ANNEE SCOLAIRE : ....

ETABLISSEMENT : ....

CLASSE : ....

ELEVE

NOM : ....

PRENOMS : ....

N° MATRICULE : ....

TELEPHONE : ....

GROUPE SANGUIN : ....

PROFESSEUR

NOM : ....

TELEPHONE : ....

PERSONNE A CONTACTER EN CAS D'URGENCE

NOM : ....

TELEPHONE : ....

AVANT – PROPOS

Dans un monde plongé dans l'ère de la haute technologie et de la mondialisation des marchés, la maîtrise et l'approfondissement des outils mathématiques apparaissent comme une condition indispensable au développement de nos nations.

C'est pourquoi, dans le souci d'améliorer le rendement des apprenants tout en leur permettant d'aborder les mathématiques avec beaucoup plus d'aisance, les conseils d'enseignement de Mathématiques (C.E) des lycées modernes 1 et 2 d'Abobo ont décidé d'élaborer ce document intitulé " **AU TOP EN MATHEMATIQUES**".

Ce document pédagogique que nous vous proposons obéit à deux objectifs majeurs:

- ✓ La mise à la disposition des apprenants, des notions de base d'une formation mathématique solide en tenant compte de leur environnement socio-culturel,
- ✓ Le suivi progressif et continu des apprenants par les professeurs.

Nous exprimons notre gratitude aux administrations des Lycées modernes 1 et 2 d'Abobo qui, par leur compréhension, leurs encouragements et leur soutien moral, nous ont permis de réaliser ce document dans les meilleures conditions possibles.

Les conseils d'enseignement d'Abobo1 et d'Abobo2,
L'A PRO MA CI (Association des Professeurs de Mathématiques de Côte d'Ivoire)

LIMITES ET CONTINUITE

Exercice 1 **(Limites de fonctions rationnelle)**

Dans chacun des cas suivants, étudier la limite de *f* aux endroits indiqués.

Lorsque *f* n'est pas définie au réel indiqué, étudier la limite à gauche et la limite à droite.

a) $f : x \mapsto \dfrac{x-4}{x^2-6x+5}$ en $+\infty$, en $-\infty$, en 1 et en 5.

b) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{2}{x^2-9}$ en $+\infty$, en $-\infty$, en 3 et en -3

c)

$f : x \mapsto \dfrac{x^4-1}{x^3-1}$ en $+\infty$, en $-\infty$, en 1.

Exercice 2 **(Lever une indétermination par la mise en facteur du terme dominant)**

a) Etudier la limite en $+\infty$ de chacune des fonctions suivantes :

$f : x \mapsto \dfrac{x+\sqrt{x}}{x+1}$

$g : x \mapsto 2 + x - \sqrt{2x^2+1}$

$h : x \mapsto \dfrac{1-3x}{x+\sqrt{4x^2+1}}$

b) Etudier la limite en $-\infty$ de chacune des fonctions suivantes :

$f : x \mapsto \dfrac{1-3x}{x+\sqrt{4x^2+1}}$

$g : x \mapsto 1 + x + \sqrt{9x^2+1}$

$$h : x \mapsto \frac{x^2 - 2x + 5}{1 + x - \sqrt{1 + 12x^2}}$$

Exercice 3 **(Lever une indétermination en utilisant l'expression conjuguée)**

Etudier la limite de *f* en l'endroit indiqué dans chacun des cas :

a) $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$; en 0.

b) $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1} - x$; en $+\infty$

c) $f : x \mapsto 2x + \sqrt{4x^2 - x + 1}$; en $-\infty$

Exercice 4 **(Lever une indétermination en utilisant la définition du nombre dérivé)**

Etudier la limite de *f* en l'endroit indiqué dans chacun des cas :

a) $f : x \mapsto \frac{\cos x - 1}{x}$, en 0.

b) $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$, en 4.

c) $f : x \mapsto \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$, en $\frac{\pi}{4}$.

d) $f : x \mapsto \frac{1 - \cos x}{\sin x}$ en 0

e) $f : x \mapsto \frac{2\sin x - 1}{6x - \pi}$ en $\frac{\pi}{2}$

Exercice 5 (Théorème de comparaison, théorème des gendarmes)

1-a) Démontrer que pour tout nombre réel x, on a : $1 \leq 2 - \cos x \leq 3$

b) Etudier la limite de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{2-\cos x}$ en $+\infty$.

2) Etudier la limite de la fonction $f : x \mapsto x^2 + x\sin x$ en $-\infty$ et en $+\infty$

3) Soit la fonction f définie sur $]1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x+\sin x}{x-1}$

a) Démontrer que pour tout $x \in\,]1\,;\,+\infty[$ on a : $\dfrac{2x-1}{x-1} \leq f(x) \leq \dfrac{2x+1}{x-1}$

b) Etudier la limite de f en $+\infty$

Exercice 6 (Utiliser le théorème de la limite d'une fonction composée)

Dans chacun des cas suivants, calculer la limite de f en l'endroit indiqué .

a) $f : x \mapsto \sqrt{-x^3 + x^2 + x}$ en $-\infty$.

b) $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{-x+1}{x^2+1}}$ en $-\infty$.

c) $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ en 1.

d) $f : x \mapsto \cos\left(\dfrac{\pi x+1}{x+2}\right)$ en $+\infty$

c) $f : x \mapsto x\sin\dfrac{\pi}{x}$ en $+\infty$

ASYMPTOTES

Exercice 7 **(Asymptote verticale, asymptote horizontale)**

Le plan est muni d'un repère orthogonal, (C_f) est la représentation graphique de f.

Dans chacun des cas suivants, calculer les limites des f aux bornes de son ensemble de définition, et , donner une interprétation graphique de chaque limite s'il y a lieu.

a) f, définie sur $]-\infty\,;-1[\cup]1\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$

b) f, définie sur $]-\infty\,;1[\cup]1\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{3x^2}{x-1}$.

c) f, définie sur $]-\infty\,;-2[\cup]-2\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2+1}{(x+2)^2}$.

d) f, définie sur IR par $f(x)=\sqrt{1+x^2}-x$

Exercice 8 **(Asymptote oblique)**

Le plan est muni d'un repère orthogonal, (C_f) est la représentation graphique de f.

Dans chacun des cas suivants, démontrer que la droite (Δ) est asymptote à (C_f) en l'endroit indiqué :

a) $f : x \mapsto -3x+1+\dfrac{1+x}{x^2+2}$; $(\Delta): y=-3x+1$, en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) $f : x \mapsto 2+\sqrt{1+4x^2}-x$; $(\Delta): y=x+2$, en $+\infty$.

c) $f : x \mapsto \dfrac{-2x^3+4x^2-2x+1}{(x-1)^2}$; $(\Delta): y=-2x$, en $+\infty$.

