

|                              |                          |                 |
|------------------------------|--------------------------|-----------------|
| Minesec                      | Evaluation n°1           | Novembre 2020   |
| Lycée Bilingue de Béon       | Classe : Tle C           | Durée : 4heures |
| Département de Mathématiques | Epreuve de Mathématiques | Coefficient : 7 |

## PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES (15POINTS)

### Exercice 1 (2.5 points)

On considère le nombre complexe  $z = (\sqrt{3} + 1) + i(\sqrt{3} - 1)$

- 1) Ecrire  $z^2$  sous forme algébrique (0.5pt)
- 2a) Déterminer le module et un argument de  $z^2$  (0.75pt)
- b) En déduire le module et un argument de  $z$  (0.5pt)
- 3) Donner la forme trigonométrique de  $z$  (0.25pt)
- 4) En déduire de ce qui précède les valeurs exactes de  $\cos \frac{\pi}{12}$  et  $\sin \frac{\pi}{12}$  (0.5pt)

### Exercice 2 (1.5 points)

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^2 - 2z\cos\theta + 1 = 0$

- 1) Calculer le discriminant de cette équation et en déduire ses racines carrées (0.5pt)
- 2) Donner les solutions de cette équation sous forme exponentielle (0.5pt)
- 3) En déduire que si  $z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta$ , alors  $z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta$  (0.5pt)

### Exercice 3 (3 points)

On considère dans  $\mathbb{C}$  le polynôme  $p(z) = z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - i$

- 1) Montrer que  $p$  admet au moins une racine imaginaire pur (0.5pt)
- 2) Déterminer  $a$  et  $b$  dans  $\mathbb{C}$  tels que  $\forall z \in \mathbb{C}, p(z) = (z - i)(z^2 + az + b)$  (0.5pt)
- 3) Résoudre l'équation  $p(z) = 0$  (0.75pt)
- 4) On considère les points  $A$  et  $B$  d'affixes respectives  $z_A = i$ ;  $z_B = \frac{-\sqrt{3}+i}{2}$  et le point  $C$  symétrique de  $B$  par rapport à l'axe des abscisses.
  - a) Placer ces points sur un graphique (0.5pt)
  - b) Déterminer le module et un argument du quotient  $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$  et en déduire la nature du triangle  $ABC$  (0.75pt)

### Exercice 4 (4.75 points)

- 1) Démontrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, n! \geq 2^{n-1}$  (0.75pts)
- 2) Démontrer que  $5^{2n} - 3^n$  est multiple de 11 pour tout entier naturel. (0.75pt)
- 3) Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  l'équation  $x^2 - 3x + 4 \equiv 0[7]$  (0.5pt)
- 4) Déterminer l'ensemble des entiers relatifs  $n$  tels que  $\frac{n+17}{n-1}$  soit un entier relatif. (1pt)
- 5) Soit  $a \in \mathbb{Z}$  et  $b \in \mathbb{Z}^*$ . Montrer que  $b$  divise  $a$  si et seulement si tout multiple de  $a$  est multiple de  $b$  (0.75pt)
- 6) Répondre par vrai ou faux. (1pt)
  - a) Deux nombres premiers distincts sont premiers entre eux.
  - b)  $1001n$  n'est pas un nombre premier
  - c) Il existe des entiers naturels  $n$  pour lesquels la fraction  $\frac{7n+3}{5n+2}$  soit réductible
  - d) Pour tout entier naturel  $n$ ,  $2^n$  divise  $4^n$ .

### Exercice 5 (3.25points)

Soit  $x$  un entier naturel qui s'écrit  $\overline{x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0}$  dans la base décimale.

- 1) Montrer que  $\forall k \in \mathbb{N}, 10^k \equiv (-1)^k [11]$  (0.25pt)
- 2) En déduire que  $x \equiv [(x_0 + x_2 + x_4 + \dots) - (x_1 + x_3 + x_5 + \dots)] [11]$  (0.25pt)
- 3) Déduire alors les valeurs de  $x$  pour les quelles  $\overline{14x38}$  est un multiple de 11 (0.25pt)
- 4) Démontrer que le reste de la division euclidienne de  $x$  par 100 est l'entier naturel dont l'écriture en base 10 est  $\overline{x_1x_0}$  (0.75pt)
- 5) Déterminer le chiffre des dizaines et des unités du nombre  $7^{77}$  (0.75pt)
- 6a) Ecrire 142 en base 5 (0.25pt)
- b) En déduire alors 4 entiers naturels  $a, b$  et  $c$  tels que  $\frac{142}{5^3} = a + \frac{b}{5} + \frac{c}{5^2} + \frac{d}{5^3}$  (0.75pt)

## PARTIE B EVALUATION DES COMPETENCES (5POINTS)

La commune de BETARE OYA et les neuf communautés villageoises qui la constituent perçoivent des taxes d'une entreprise qui exploite leur forêt communautaire. Si dessous sont donnés les détails sur le calcul et la gestion de ces taxes.

### 1) Taxes perçues par les communautés villageoises

Le montant global de cette taxe en million de francs CFA à la  $n$ ème année d'exploitation est  $t(n) = 2^n - 1$ . Pour éviter la sur taxation et les querelles entre les communautés, cette taxe n'est perçue que lorsque  $t(n)$  est divisible par 9. Toutes les communautés reçoivent alors le même montant et chaque communauté a l'obligation de réaliser au moins un projet.

### 2) Taxes perçues par la commune

pour ne pas susciter de convoitises, le montant de cette taxe est généralement donné dans la base 16 par la formule  $c(x) = \overline{x7D7840}^{16}$  ou  $x$  est l'unique solution de l'équation  $2^x - 3x - 280 = 0$ .

### 3) Impact de la COVID 19

En 2020, La crise sanitaire a affecté les activités de l'entreprise qui n'était qu'à sa sixième année d'exploitation. Ainsi, en dehors de la commune qui a perçu la somme prévue dans le contrat, chaque communauté a perçu un montant en FCFA estimé en base 16 à  $\overline{2ABCDE}^{16}$ .

### 4) Projet de la commune.

Avec la somme perçue, le maire envoie les ouvriers dans un site touristique aménagé un espace sur le quel sera construit un ouvrage d'art. Les dimensions du site ne sont pas données mais dans le document qui leur est remis, ils lisent ceci : « *L'ouvrage sera réalisé sur un terrain de forme d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse et la base seront des entiers naturels ayant  $3^2 5^2 m^2$  comme différence entre leurs carrés* »

## Taches

- 1) Quel est le nombre minimal de projets que pourra réaliser chaque communauté villageoise sachant que l'entreprise va exploiter la forêt pendant 30 ans ? (1.5pts)
- 2) Déterminer en base 16 la somme que l'entreprise a donnée globalement à la commune et aux neuf communautés villageoises En 2020. (1.5 pts)
- 3) Quel est le montant maximal que les ouvriers pourront gagner si la commune paye l'aménagement d'un  $m^2$  du site à 12000FCFA (1.5pts)

### Présentation

(0.5pt)

