FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGES N° 5 : CLASSE DE 1èreC,D, TI

BARYCENTRE-TRIGONOMETRIE

EXERCICE 1

1. Construis un triangle ABC tel que $AC = 12cm$, $AB = 10cm$ et $BC = 8cm$.
2. Place le point G, barycentre des points pondérés $(A;1),(B;2)$ et $(C;1)$.
3. Détermine et représente l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que : $\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = AC$.
4. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points N du plan tels que $\|\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC}\| = \|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\|$.
   (a) Montre que le point B appartient à $\mathscr{E}$.
   (b) Détermine et représente l'ensemble $\mathscr{E}$.
5. Détermine l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 2AB^2$.

EXERCICE 2

ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 6cm, AC = 8cm$ et $BC = 10cm$.

1. Fais la figure.
2. **(a)** Construis le point G, barycentre des points pondérés $(A;1)$ et $(B;2)$.
   (b) Déduis-en la construction du point H, barycentre des points $(A;1),(B;2)$ et $(C;3)$.
3. Soit (Σ) l'ensemble des points M du plan tels que $MG^2 + MC^2 = 90$.
   (a) Montre que $MG^2 + MC^2 = 2MH^2 + 2CH^2$.
   (b) Détermine la nature exacte et construis l'ensemble (Σ).

EXERCICE 3

1. Montre que pour tout réel x , on a :
   (a) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$; **(b)** $\cos^4 x + \sin^4 x = \frac{1}{4}(3 + \cos 4x)$.
2. Détermine deux nombres réels r et φ tels que pour tout réel x, on ait : $\sqrt{6}\cos 2x + \sqrt{2}\sin 2x = r\cos(2x + \varphi)$.

EXERCICE 4

1. Exprime $\cos^2 x$, puis $\sin^2 x$ en fonction de $\cos 2x$.
2. Montre que $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$.
3. Déduis-en les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et de $\sin\frac{\pi}{12}$.

EXERCICE 5

A) Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AC = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ et $BC = 2$. On désigne par θ la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.

1. Calcule AB, puis $\cos\theta$ et $\cos 2\theta$.

2. Déduis-en la valeur de θ.

B) Soit x un nombre réel tel que $\tan 2x$ existe.

1. Montre que $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$.

2. Démontre que $\tan\dfrac{\pi}{8}$ est solution de l'équation : $x^2 + 2x - 1 = 0$.

3. Déduis-en la valeur exacte de $\tan\dfrac{\pi}{8}$.

EXERCICE 6

1. (a) Démontre que pour tous nombres réels a et b, on a :

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b.$$

(b) Déduis-en que : $\cos\dfrac{\pi}{12}\cos\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{1}{4}$.

2. On considère les expressions suivantes : $A = \cos^2\dfrac{\pi}{8} + \cos^2\dfrac{3\pi}{8} + \cos^2\dfrac{5\pi}{8} + \cos^2\dfrac{7\pi}{8}$ et $B = \sin^2\dfrac{\pi}{8} + \sin^2\dfrac{3\pi}{8} + \sin^2\dfrac{5\pi}{8} + \sin^2\dfrac{7\pi}{8}$.

(a) Calcule $A + B$ et montre que $A - B = 0$.

(b) Déduis-en les valeurs de A et B.

EXERCICE 7

1. Montre que $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 = 5 + 2\sqrt{6}$.

2. On considère l'équation $(E) : 4\sin^2 x + 2\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\sin x - \sqrt{6} = 0$.

(a) Résous dans $[0; 2\pi]$ l'équation (E).

(b) Place les images des solutions sur le cercle trigonométrique. Unité : 3cm.

(c) Quelle est la nature exacte du polygone obtenu ?

(d) Calcule la valeur exacte de l'aire de ce polygone.

EXERCICE 8

1. Exprime en fonction de $\sin x$ et $\cos x$:

$$A = \cos(2\pi - x) + 2\sin(\pi - x) + \cos(\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right).$$

2. Montre que lorsque $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, on a : $\dfrac{\sin 3x}{\sin x} - \dfrac{\cos 3x}{\cos x} = 2$.

3. Résous dans $]-\pi; \pi]$ l'équation $\cos(3x + \pi) = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

4. Pour tout réel x, démontre que :

(a) $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$.

(b) $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.