Exercice 9 **(Recherche d'asymptote oblique)**

Le plan est muni d'un repère orthogonal, (C_f) est la représentation graphique de la fonction f définie sur IR par $f(x)=\sqrt{12+x^2}-1$.

a) Calculer la limite de f en $+\infty$

b) Montrer que $\frac{f(x)}{x}$ admet en $+\infty$ une limite finie α.

c) Calculer la limite en $+\infty$ de $f(x)-\alpha x$.

d) En déduire que (C_f) admet une asymptote oblique dont on précisera une équation.

Exercice 10 **(Recherche d'asymptote oblique)**

En s'inspirant de l'exercice 7, rechercher une éventuelle asymptote oblique à (C_f) en l'endroit indiqué dans chacun des cas suivants :

a) $f : x \mapsto \sqrt{9x^2+x+1}$ en $+\infty$.

b) $f : x \mapsto -3+\sqrt{1+x^2}$ en $-\infty$.

Exercice 11 **(Recherche d'asymptote oblique)**

Dans chacun des cas suivants, démontrer que (C_f) admet une asymptote oblique en l'endroit indiqué dont on précisera une équation.

a) $f : x \mapsto \frac{-2x^2-x+2}{x+1}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) $f : x \mapsto \dfrac{3x^3 - 6x^2 + 3x - 2}{(x-1)^2}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 12 **(Branche parabolique)**

a) Démontrer que la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x+2}$ admet en $+\infty$ une branche parabolique dont on précisera la direction.

b) Même question pour la fonction $g : x \mapsto \dfrac{x^3+1}{x-2}$ en $-\infty$.

CONTINUITE

Exercice 13 **(Continuité en un point)**

Dans chacun des cas suivant, étudier la continuité de *f* en x_0 :

a) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2-1}{4(x-1)} & si \quad x < 1 \\ f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & si \quad x > 1 \\ f(1) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ $\qquad x_0 = 1$

b) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{(x+2)^2}{x^2-4} & si \quad x < -2 \\ f(x) = x^2 + x - 2 & si \quad x > -2 \\ f(-2) = 1 \end{cases}$ $\qquad x_0 = -2$

Exercice 14 (Prolongement par continuité)

Dans chacun des cas suivants, montrer que *f* admet un prolongement par continuité en x_0 et déterminer ce prolongement :

a) *f* définie sur $IR-\{0\}$ par $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{1+x^2}}{x}$; $x_0=0$.

b) *f* définie sur $IR-\{-2\}$ par $f(x)=\dfrac{4-x^2}{x+2}$; $x_0=-2$.

Exercice 15 (Image d'un intervalle par une fonction continue)

Le tableau de variation suivant est celui d'une fonction continue sur *IR*

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	3

Déterminer les images par *f* de chacun des intervalles $]-\infty\,;0]$, $]2\,;+\infty[$, $[0\,;2]$ et $[0\,;+\infty[$.

Exercice 16 (Image d'un intervalle par une fonction continue)

Soit la fonction $f: x \mapsto x^3-3x+1$ définie et dérivable sur *IR* .

a) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

b) Déterminer les images par f des intervalles $]-3\,;-1[$, $]-3\,;2[$, $[0\,;1]$ et $[-1\,;+\infty[$.

FONCTION CONTINUE ET STRICTEMENT MONOTONE SUR UN INTERVALLE

Exercice 17

Soit la fonction
$$f:[0\,;+\infty[\to[0\,;1[$$
$$x\mapsto\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

a) Sans étudier ses variations, démontrer que f est une bijection .

b) Déterminer la bijection réciproque f^{-1} de f.

Exercice 18

Démontrer que l'équation $x^3-12x+10=0$ admet dans $]0\,;1[$ une solution unique α.

Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

Exercice 19

Soit la fonction
$$f: IR\to IR$$
$$x\mapsto x^2-x\sqrt{x}-2$$

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f et calculer les limites au bornes de D_f.

2) On admet que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

Démontrer que $\forall x\in]0\,;+\infty[\quad,\quad f'(x)=\dfrac{\sqrt{x}\left(4\sqrt{x}-3\right)}{2}$.

En déduire les variations de f et dresser son tableau de variations.

3) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans $[0\,;+\infty[$ une solution unique β.

4) En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

FONCTIONS PUISSANCES D'EXPOSANT RATIONNEL

Exercice 20

- Donner une écriture simplifiée du nombre réel $A = \dfrac{\sqrt[3]{2}\,\sqrt[6]{9}\,\sqrt{6}}{\sqrt[3]{\sqrt{6}}}$
- Donner une écriture simplifiée du nombre réel $B = \dfrac{\sqrt[5]{2} \times \sqrt{8}}{\sqrt{\sqrt[5]{128}}}$

DERIVABILITE

Exercice 21 **(dérivabilité en un point)**

Soit la fonction f de IR vers IR définie par $f(x) = (x-1)\sqrt{1-x^2}$

a) Déterminer l'ensemble de définition de f .

b) Etudier la dérivabilité de f en -1 et en 1. Interpréter graphiquement les résulats.

DERIDEES USUELLES

Dérivées de fonctions élémentaires

Dérivées et opérations sur les fonctions

f	$f\,'$	Ensemble de dérvabilité
$x \mapsto k$ $(k \in IR)$		IR
$x \mapsto x$	$x \mapsto 1$	IR
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$	$IR - \{0\}$

$x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{Z}^*)$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$IR - \{0\}$ $si\ n < 0$ $IR \quad si \quad n > 0$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$	IR
$x \mapsto \cos x$		IR
$x \mapsto \tan x$	$x \mapsto 1+\tan^2 x$ ou $\frac{1}{\cos^2 x}$	$IR - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

f	f'
$u+v$	$u'+v'$
$ku\ (k \in IR)$	
uv	$u'v+uv'$
$\frac{1}{v}$	$\frac{-v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$
$u^n\ (n \in \mathbb{Z}^*)$	$nu'u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$x \mapsto u(ax+b)$	$x \mapsto au'(ax+b)$

Exercice 22 **(Calculs de dérivées)**

On admet que dans chacun des cas suivants , la fonction f est dérivable sur IR . Calculer la fonction dérivée de f :

a) $f : x \mapsto \sqrt{x^2+2x+3}$

b) $f : x \mapsto \sqrt{\frac{1}{1+x^2}}$

c) $f : x \mapsto (x^2+3x+1)^3$

d) $f : x \mapsto \cos^2 x$

e) $f : x \mapsto \frac{1}{(x^2+x+1)^3}$

Exercice 23 **(Calculs de dérivées)**

Dans chacun des cas suivants, la fonction f est dérivable sur l'ensemble D. Calculer sa fonction dérivée sur D.

a) $f : x \mapsto (3x-1)^2(1-2x)^3$, $D = IR$

b) $f : t \mapsto \dfrac{(2t+1)^2}{(3t+1)^3}$, $D = IR - \left\{\dfrac{-1}{3}\right\}$

c) $f : \theta \mapsto \tan(3\theta)$, $D = \left[0\,;\dfrac{\pi}{6}\right[$

d) $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$, $D = IR$

e) $f : x \mapsto \left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^2$, $D = IR - \{-2\}$.

