entre eux.

a-Démontrer que s'il en est ainsi, alors n = 1 + $\frac{6q^2}{p^2-q^2}$.
b- Démontrer que p^2 - q^2 et q^2 sont premiers entre eux.
c-Déterminer les couples (p, q) d'entiers relatifs non nuls premiers entre eux tels que p^2 - q^2 divise 6.
d- Déterminer les valeurs de n telles que a soit le carré d'une fraction irréductible.

EXERCICE 3 / ACTIVITE D'INTEGRATION

Le chercheur Lafitte aimerait connaître la population d'une ville appelée Milena dont la densité est estimée à 2 habitants/ m^2 . Pour ce faire il repère les coordonnées des quatre points extrêmes de cette localité ayant pour affixes suivants (en km) z_A = 100 + 100i ; z_B = 100 + 400i ; z_C = 600 + 400i ; z_D = 600 + 100i. Aider le à déterminer la population de cette ville.

EXERCICE 4 / ACTIVITE D'INTEGRATION (TC uniquement).

La cryptographie a pour but de garantir la confidentialité d'un message, d'une information de façon générale des données. Mr Lafitte ayant suivi des cours introductifs de cette science durant quelques années passées à l'université a décidé de l'exploiter pour préciser les informations sur son domaine qu'il possède dans une campagne de la ville de Yaoundé. A partir de la géométrie de son domaine, il a conçu une famille de fonctions f_n parmi lesquelles son domaine est délimité par deux courbes et définies par
$f_n(x) = (1-x)e^{nx}$ *où* l'entier naturel n est le reste de la division euclidienne de 5^n par 3.

Aider Mr Lafitte à déterminer ces deux fonctions.

EXERCICE 5

I)) Soit x un entier naturel non nul. Démontrer par récurrence pour tout n ϵ N,
$(1+x)^{n+1}$ - x (n + 1) – 1 est divisible par x^2 .

II) Démontrer par récurrence, ∀ n ϵ **N,** $2^{\boldsymbol{n+2}}$ + $3^{\boldsymbol{2n+1}}$ est multiple de 7.

III) - Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation : $\begin{cases} PPCM\ (x\ ,\ y) = 504 \\ x + y\ =\ 135 \end{cases}$ (**TC uniquement).**

IV) Résoudre dans **N**× **N** le système suivant : $\begin{cases} a^2 -\ b^2 = 1445 \\ PGCD(a, b) = 17 \end{cases}$ (**TC uniquement).**

EXERCICE 6

On considère la fonction P de la variable complexe définie par :
P(z) = z^3 – (3 + 2i)z^2 + (3 + 3i)z – 4i .
1- Démontrer que l'équation P(z) = 0 admet une solution imaginaire pure z_0.
2- Déterminer les nombres complexes a et b tels que pour tout nombre complexe z,
P(z) = (z – i)(z^2 + az + b).
3- Résoudre dans **C** l'équation P(z) = 0.

EXERCICE 7

On pose : A = 1 + cos x + cos 2x + ……. + cos (n – 1)x et B = sin x + sin 2x + ……. + sin (n – 1)x .
1- Calculer A + i B .
2- En déduire les expressions de A et B.

EXERCICE 8

On considère le polynôme complexe T défini pour tout nombre complexe z par
T(z) = z^3 – (2 + 2i)z^2 + 3iz + 1 – i. On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$) les points Ω, A et B d'affixes respectives 1 ; 1 + i et i. Soit S la transformation plane d'écriture complexe z' = (1 + i)z – i.
1- Démontrer que 1 est une racine de T.
2- Déterminer alors les nombres complexes a et b tels que T(z) = (z – 1)(z^2 + az + b).
3- En déduire les racines de T.
4- Déterminer l'ensemble (L) des points M(z) tels que $|z-1-i|$ = $|z-i|$.
5- Déterminer l'image par S du point A.
6- Donner l'écriture complexe de la similitude directe plane de centre B qui transforme Ω en A.
7- Démontrer que S est une similitude directe de centre Ω, d'angle et de rapport à déterminer.
8- En déduire les éléments caractéristiques de S^{-1} la similitude réciproque de S.
9- Déterminer l'affixe du point C antécédent par S du point O.
10- En déduire l'ensemble des points M(z) tels que $|(1+i)z-i|$ = $2\sqrt{2}$.
11- Soient M(z) distinct de Ω et M'(z') l'image du point M par S. Montrer que
z' – z = i(z – 1), puis prouver que le triangle ΩMM' est rectangle isocèle en M .

