L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1. Aritmétique dans $\mathbb{Z}$ ../ 5 points

Les parties A et B sont indépendantes

NOTATIONS. Pour tout entier a, on note $a\mathbb{Z}$ l'ensemble des multiples de a. Si a et b sont des entiers, on note $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers de la forme $au+bv$, où $u,v\in\mathbb{Z}$.

Partie A

Soient a et b des entiers non tous deux nuls. Montrez que :

1. $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}=\text{pgcd}\,(a,b)$ et $\text{pgcd}(a,b)>0$.

2. $\text{pgcd}(a,b)=1 \Longleftrightarrow a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}=\mathbb{Z} \Longleftrightarrow$ il existe deux entiers u et v tels que $au+bv=1$.

Partie B. On pose

$$E=\left\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\,/\,\text{il existe } u\in\mathbb{Z}\,\text{et}\, u\in\mathbb{Z}\text{ tels que}\left\{\begin{array}{l} x=u+v \\ y=3u+7v\end{array}\right.\right\}$$

Montrez pour tout $(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, on a l'équivalence :

$$(x,y)\in E \Longleftrightarrow y-3x \text{ est un multiple de } 4$$

Exercice 2. Suites et barycentres ../ 5 points

Soit n un entier naturel non nul, q un réel distinct de 0, de 1 et de -1. On considère dans le plan complexe, n points $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ d'affixes respectives $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$.

1. Démontrer que le système de points pondérés $\{(A_k, q^k), 0\leqslant k\leqslant n-1\}$ admet un barycentre G_n.

2. On donne :

$$\left\{\begin{array}{l} z_0=1 \\ z_1=\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ \forall k\in\{1,2,\ldots,n-1\}\ z_k=z_1^k.\end{array}\right.$$

   a) Déterminer l'affixe Z_n de G_n en fonction de q et z_1.

   b) Calculer la partie réelle X_n et la partie imaginaire Y_n de Z_n.

   (On rappelle que $X_n=\dfrac{Z_n+\overline{Z_n}}{2}$ et $Y_n=\dfrac{Z_n-\overline{Z_n}}{2i}$.)

3. a) Comment faut-il choisir n pour que Z_n soit un réel ?

b) Déterminer : $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} Y_n$.

Problème. Étude du mouvement d'un point ../ 10 points

Toutes les représentations graphiques demandées dans ce cas problème seront faites sur la même feuille, unité graphique sera de 5 cm. Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Partie A

1. Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de centre $\omega(1;0)$ et de rayon 1. Tracer $(\mathscr{C})$ et donner une équation dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.
2. Soient (Δ) la droite d'équation $x=1$ et (D) la droite d'équation $y=tx$ où t est un nombre réel. (D) coupe (Δ) au point M_0 et le cercle $(\mathscr{C})$ au points O et M_1. On définit le point M par la relation $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{M_0M_1}$.
   a) Tracer (Δ); (D); M_0; M_1 et M dans les cas particulier où $t=0$; $t=\frac{1}{2}$ et $t=1$.
3. Lorsqu'on fait varier t dans $\mathbb{R}$, démontrer que les points M se trouvent sur une courbe (S) dont on précisera l'équation cartésienne.

Partie B

1. On définit la fonction f par $f(x)=x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.
   a) Donner l'ensemble de définition D_f de f.
   b) Donner l'ensemble de définition de la fonction dérivée de f et calculer f'.
   c) Étudier le signe de f'. En déduire le tableau de variation de f.
2. a) Calculer $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$. Que peut-on conclure ?
   b) Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0. Représenter graphiquement f. Soit (S_1) la courbe obtenue.
   c) Comment peut-on en déduire (S) de (S_1) ? Représenter alors (S).

Partie C

On considère maintenant M comme un point mobile dont les coordonnées sont données dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ en fonction de t par : $\begin{cases} x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y=\frac{t(1-t^2)}{1+t^2} \end{cases}$ $t\in[0;+\infty[$

1. a) Donner la trajectoire du mobile M et indiquer le sens dans lequel elle est parcourue.
   b) A quel instant t le mobile traverse-t-il l'axe (Ox) ?
2. A quel instant le mobile atteint-il son ordonnée maximale ?
3. Calculer le vecteur vitesse $\vec{V}$ et le vecteur accélération $\vec{\Gamma}$ du mouvement en fonction de t.