



NB : La rigueur dans la rédaction et la présentation de la copie seront prises en compte dans l'appréciation de la copie par le correcteur.

A-/ ÉVALUATION DES RESSOURCES 15, 5 points

EXERCICE 1: 5points

On considère le nombre complexe u défini par : $u = \sqrt{2 - \sqrt{2}} + i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

1. a) Calculer u^2 et u^4 . 1pt
b) Calculer le module et un argument de u^4 . En déduire le module et un argument de u . 2pts
2. Déduire de la question précédente les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$. 1pt
3. Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit $M(x; y)$ un point du plan d'affixe z .
Déterminer l'ensemble (Γ) des points $M(z)$ du plan pour lesquels le module de uz est égal à 8. 1pt

EXERCICE 2 : 8, 5 points

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

$\mathcal{P}$ est le polynôme de la variable complexe z , défini par : $\mathcal{P}(z) = z^3 - 5(1 + i)z^2 + 18iz + 10(1 - i)$.

1. Calculer $\mathcal{P}(1 + i)$. 0,5pt
2. Ecrire $\mathcal{P}(z)$ sous la forme : $\mathcal{P}(z) = (z - 1 - i)(z^2 + az + b)$ où a et b sont deux nombres complexes à déterminer. 1pt
3. a) Calculer $(1 + i)^2$. 0,25pt
b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations : $z^2 - (4 + 4i)z + 10i = 0$ et $\mathcal{P}(z) = 0$. 0,5+0,5=1pt
4. A, B et C sont les points du plan complexe, d'affixes respectives : $1 + i$; $3 + i$ et $1 + 3i$.
(i) Placer les points A, B et C dans Le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. 0,75pt
(ii) Ecrire sous forme algébrique, puis exponentielle le quotient $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$. 0,5pt
(iii) En déduire la nature exacte du triangle ABC . 0,5pt

Partie B

- 1) Déterminer les valeurs de a et b pour que les complexes $(2 + 3i)(a + bi)$ et $3 + 2i$ soient égaux. 1pt
- 2) Déterminer l'ensemble (Δ) des points M du plan complexe d'affixe z pour que :

$$\left| \frac{z-12}{z-8i} \right| = \frac{5}{3} \quad \text{1,5pts}$$

- 3) Déterminer les racines cubiques du nombre complexe $z = 1 - i\sqrt{3}$. 1,5pts

EXERCICE 3 : 2, 5 points

1) Déterminer les limites suivantes:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x})$; b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 3} + x)$; c) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$ **1.5pts**

2) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $g(x) = \frac{4\cos x + 2x}{x-1}$

a) Démontrer que : $\forall x \in]1; +\infty[; |g(x) - 2| \leq \frac{6}{x-1}$ **0.75pt**

b) En déduire la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$. **0.25pt**

B-/ÉVALUATION DES COMPÉTENCES 4, 5 points

M. OUM, professeur de mathématiques organise la fête de son anniversaire dans un hôtel dont l'emplacement est représenté par le point $A(1; 0)$. Il communique au responsable de la fête les informations codées suivantes :

les axes menant à la salle de réception sont représentés par l'ensemble des nombres complexes M d'affixe z tel que $2z - z^2 - 1 \in \mathbb{R}$.

L'alentour de la salle de fête sera éclairée par une tour de lumière à longue portée centrée à l'ensemble des points M d'affixe z , de partie imaginaire non nulle tels que $z - \frac{9}{z} \in \mathbb{R}$.

La sécurité sera postée à chaque point M d'affixe z solution de l'équation $(z + 1 - i)P(z) = 0$ ou $P(z) = z^3 + (5 - 2i)z^2 + (4 - 22i)z + 20 - 60i = 0$ admettant comme une des racines -5

1. Déterminer les équations des axes menant à la salle de fête et compléter les sur un plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$. **1, 5pt**
2. Déterminer l'emplacement de la tour de lumière ainsi que la circonférence éclairée par celle-ci et représenter la sur le plan complexe. **1, 5pt**
3. Déterminer la position exacte de chacun des agents de sécurité et placer les sur le plan complexe. **1, 5pt**

Présentation 0, 5pt