Exercice 24 **(Dérivées successives)**

Calculer les dérivée d'ordre 1 , 2 , 3 de chacune des fonctions suivantes :

- $f : x \mapsto 2x^2 - 3x + 4$
- $g : x \mapsto -x^3 + x - 3$
- $h : x \mapsto \dfrac{3x+2}{x-1}$

DERIVEE D'UNE FONCTION RECIPROQUE

Exercice 25

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + x + 1$ définie et dérivable sur IR.

a) Démontrer que f est une bijection de IR vers IR.

b) Justifier que sa bijection réciproque f^{-1} est dérivable sur IR et calculer $\left(f^{-1}\right)'(13)$.

Exercice 26

Soit la fonction $$f : \left]-\infty ; \frac{-1}{2}\right] \to \left[\frac{3}{4} ; +\infty\right[$$
$$x \mapsto x^2 + x + 1$$

1.

a) Sans étudier ses variations, justifier que f est une bijection.

b) Déterminer sa bijection réciproque f^{-1}

c) Calculer $\left(f^{-1}\right)'(a)$ pour tout $a \in \left[\frac{3}{4} ; +\infty\right[$.

2.

a) Justifier par l'étude de ses variations que f est une bijection.

b) Calculer par une méthode autre que celle du 1) le nombre $\left(f^{-1}\right)'(a)$ pour tout $a \in \left[\frac{3}{4} ; +\infty\right[$.

Exercice 27

Soit la fonction *f* définie sur $\left]-\infty ; 0\right[$ par $f(x) = \frac{\sqrt{4+x^2}}{x}$.

1) Calculer les limites de *f* en $-\infty$ et en 0. Interpréter graphiquement les résultats.

2) Etudier les variations de *f* et dresser son tableau de variations.

3) Justifier que *f* réalise une bijection de $\left]-\infty ; 0\right[$ sur un intervalle *J* que l'on précisera.

4) Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ en fonction de x.

5) Calculer $\left(f^{-1}\right)'\left(-\sqrt{2}\right)$ de deux manières.

Exercice 28

On admet dans chacun des cas suivants que la fonction f est dérivable sur D. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D$

a) $f : x \mapsto x^{\frac{2}{3}}$, $D =]0\,;+\infty[$

b) $f : x \mapsto \sqrt[3]{1+x^2}$, $D = IR$

c) $f : x \mapsto \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{\frac{3}{2}}$, $D =]0\,;+\infty[$.

ETUDES GLOBALES DE FONCTIONS

Exercice 29 **(Fonctions rationnelles)**

1. Soit la fonction g définie sur IR par $g(x) = x^3 - 3x - 3$

a) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variations. On y précisera les limites.

b) En déduire qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$. Justifier que $2{,}1 < \alpha < 2{,}11$.

2. Soit la fonction f définie et dérivable sur $IR - \{-1\,;1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x^3+3}{x^2-1}$.

a) Montrer que pour tout $x \in IR - \{-1\,;1\}$, $f'(x) = g(x) \times h(x)$ où h est une fonction à préciser.

b) En déduire les variations de f.

c) Etudier les limites de f aux bornes de D_f

d) Dresser le tableau de variation de f.

3.

a) Déterminer trois réels a , b , c tels que $f(x) = ax + \dfrac{bx+c}{x^2-1}$

b) En déduire que (C_f) admet en $-\infty$ et $+\infty$ une asymptote (Δ) dont on précisera une équation.

c) Etudier la position de (C_f) par rapport à (Δ).

5. Montrer que $f(\alpha)=3\alpha$.

6.

a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans $]-\infty\,;-1[$ une solution unique β .

Déterminer un encadrement de β d'amplitude 0,1.

b) Déduire de ce qui précède le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

7. Tracer (C_f), (Δ) et les autres asymptote dans un même repère orthonormé d'unité 1 cm.

Exercice 30 **(Fonctions rationnelles)**

1. On considère la fonction polynôme P définie pour tout réel x par $P(x)=2x^3-3x^2-1$.

a) Etudier les variations de P .

b) Montrer l'équation $P(x)=0$ admet dans IR une solution unique α et que α appartient à l'intervalle $]1{,}6\,;1{,}7[$.

2. On considère la fonction f définie sur $D=]-1\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x^3}$.

a) Etudier les variations de f (on pourra utiliser les résultats du 1)).

d) Déterminer une équation de la tangente (Δ) à (C_f) au point d'abscisse 0.

Etudier la position de (C_f) par rapport à (Δ) sur $]-1\,;1[$.

c) Montrer que la courbe (C_f) est au dessus de sa tangente (T)au point d'abscisse 1.

d) Tracer (C_f), (Δ) et (T) dans un repère orthonormé d'unité 4 cm.

Exercice 31 **(Fonctions rationnelles et valeur absolue)**

Soit f la fonction définie sur $D_f = IR - \{-1\,;1\}$ par $f(x) = |x+1| + \frac{x}{x^2-1}$.

1.

a) Donner l'écriture de $f(x)$ sans valeur absolue.

b) Etudier les limites de f aux bornes des intervalles de D_f.

2.

a) Exprimer $f'(x)$ et étudier le signe de $f'(x)$ sur chacun des intervalles de D_f.

b) Dresser le tableau de variations de f.

3.

a) Vérifier que les droites d'équations $y = x+1$ et $y = -x-1$ sont asymptotes obliques à (C_f)

respectivement en $+\infty$ et en $-\infty$.

Etudier la position de (C_f) par rapport à ses asymptotes.

b) Trouver une équation de la tangente (T) à (C_f) au point A d'abscisse 0.

Etudier la position de (C_f) par rapport à (T).

c) Tracer (C_f), ses asymptotes et la tangente (T).

4. Montrer que sur $]-1\,;1[$, (C_f) coupe l'axe des abscisses en un unique point d'abscisse α dont on déterminera un encadrement d'amplitude 10^{-1}.

Exercice 32 **(Fonction comportant une racine carrée et une valeur absolue)**

I) Soit h la fonction définie sur $]-2\,;2[$ par $h(x) = \sqrt{4-x^2} - x$.

1) Démontrer que : $\forall x \in]-2\,;0]$, $h(x) > 0$.

2) a) Démontrer que : $\forall x \in]0\,;2[$, $h(x) = \frac{2(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)}{\sqrt{4-x^2}+x}$.

b) En déduire le signe de h(x) sur $]0\,;2[$.