EXERCICE 9 (TC uniquement)

Les suites d'entiers naturels (X_n) et (Y_n) sont définies sur **N** par X_0 = 3 et X_{n+1} = 2 X_n -1 .
Y_0 = 1 et Y_{n+1} = 2 Y_n + 3

1 – Démontrer par récurrence que quelque soit n ϵ **N** , $X_n = 2^{n+1} + 1$.
2 – a) Calculer PGCD (X_8 ; X_9) et PGCD (X_{2002} ; X_{2003}) . Que peut – on en déduire pour X_8 et X_9 d'une part , pour X_{2002} et X_{2003} d'autre part .
b) X_{n+1} et X_n sont – ils premiers entre eux pour tout entier n ?
3 – a) Démontrer que pour tout n ϵ **N**, $2X_n - Y_n = 5$
b) Exprimer Y_n en fonction de n .
c) En utilisant les congruences modulo 5, étudier suivant les valeurs de l'entier naturel P, le reste de la division euclidienne de 2^P par 5 .

EXERCICE 10

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$). (Unité :1cm).
1 – On veut résoudre dans C, l'équation (P) : $Z^3 + 4Z^2 + 2Z - 28 = 0$.
a) Déterminer deux réels a et b dans C tels que l'équation (P) s'écrive :
$(Z - 2)(Z^2 + aZ + b) = 0$.
b) Résoudre alors (P).
2- On note (H) l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z tels que
$z^2 - 4 = 4 - \overline{z}^2$.
a) On suppose que z = x + iy. Montrer que M ϵ (H) si et seulement si $x^2 - y^2 = 4$
b) Soient A, B et C les points d'affixes respectives : 2 ; $-3-i\sqrt{5}$ et $-3+i\sqrt{5}$. Vérifier que A, B et C appartiennent à (H).
3- Soit r la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.
a) Déterminer les affixes des images respectives A' ; B' et C' des points A ; B et C par la rotation r **(on donnera les résultats sous forme algébrique).**
b) On note M' l'image par r du point M d'affixe z. On note z' l'affixe de M'. On pose z = x + iy , z' = x' + iy' et (H') l'ensemble des points du plan dont l'antécédent par r est un point de (H). i) Exprimer x et y en fonction de x' et y'. ii) En utilisant la question 2a) , prouver que M'ϵ (H') si et seulement si x'y' = -2 .

EXERCICE 11 (TC uniquement)

L'entier naturel S désigne la somme des diviseurs positifs de P^4 où P est un nombre premier plus grand que 2 .
1 – Exprimer S en fonction de P .
2 – Démontrer que $(2P^2 + 2)^2 < 4S < (2P^2 + P + 2)^2$
3 – On suppose que S est un carré parfait et on pose S = n^2 où n est un entier naturel. a) Etablir l'existence et l'unicité de n lorsque P est fixé. (**on pourra utiliser la question 2)**
b – Exprimer n en fonction de P .
c – Etablir que P vérifie la relation $3 + 2P - P^2 = 0$
d – Déduire de c) , P puis n.

EXERCICE 12

1-a) Calculer $(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})^2$.
b) En déduire dans **C** les solutions de l'équation $Z^2 - i = 0$.
2- On pose P(Z) = $Z^3 + Z^2 - iZ - i$ où Z est un nombre complexe.
a) Démontrer que l'équation P(Z) = 0 admet une solution réelle α que l'on déterminera.

b) Résoudre dans **C** l'équation P(Z) = 0.

3- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O , \vec{u}, \vec{v})$ (*unité graphique 2cm*).

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $Z_A = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$; $Z_B = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$ et $Z_C = i$.

a) Déterminer la forme exponentielle de Z_A et Z_B .

b) Placer avec précision les points A, B et C dans le plan complexe.

4- Soit D le symétrique de A par rapport à l'axe des réels.

a) Donner l'affixe Z_D du point D sous forme algébrique.

b) Calculer le rapport $\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C}$ et en déduire la nature du triangle ABC.

5- Soit E le point d'affixe $Z_E = \frac{\sqrt{2}}{2}i$ et F son symétrique par rapport à O ; on considère la similitude directe S qui transforme E en A et F en B.

a) Déterminer l'écriture complexe de S et ses éléments caractéristiques.

b) Soit (C) un cercle de centre E et de rayon 1 ; (L) la droite d'équation définie par (L) : $x - 2y + 1 = 0$; déterminer les images (C') et (L') respectives de (C) et (D) par S.