



NB : La rigueur dans la rédaction et la présentation de la copie seront prises en compte dans l'appréciation de la copie par le correcteur.

A-/ ÉVALUATION DES RESSOURCES 15, 5 points

EXERCICE 1 : 5points

On considère le nombre complexe u défini par : $u = \sqrt{2 - \sqrt{2}} + i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

1. a) Calculer u^2 et u^4 . 1pt
b) Calculer le module et un argument de u^4 . En déduire le module et un argument de u . 2pts
2. Déduire de la question précédente les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$. 1pt
3. Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) . Soit $M(x; y)$ un point du plan d'affixe z .
Déterminer l'ensemble (Γ) des points $M(z)$ du plan pour lesquels le module de uz est égal à 8. 1pt

EXERCICE 2 : 8, 5 points

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

- 1- Calculer le reste de la division euclidienne de l'entier naturel $n = 19^{52} \cdot 23^{41}$ par 7. [0,5 pt]
- 2- Déterminer tous les couples (a, b) d'entier naturels tel que $\mu + 11\delta = 203$, μ étant le PPCM et δ le PGCD de a et b [1 pt]
- 3- a) Trouver tous les couples de nombres entiers relatifs x et y vérifiant $8x - 5y = 1$ [1 pt]
b) Résoudre dans \mathbb{Z} le système $\begin{cases} x \equiv 1[8] \\ x \equiv 2[5] \end{cases}$ [0,5 pt]
- c) Un nombre positif, N , divisé par 8 donne pour reste 1. Ce même nombre divisé par 5 donne pour reste 2.
- Quel reste donne-t-il si on le divise par 40 ? [0,5 pt]
- Trouver N sachant que $3940 < N < 4000$ [0,5 pt]

Partie B

Démontrer par récurrence que :

1. Pour tout entier naturel n non nul, $3^{2n} + 2^{6n-5}$ est divisible par 11. 1,5pt
2. $\forall n \geq 2, 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + (n-1) \times n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$ 1,5pt
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$ 1,5pt

EXERCICE 3 : 2, 5 points

- 1) Déterminer les limites suivantes:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x})$; b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 3} + x)$; c) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$ **1.5pts**

2) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $g(x) = \frac{4\cos x + 2x}{x-1}$

a) Démontrer que : $\forall x \in]1; +\infty[; |g(x) - 2| \leq \frac{6}{x-1}$ **0.75pt**

b) En déduire la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$. **0.25pt**

B-/ÉVALUATION DES COMPÉTENCES 4, 5 *points*

Cryptage affine : on numérise les lettres de l'alphabet dans cet ordre

$A = 0; B = 1; \dots; Z = 25$. On code les lettres grâce à la fonction

$$f(x) = 21x + 13 \pmod{26}.$$

1. Coder le mot **URGENCE**. 1,5pt
2. Déterminer la fonction réciproque f^{-1} de décodage. 1,5pt
3. Décoder le mot **PAIX**. 1,5pt

Présentation 0, 5pt