II) Soit la fonction g définie sur $]-\infty\,;-2[\cup]2\,;+\infty[$ par $g(x)=\sqrt{x^2-4}+x$.

1) Justifier que : $\forall x\in]2\,;+\infty[,\quad g(x)>0$.

2) Justifier que : $\forall x\in]-\infty\,;-2[,\quad g(x)<0$.

III) Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x)=1+x+\sqrt{|x^2-4|}$.

1) Ecrire $f(x)$ sans valeur absolue.

2) a) Calculer la limite de l'expression $x+\sqrt{x^2-4}$ lorsque x tend vers $-\infty$.

b) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

3) a) Calculer la limite de $f(x)$ en $+\infty$.

b) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y=2x+1$ est asymptote à (C_f) en $+\infty$.

4) Etudier la dérivabilité de f en -2 et 2. Interpréter graphiquement les résultats.

5) On admet que f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty\,;-2[$, $]2\,;+\infty[$ et $]-2\,;2[$

. a) Démontrer que : $\forall x\in]-\infty\,;-2[\cup]2\,;+\infty[,\quad f'(x)=\dfrac{g(x)}{\sqrt{x^2-4}}$.

Et que : $\forall x\in]-2\,;2[,\quad f'(x)=\dfrac{h(x)}{\sqrt{4-x^2}}$.

b) En déduire les variations de f et dresser son tableau de variations.

c) Construire (C_f) , ses asymptotes et ses tangentes particulières dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.

PRIMITIVES

Primitives de fonctions élémentaires

Fonction f	Primitives de f	Sur l'intervalle
$x \mapsto a \quad (a \in IR)$	$x \mapsto ax + c$	IR
$x \mapsto x^n \quad (n \in IN)$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$	IR
$x \mapsto \dfrac{1}{x^n} \quad (n \in IN - \{1\}$	$x \mapsto \dfrac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + c$	$]-\infty\,; 0[\ ou\ ]0\,;+\infty[$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + c$	$]0\,;+\infty[$
$x \mapsto x^r \ (r \in \mathbb{Q} - \{-1\})$	$x \mapsto \dfrac{x^{r+1}}{r+1} + c$	$[0\,;+\infty[\ si\ r \geq 0$ $]0\,;+\infty[\ si\ r < 0$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x + c$	IR
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x + c$	IR
$x \mapsto 1 + tan^2 x = \dfrac{1}{cos^2 x}$	$x \mapsto \tan x + c$	$\left](2k-1)\dfrac{\pi}{2}\,;(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right[$ $(k \in \mathbb{Z})$

Formules des primitives

Fonction f	Une primitive de f	Commentaire
$u'u^n \quad (n \in IN)$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	Sur un intervalle I où u est dérivable
$\dfrac{u'}{u^n} \ (n \in IN - \{1\})$	$\dfrac{-1}{(n-1)u^{n-1}}$	Sur un intervalle I où u est dérivable et ne s'annule pas
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	Sur tout intervalle I où u est dérivable et strictement positive
$u'u^n \ (r \in \mathbb{Q} - \{-1\})$	$\dfrac{u^{r+1}}{r+1}$	Sur un intervalle I où u est dérivable et positive (strictement positive si $r < 0$)
$u' \sin u$	$-\cos u$	Sur un intervalle I où u est dérivable
$u' \cos u$	$\sin u$	Sur un intervalle I où u est dérivable

Exercice 33

Dans chacun des cas suivants, prouver que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I :

$a)\ f(x) = \tan^2 x\ ;\ \ F(x) = \tan x - x\ \ ; I = \left]\frac{-\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$

$b)\ f(x) = \dfrac{2(x^4-1)}{x^3}\ ;\quad F(x) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 \quad I = \ ]0\ ;\ +\infty[$

Exercice 34

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I indiqué :

$a)\ \ fx) = \ x^4 - \ 4\,x^3 + \ x^2 - \ 4x + 3 \quad ; \quad I = IR$

$b)\ \ f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{3} \quad ;\ \ I = IR$

$c)\ \ f(x) = \dfrac{-1}{x^3} + \dfrac{4}{x^2} - 1\ \ ;\ \ I = \ ]0\ ;\ +\infty[$

$d)\ f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}} \quad ;\ \ I =]1\ ;\ +\infty[$

$e)\ f(x) = (2x+1)(x^2+x-2)^3 \quad I = IR$

$f)\ f(x) = \ \sqrt{x-1} \quad ;\ \ I = \ [1\ ;\ +\infty[$

$g)\ f(x) = \ x\,\sqrt{1+x^2} \quad ;\ \ I = IR$

$h)\ f(x) = \dfrac{2x-1}{(x^2-x+3)^2} \quad ; \quad I = IR$

$i)\ f(x) = \dfrac{4x^2}{(x^3+8)^3} \quad ; \ I = \left]-2\,;\,+\infty\right[$

Exercice 35

Soit les fonctions f et g dérivables sur $]-1;+\infty[$ et définies par :

$f(x) = (ax+b)\sqrt{x+1}$ et $g(x) = \dfrac{-3x+1}{\sqrt{x+1}}$

1) Déterminer les nombres réels a et b pour que la fonction f soit une primitive sur $]-1;+\infty[$ de la fonction g .

2) En déduire la primitive h de g sur $]-1;+\infty[$ qui prend la valeur -2 en 3.

Exercice 36

La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ étant continue sur $]0;+\infty[$, elle admet des primitives sur cet Intervalle.

Soit F la primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ qui s'annuleen 1

1) Démontrer que F est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

2) Justifier que : $\forall x \in]0;1[, F(x) < 0$ et $\forall x \in]1;+\infty[, F(x) > 0$

3) Soit a un nombre réel strictement positif et G la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par

$G(x) = F(ax)$

a) Démontrer que G est une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$

b) En déduire qu'il existe une constante réelle c telle que : $\forall x \in]0;+\infty[$, $G(x) = F(x) + c$

c) En donnant une valeur à x convenablement choisie, déterminer c

d) En déduire que : $\forall x \in]0;+\infty[, F(ax) = F(x) + F(a)$

FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

Exercice 37

1) Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de $\ln 3\ \ et\ \ \ln 5$ les nombres suivants :

$\ln 15\ \ ;\ \ln 45\ \ ;\ \ln\frac{25}{3}\ \ ;\ \ \ln 75\sqrt{5}$.

2) Démontrer que $\ln\left(2+\sqrt{3}\right)+\ln\left(2-\sqrt{3}\right)=0$

3) Dans chacun des cas suivants , comparer sans calculatrice les nombres x et y

a) $x=\ln 5$ et $y=\ln 2+\ln 3$

b) $x=2\ln 3$ et $y=3\ln 2$

4) Simplifier les écritures suivantes :

$a=\ln 567-\ln 72-\ln\frac{7}{8}+\ln\frac{1}{27}$.

