



La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation de la copie de l'élève.

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES /15,5 points

Exercice 1 : 02.75points

I- Démontrer par récurrence que :

1. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $3^{n+4} < (n + 4)!$ 0.75pt
2. Pour entier naturel non nul n , $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$. 0.75pt
3. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$, a et b réels. 0.75pt

II- En utilisant les congruences, montrer que pour tout entier naturel n , $16^{2n+1} - 3^{n+3}$ est divisible par 11. 0.5pt

Exercice 2 : 04.25 points

1. Tout nombre entier naturel x s'écrit $x = \overline{a_p a_{p-1} \dots a_1 a_0}$ en base 10.
Démontrer que $x \equiv a_0 [10]$, puis déterminer le chiffre des unités du nombre $(3548)^9 \times (2537)^{31}$. 1pt
2. Calculer x et y pour que le nombre qui s'écrit $\overline{2xyy}$ en base 10 soit divisible par 5 et par 11. 0.5pt
3. a) Résoudre dans \mathbb{N} l'équation $x^3(x^2 + (x + 1)^2) = 18360$. 0.75pt
b) Détermine alors b tel que $\overline{442003^b} = \overline{36723^{10}}$. 0.25pt
4. a) Déterminer les restes de la division euclidienne par 8 des puissances de 3. 0.5pt
b) pour tout $P \in \mathbb{N}$, on pose $A_P = 3^P + 3^{2P} + 3^{3P} + 3^{4P}$. Déterminer l'ensemble des entiers p tels que A_p soit divisible par 8. 0.75pt
c) On considère les nombres a et b écrits dans le système de base 3.
 $a = \overline{11110}$ et $b = \overline{101010100}$.
Les nombres a et b sont-ils divisibles par 8 ? 0.5pt

Exercice 3 : 03.75 points

1. Démontrer que si x et y sont premiers entre eux, alors $x + 2y$ et $3x + 5y$ sont premiers entre eux. 0.25pt
2. Soit n un entier naturel. On considère les nombres p et q définis par : $p = n^2 + 3$ et $q = n + 2$.
a) Démontrer que $\text{PGCD}(p ; q) = \text{PGCD}(n+2 ; 7)$. 0.25pt
b) Déterminer suivant les valeurs de n , le $\text{PGCD}(p ; q)$. 0.75pt
c) Déterminer n pour que $\frac{p}{q}$ soit un entier naturel. 0.5pt
3. a) Démontrer à l'aide de la propriété de Gauss que si a et b divisent c , avec a et b premiers entre eux, alors ab divise c . 0.5pt
b) Application : déterminer les entiers n tel que $n^2 + n$ divise $2n + 6$. 0.75pt
4. Déterminer tous les couples d'entiers naturels $(x; y)$ tels que : $\begin{cases} \text{pgcd}(x; y) = 15 \\ \text{ppcm}(x; y) = 90 \end{cases}$. 0.75pt

Exercice 4 : 05 points

- I- z est un nombre complexe de module 1 et d'argument θ . Calculer en fonction de θ , le module et l'argument du nombre complexe $U = 1 + z + z^2$. **1pt**
- II- soit z un nombre complexe et l'équation (E) : $z^4 + 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1 = 0$
- démontrer que si z_0 est une solution de (E), alors \bar{z}_0 l'est aussi. **0.25pt**
 - a) déterminer les a et b tels que $(E) \Leftrightarrow z^2 \left[\left(z - \frac{1}{z} \right)^2 + a \left(z - \frac{1}{z} \right) + b \right] = 0$. **0.5pt**
 b) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $Z^2 + aZ + b = 0$, puis résoudre (E). **1,25pt**
 - Montrer que les points images des solutions de (E) sont cocycliques. **0.5pt**
- III- On considère le nombre complexe $Z = -\sqrt{4 - 2\sqrt{2}} - i\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$.
- Calculer Z^2 , puis le module et un argument de Z^2 . **0.5pt**
 - En déduire le module et un argument de Z . **0.75pt**
 - Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{11\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{8}\right)$. **0.5pt**

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES /04,5 points

Un entrepreneur veut expédier un grand conteneur parallélépipédique rectangle dont l'espace dédié aux marchandises à n mètre de hauteur, $2n+1$ mètre de largeur et $7n+1$ mètre de longueur. Il souhaite empiler sans laisser d'espace dans ce conteneur, des cubes, face contre face. L'entrepreneur souhaite que n soit un entier naturel pour des raisons techniques. De plus, le nombre de cube doit être un entier naturel. L'ingénieur TIOSSOCK prétend que le volume d'un cube peut être égal à $3m^3$.

Cet entrepreneur désire approvisionner son échoppe en riz, sucre et farine contenus dans certains cubes empilés dans le conteneur. Le prix du sac de riz est de 6000 FCFA, le prix du carton de sucre est de 9000 FCFA. Le sac de farine coûte 3000 FCFA plus cher que le sac de riz. Compte tenu du stock qu'il possède, l'entrepreneur souhaite prendre deux fois plus de farine que de riz.

A l'aide d'un drone, il a supervisé une zone à Douala IV^e où sera stocké son conteneur. Ce drone se déplace à 10m par seconde et fournit un repérage en modèle complexe à l'échelle kilométrique (unité graphique :1km) des points de la zone. Le drone a survolé la zone indiquée en marquant tous les points de la zone qui vérifient l'ensemble des points d'affixe z tels que $\text{Arg}\left(\frac{z + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}}{1+z}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$.

Taches :

- Tache 1 :** Etudier la véracité des propos de l'ingénieur TIOSSOCK. **1.5pt**
- Tache 2 :** Quelle quantité de trois marchandises pourra-il acheter sachant qu'il ne dispose que d'une somme de 120 000 FCFA ? **1.5pt**
- Tache 3 :** Quelle est la durée de supervision réalisé par le drone ? **1.5pt**