$b=\ln\sqrt{135}+\ln\sqrt{75}-\ln\sqrt{15}-\ln\sqrt{27}$

Exercice 38

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans chacun des cas suivants :

a) $f: IR \to IR$
$x \mapsto \ln(x-2)$

b) $f: IR \to IR$
$x \mapsto \ln(x-2)+\ln(9-2x)$

c) $f: IR \to IR$
$x \mapsto \ln|x-2|$

d) $f: IR \to IR$

$x \mapsto \ln(\frac{x+1}{x-3})$

e) $f: IR \to IR$

$x \mapsto \ln\left|\frac{x+1}{x-3}\right|$

Exercice 39

1) Résoudre dans *IR* chacune des équations proposées.

a) $\ln(3x-4) = \ln(x^2-4)$

b) $\ln(-3x) = \ln(x^2-4)$

c) $2\ln x = \ln(x+4) + \ln 2x$

d) $2\ln x = \ln(2x^2+8x)$

2) Résoudre dans *IR* chacune des inéquations proposées :

a) $\ln(x-2) \leq \ln(2x-1)$

b) $\ln(-3x) \geq \ln(x^2-4)$

c) $\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) \geq \ln x$

d) $\ln x \leq \ln(x^2-2x)$

Exercice 40

Dans chacun des cas suivants, résoudre dans l'ensemble *IN* des entiers naturels, l'inéquation d'inconnue *n* proposée :

a) $2^n \leq 100$

b) $(\frac{1}{3})^n \leq 10^{-2}$

c) $0,2 \geq (\frac{2}{5})^n$

d) $\left(1+\frac{3}{100}\right)^n \geq 2$

Exercice 41

Résoudre dans *IR* chacune des équations suivantes :

a) $\ln(5-2x) = 1$

b) $\ln(2-x) = -3$

c) $\ln(x^2-8) = 0$

d) $\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) = 2$

e) $3(\ln x)^2 - 2\ln x - 16 = 0$

e) $\ln(x+1) - \ln(x-2) = 1$

Exercice 42

Résoudre dans *IR* les inéquations suivantes :

a) $1 - 2\ln x > 0$

b) $(1-2\ln x)(3+\ln x) \leq 0$

c) $3(\ln x)^2 - 2\ln x - 16 \leq 0$

d) $\ln(5-x) - \ln 3 + \ln(x-1) \geq 0$

Exercice 43

Dans chacun des cas suivants, calculer la limite de f à l'endroit indiqué :

a) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$; en 0

b) $f(x) = \dfrac{x - \ln x}{x}$; en 0

c) $f(x) = x - \ln x$; en $+\infty$

d) $f(x) = x + 1 + \dfrac{\ln x}{x}$; en $+\infty$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \ln x$ en 0

f) $f(x) = \dfrac{x\ln x}{x+1}$; en 0

g) $f(x) = x + x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$; en $+\infty$

Exercice 44

Dans chacun des cas suivants calculer les limites de f aux bornes de l'intervalle I

a) $f(x) = \frac{1}{\ln x}$; $I =]1\,;\,+\infty[$

b) $f(x) = x(1-\ln x)$; $I =]0\,;\,+\infty[$

c) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$; $I =]-\infty\,;\,-1[$

d) $f(x) = \frac{1}{x}(\ln x - 1)$; $I =]0\,;\,+\infty[$

e) $f(x) = \frac{x+1}{\ln x}$; $I =]1\,;\,+\infty[$

f) $f(x) = x + \ln(x+1) - \ln x$; $I =]0\,;\,+\infty[$

Exercice 45

Dans chacun des cas suivants on admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I ;

Calculer la fonction dérivée f' de f .

a) $f(x) = \ln(1+x^2)$; $I = IR$

b) $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$; $I =]1\,;\,+\infty[$

c) $f(x) = \ln(x-1) - \ln x$; $I =]1\,;\,+\infty[$

d) $f(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$. ; $I =]0\,;\,+\infty[$

e) $f(x) = \ln(\ln x)$; $I =]e\,;\,+\infty[$

f) $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$; $I =]1\,;\,+\infty[$

Exercice 46

Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$; $I = IR$

b) $f(x) = \tan x$; $I = \left]\dfrac{-\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$

c) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x+3}$; $I = IR$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$; $I = \left]1 ; +\infty\right[$

e) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$; $\mathrm{I} = \left]0 ; +\infty\right[$

ETUDE DE FONCTIONS COMPORTANT « ln »

Exercice 47

Soit la fonction f définie sur $]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$.

1) Calculer les limites de f en -1 et en 1.

2) Démontrer que la fonction f est impaire.

3) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation

4) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Exercice 48

Soit f al fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x - 4 + \ln(\frac{x}{x+1})$.

1) Déterminer les limites de f au bornes de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

2) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3) a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x - 4$ est asymptote à la représentation graphique (C_f) de f .

b) Etudier la position relative de (C_f) par rapport à la droite (D).

c) Construire (C_f) et (D) dans un repère orthonormé.

Exercice 49

A) Etude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(1+x^2)$.

1) Démontrer que sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$ l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $1.9 < \alpha < 2$.

2) Préciser le signe de g sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

B) Etude d'une fonction

f est la fonction définie sur $I = [0\,;\,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) Etudier la dérivabilité de f en 0. En déduire une interprétation graphique.

2) Déterminer la limite de f en $+\infty$

3) On admet que f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.

a) Démontrer que pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

b) En déduire les variations et dresser son tableau de variations.

c) Tracer (C_f) et sa tangente au point d'abscisse 0.

Exercice 50

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{2}\left(\ln x - \dfrac{3}{2}\right) \ si\ x \in\,]0\,;\,+\infty[\\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) Etudier la dérivabilité de f en 0.

2) Etudier la limite f en $+\infty$

3) On admet que f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.

a) Démontrer que pour tout $x \in\,]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = x(\ln x - 1)$.

b) En déduire les variations de f et dresser son tableau de variations.

4) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 1.

5) Soit la fonction h définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = f(x) + x - \dfrac{1}{4}$

a) Etudier les variations de la fonction dérivée h' de h sur $]0\,;\,+\infty[$ et dresser son tableau de variation (on ne demande pas les limites)

b) en déduire le signe de h' sur $]0\,;\,+\infty[$, puis le sens de variation de h .

c) Calculer $h(1)$ puis déduire de la question précédente le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x.

d) En déduire la position relative de (T) et (C_f) .

6) Construire (T) et (C_f) dans un repère orthonormé.

FONCTION EXPONENTIELLE NEPERIENNE

Exercice 51

Simplifier les expressions suivantes :

a) $(e^x)^3e^{2x}$

b) $\frac{e^{x-1}}{e^{x-2}}$

c) $\frac{e^{3x}}{(e^{-x})^2\times e^x}$

d) $\frac{e^xe^y}{e^{x-y}}$

Exercice 52

Pour tout nombre réel x on pose $g(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $h(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

1) Démontrer que $[g(x)]^2-[h(x)]^2=1$

2) Démontrer que $g(2x)=2[g(x)]^2-1$ et que $h(2x)=2g(x)\times h(x)$.

Exercice 53

Pour tout réel x, on pose $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

Démontrer que $f(2x)=\frac{2f(x)}{1+[f(x)]^2}$

Exercice 54

Résoudre dans IR chacune des équations proposées :

a) $e^{3-x}=1$

b) $e^{2x^2+3}=e^{7x}$

c) 2-$e^x=0$

d) $e^x+7=0$

e) $(e^x-2)(e^{-x}+1)=0$

f) $e^{2x}-2e^x-3=0$

g) $2e^{x} - 2e^{-x} - 3 = 0$

h) $e \times e^{x} = e^{\frac{2}{x}}$

Exercice 55

Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

a) $e^{x} - 3 \geq 0$

b) $e^{-x} - 4 > 0$

c) $e^{1-x} + 2 > 0$

d) $2e^{2x} - 3e^{x} - 2 \leq 0$

e) $(e^{x} - 3)(5 - e^{x}) \leq 0$

e) $\frac{e^{x}-1}{e^{x}-2} \geq 0$

Exercice 56

Etudier la limite de f à l'endroit indiqué :

a) $f(x) = \frac{e^{x}-1}{2x}$ en 0 , $+\infty$ et $-\infty$.

b) $f(x) = e^{2x} - e^{x} + 1$ en $+\infty$ et en $-\infty$

c) $f(x) = 2xe^{-x}$ en $+\infty$.

d) $f(x) = 2x - 1 + e^{-x}$ en $+\infty$ et en $-\infty$

e) $f(x) = \frac{e^{x}-1}{2e^{x}+1}$ en $+\infty$ et en $-\infty$

f) $f(x) = \frac{1}{x}(e^{2x} - 1)$ en 0 et en $+\infty$

g) $f(x) = \frac{e^{x}}{\ln x}$ en $+\infty$

h) $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{e^{x}-1}$ en 0

Exercice 57

Dans chacun des cas suivants, on admet que la fonction f est dérivable sur IR. Calculer la fonction dérivée de f.

a) $f(x) = e^{-2x+1}$ b) $f(x) = e^{x^2}$

c) $f(x) = e^x \ln x$ d) $f(x) = (1-x)e^{1-x}$

e) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ f) $f(x) = x^2 e^{-x}$.

Exercice 58

1) Dans chacun des cas suivants déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I

a) $f(x) = e^{-4x}$ b) $f(x) = xe^{x^2}$

c) $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$ d) $f(x) = x - 5 + 3e^{-2x+1}$

2) Soit les fonctions f et g définies sur IR par : $f(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ et $g(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$

a) Déterminer une primitive de f sur IR.

b) Déterminer une primitive de $f + g$ sur IR

c) En déduire une primitive de g sur IR.

ETUDE DE FONCTION COMPORTANT « ln » *ET* « Exp »

Exercice 59 **(Problème)**

Partie A

Soit la fonction h dérivable sur IR et définie par : $h(x) = 3 + (x-1)e^{-x}$.

1) Déterminer les limites de h en $+\infty$ et en $-\infty$

2- a) Démontrer que $\forall x \in IR, h'(x) = (2-x)e^{-x}$.

b) En déduire les variations de h et dresser son tableau de variations.

3) Démontrer que sur l'intervalle $]-\infty\,;2]$ l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α et que $-1 < \alpha < 0$.

4) En déduire que pour tout nombre réel x, $\begin{cases} h(x) < 0 \text{ si } x \in]-\infty\,;\, \alpha[\\ h(x) > 0 \text{ si } x \in]0\,;\, +\infty[\end{cases}$

Partie B

Soit la fonction numérique f définie sur IR par $f(x) = 3x + 1 - xe^{-x}$.

1) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$

2) Démontrer que pour tout nombre réel x, on a $f'(x) = h(x)$.

3) En déduire les variations de f et dresser son tableau de variations.

4)Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = 3x + 1$ est asymptote à (C_f) en $+\infty$.

5) Etudier la position relative de (C_f) et (Δ) .

6) Démontrer que (C_f) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

7) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0.

8) Dans un repère orthonormé (O , I , J) d'unité 2cm, tracer (C_f) , (Δ) et (T).

On prendra $\alpha = -0{,}6$ et $f(\alpha) = 0{,}3$

Exercice 60 **(Problème)**

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O , I , J) (unité 2 cm)

Partie A

On considère la fonction g dérivable sur IR et définie par $g(x) = x + 1 - e^x$.

1) Calculer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

2) Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in IR$.

3) Etudier suivant les valeurs de x le signe de $g'(x)$ puis dresser le tableau de variation de g.

En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B

On considère la fonction f dérivable sur IR et définie par $f(x) = 3(x^2 + x)e^{-x}$.

1-a) Calculer la limite de f en $+\infty$.

b) Calculer les limites des expressions $f(x)$ et $\frac{f(x)}{x}$ en $-\infty$.

c) Interpréter graphiquement les résultats des questions a) et b).

2-a) Démontrer que pour tout $x \in IR$, $f'(x) = 3(-x^2 + x + 1)e^{-x}$

b) Etudier suivant les valeurs de x le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.

On ne cherchera pas à calculer $f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ et $f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

3-a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0.

b) Démontrer que pour tout $x \in IR$, $f(x) - 3x = 3xe^{-x}g(x)$.

c) Déduire de la *partie A* la position relative de (C_f) par rapport à (T).

4) Tracer avec précision, dans le repère (O , I , J), la tangente (T) et la courbe (C_f).

On prendra $\sqrt{5} = 2,2$; $f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = -1,3$ et $f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 2,5$.

Exercice 61 **(Problème)**

Partie A

Soit g la fonction de IR vers IR définie par : $g(x) = 1+\frac{e^x}{e^x-1}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D_g de g et calculer les limites à ses bornes.

2) Résoudre dans IR l'équation $g(x) = 0$.

3) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

4) En déduire le signe de $g(x)$ suivant le valeurs de x.

Partie B

On considère la fonction f de IR vers IR définie par $f(x) = x + \ln(4|1 - e^x|)$

1) a- Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .

b- Déterminer les limites de f au bornes de D_f.

2) a- Justifier que $\begin{cases} \forall x \in]-\infty\,;0[, & f(x) = x + \ln 4 + \ln(1 - e^x) \\ \forall x \in]0\,;\,+\infty[, & f(x) = 2x + \ln 4 + \ln(1 - e^{-x}) \end{cases}$

b- Justifier que les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives : $y = x + \ln 4$ et $y = 2x + \ln 4$ sont asymptotes obliques à (C_f) respectivement en $-\infty$ et $+\infty$.

c- Calculer les coordonnées du point d'intersection A de (C_f) et (D_1) .

d- Etudier la position de (C_f) par rapport à (D_2) sur $]0\,;\,+\infty[$.

3) a- On admet que f est dérivable sur D_f. Vérifier que $\forall x \in D_f$, $f'(x) = g(x)$.

b- En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

4) Soit h la restriction de f à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

a- Justifier que l'équation $h(x) = 0$ admet dans $]0\,;\,+\infty[$ une solution unique α et que $0{,}18 < \alpha < 0{,}19$.

b- Calculer les valeurs exactes de $h(\ln 2)$ et $(h^{-1})'(\ln 8)$ où h^{-1} est la bijection réciproque de h.

5) Prouver que la courbe (C_f) coupe l'axe (OI) en deux points P et Q dont on déterminera les coordonnées. On prendra $x_P < x_Q$.

6) Tracer avec soin dans le repère $(O\,,I\,,J)$:

a- La courbe (C_f) et toutes ses asymptotes. On marquera les points A , P et Q.

b- La courbe (Γ) de h^{-1} et ses asymptotes.

Exercice 62 **(Problème)**

Partie A

On note g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = 1 + \dfrac{\ln x}{x}$

1)

a) Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition .

b) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

2)

a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $]0;+\infty[$ une solution unique α .
Déterminer un
encadrement de α d'amplitude 0,1.

b) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B

On note h_n la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $h_n(x) = x^2 - n + n\ln x$ où n est un entier naturel non nul.

1)

a) Calculer les limites de h_n aux bornes de son ensemble de définition.

b) Etudier les variations de h_n et dresser son tableau de variation.

c) Montrer que l'équation $h_n(x)=0$ admet une solution unique β_n et que cette solution appartient à l'intervalle $[1;3[$.

Partie C

Soit f_n la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f_n(x)=x-n-\dfrac{n\ln x}{x}$.

1)

a) Calculer les limites de f_n aux bornes de son ensemble de définition.

b) Démontrer la courbe représentative (C_n) de f_n admet un asymptote oblique (Δ_n) dont on précisera une équation.

c) Etudier les positions relatives de (C_n) et (Δ_n).

2)

a) Démontrer que pour tout $x\in\,]0;+\infty[$, $f_n'(x)=\dfrac{h_n(x)}{x^2}$.

b) En déduire les variations de f_n et dresser son tableau de variation ;

3)

a) Démontrer que pour tout $x\in\,]0;+\infty[$, $f_n(x)=x-ng(x)$

b) En déduire que toutes les courbes (C_n) passent par un point fixe A de coordonnées $(\alpha;\alpha)$

c) Etudier les positions relatives de (C_n) et (C_{n+1})

4) Construire dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité 2 cm les courbes (C_1) et (C_2).

CALCUL INTEGRAL

Exercice 63

Calculer les intégrales suivantes :

$I = \int_0^1 2t(t^2+1)dt$; $J = \int_2^1 \frac{t+1}{(t^2+2t)^2} dt$; $K = \int_1^{\frac{1}{2}} \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) dt$; $L = \int_0^1 e^{-3x+4} dx$.

$A = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$; $B = \int_2^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx$; $C = \int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{3x}{\sqrt{1+x^2}} dx$; $D = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx$

Exercice 64

1) Soit la fonction f définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2-1}{x+2}$.

Déterminer les réels a , b et c tels que pour tout élément x de $]-2\,;\,+\infty[$,

$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$.

En déduire l'intégrale $= \int_{-1}^0 f(x)dx$.

2) Soit la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x(x+1)^2}$

Déterminer les réels a , b et c tels que pour tout élément x de $]0\,;\,+\infty[$,

$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$.

En déduire l'intégrale $J = \int_1^2 g(x)dx$.

Exercice 65

Soit les intégrales $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$ et $I_2 = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx$.

1) Calculer I_1

2) Calculer $I_1 + I_2$. En déduire la valeur de I_2.

Exercice 66

Soit les intégrales $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+2\sin x} dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x} dx$

1) Calculer J.

2) Calculer $I + J$ et en déduire la valeur de I .

Exercice 67

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties , ou, au besoin deux intégrations par parties :

$E = \int_0^{-1} (1-t)e^t dt$; $F = \int_1^2 (t+3t^2)\ln t\, dt$; $G = \int_0^{\pi} t^2 \cos t\, dt$; $H = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)e^t dt$

Exercice 68

On pose $K = \int_0^{\pi} e^x \cos 2x\, dx$, $I = \int_0^{\pi} e^x \cos^2 x\, dx$ et $J = \int_0^{\pi} e^x \sin^2 x\, dx$

1) A l'aide d'une double intégration par parties, prouver que $K = \frac{e^{\pi}-1}{5}$

2)

a) Calculer $I + J$ et $-J$.

b) En déduire les valeurs de et J .

Exercice 69

L'objectif est de calculer les intégrales : $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$, $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} dx$ et

$K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\, dx$

1) Soit f la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 2}\,)$

a) Calculer la dérivée f' de .

b) En déduire la valeur de .

2)

a) Sans calculer explicitement et K , vérifier que $J + 2I = K$

b) A l'aide d'une intégration par parties portant sur K, prouver que $K = \sqrt{3} - J$

c) En déduire les valeurs de J et K.

Exercice 70

On considère les intégrales $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x}$.

1) Calculer *I*.

2) Soit la fonction *f* définie et dérivable sur $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$ par $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$.

a) démontrer que $f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$.

b) En déduire la valeur de l'intégrale *J*.

Exercice 71

Soit la fonction *f* définie sur IR par $f(x) = \int_1^x \frac{dt}{1+t^2}$ (On ne cherchera pas à calculer $f(x)$).

1)

a) Etudier le sens de variation de *f* sur IR.

b) En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de *x* sur IR.

2) Démontrer que $\forall x \geq 1$, $\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x}+1\right) \leq f(x) \leq -\frac{1}{x}+1$. On pourra utiliser les inégalités :

$\forall t \geq 1, \quad t^2 \leq 1 + t^2 \leq 2t^2$.

SUITES NUMERIQUES

Exercice 72

On pose $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ où n est un entier naturel non nul.

1) Calculer S_1 , S_2 , S_3 , S_4
2) Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n .
3) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel ≥ 1 , $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercice 73

(U_n) est la suite définie par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = 2U_n - 3$ pour tout entier naturel n non nul.

1) Déterminer U_1 , U_2 , U_3 , U_4 , U_5 et conjecturer l'expression de U_n en fonction de n .
2) Démontrer par récurrence cette conjecture.

Exercice 74

(U_n) est la suite définie par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \frac{U_n}{U_n+2}$ pour tout entier naturel n .

1) Déterminer U_1 , U_2 , U_3 , U_4 , U_5 et conjecturer l'expression de U_n en fonction de n.
2) Démontrer par récurrence cette conjecture.

Exercice 75

On considère la suite numérique (U_n) définie par : $U_0 = 1$ et $\forall n \in IN,\ 2U_{n+1} = U_n - 1$.

1) Calculer les cinq premiers termes de la suite (U_n).

2) Soit (V_n) la suite définie par : $\forall n \in IN,\ V_n = U_n + a$ où a est un nombre réel.

a) Déterminer le nombre a pour que (V_n) soit une suite géométrique.

b) En déduire l'expression de V_n, puis celle de U_n en fonction de n.

c) Etudier le sens de variation et la convergence de la suite (U_n).

d) Trouver le plus petit entier positif n tel que $U_n + 1 < 10^{-4}$.

3) Calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$ en fonction de n. En déduire $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$

Exercice 76

Soit la suite numérique (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ \forall n \in IN,\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 4 \end{cases}$

1) Calculer les quatre premiers termes de cette suite.

2) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $0 < U_n < 6$

3) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $U_n < U_{n+1}$

Qu'en déduire pour la suite (U_n) ?

4) Pour tout entier naturel n, on pose $V_n = U_n - 6$

a) Démontrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b) Déterminer l'expression de V_n en fonction de n, puis, en déduire celle de U_n en fonction de n.

c) Calculer les sommes $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$ et $S'_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$ en fonction de n.

Exercice 77

Soit la suite (U_n) définie par : $U_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = \frac{4U_n - 2}{U_n + 1}$.

1) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n > 1$

2) La suite V_n est définie pour tout entier naturel n par : $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 1}$.

a) Démonter que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b) Préciser la limite de la suite (V_n) .

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et préciser sa limite.

Exercice78

(U_n) et (V_n) sont les suites définie pour tout entier naturel n par :

$$U_0 = 3 \quad U_{n+1} = \frac{U_n}{1+U_n} \text{ et } V_n = \frac{1}{U_n}$$

1) démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n > 0$

2-a) Démontrer que la suite V_n est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

b) Calculer V_n , puis U_n en fonction de n.

c) En déduire la limite de la suite (U_n)

Exercice 79

On considère la suite numérique (U_n) définie par $U_0 = 1$ et $\forall n \in IN,\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + n - 1$.

Soit la suite (V_n) définie par : $\forall n \in IN,\ V_n = 4U_n - 6n + 15$.

1) Montrer que (V_n) est une suite géométrique.

2) Calculer V_0 puis V_n en fonction de n.

En déduire que $U_n = \frac{19}{4} \times \frac{1}{3^n} + \frac{6n-15}{4}$.

3) Montrer que $U_n = T_n + W_n$ où T_n est une suite géométrique et W_n une suite arithmétique .

4) Calculer en fonction de n chacune des sommes : $S_n = \sum_{k=0}^{n} T_k$, $S'_n = \sum_{k=0}^{n} W_k$. En déduire la somme

$$S''_n = \sum_{k=0}^{n} U_k .$$

Exercice 80

On définie la suite réelle (U_n) par $U_0 = 0$, $U_1 = a$ et pour tout

$n \in IN, U_{n+2} = pU_{n+1} - (p-1)U_n$, où $p \in IR_+ - \{0;1;2\}$ et $a \in IR^*$.

1) On pose pour tout $n \in IN$, $W_n = U_{n+1} - U_n$

Montrer que (W_n) est une suite géométrique et calculer W_n en fonction de p , n et a .

2) On pose pour tout $n \in IN$, $T_n = U_{n+1} - (p-1)U_n$.

Montrer que (T_n) est une suite constante et calculer T_n en fonction de a.

3) Calculer U_n en fonction de W_n et T_n, puis en fonction de p , n et a .

Exercice 81

1 .a) Calculer les 5 premiers termes de la suite (U_n) définie par $U_1 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in IN$,

$$U_{n+1} = \left(\frac{n+1}{2n}\right)U_n .$$

b) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in IN$, $U_n = \frac{n}{2^n}$.

2) k est un entier naturel non nul, (V_n) est la suite définie par $V_1 = \frac{1}{k}$ et

$$\forall n \in IN, \quad V_{n+1} = \left(\frac{n+1}{kn}\right)V_n .$$

Conjecturer l'expression de V_n en fonction de n et démontrer cette conjecture.

Exercice 82

On considère les deux suites (U_n) et (V_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$U_0 = 3 \quad et \quad U_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} \; ; \; V_0 = 4 \quad et \quad V_{n+1} = \frac{U_{n+1} + V_n}{2}.$$

1) Calculer U_1 , V_1 , U_2 , V_2.

2) On note (W_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $W_n = V_n - U_n$.

a) Démontrer que la suite (W_n) est géométrique et préciser sa raison.

b) Calculer W_n en fonction de n . Quelle est la limite de la suite (W_n) ?

3)

a) Démonter que la suite (U_n) est croissante et que la suite (V_n) est décroissante.

b) Démonter que pour tout entier naturel n, on a $U_n < V_n$.

c) En déduire que les suites (U_n) et (V_n) sont convergentes.

4) Soit (T_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $T_n = \frac{1}{3}(U_n + 2V_n)$.

a) Démontrer que la suite (T_n) est constante.

b) Déterminer la limite commune l des suites (U_n) et (V_n).

Exercice 83

La suite (U_n) est définie par : $U_1 = -1$ et pour tout entier naturel non nul n :

$$U_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)}U_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)}$$

1) Prouver par récurrence que la suite (U_n) est majorée par 3.

2) Etudier le sens de variation de (U_n) et en déduire que (U_n) est convergente.

3) Soit la suite (V_n) définie pour tout entier naturel non nul n par : $V_n = n(3-U_n)$.

Démontrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

4) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n , puis déterminer la limite de la suite (U_n).

Exercice 84

A) Partie préliminaire :

Démontrer que $\forall x \in [0\,;+\infty[,\quad x-\dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ (1).

B) Soit la suite (U_n) définie par : $U_1 = \dfrac{3}{2}$ *et* $\forall n \in I\!N^*, U_{n+1} = U_n\left(1+\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$.

1) Démontrer par récurrence que $\forall n \in I\!N^*, U_n \succ 0$.

2) Démontrer que $\forall n \in I\!N^*,\quad \ln U_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)$.

3) On pose $S_n = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}$ et $T_n = \dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4^2}+\cdots+\dfrac{1}{4^n}$

En utilisant (1) , démontrer que $S_n - \dfrac{1}{2}T_n \leq \ln U_n \leq S_n$.

4)

a) Calculer S_n et T_n en fonction de n .

b) En déduire les limites des suites S_n et T_n.

5)

a) Démontrer que la suite (U_n) est strictement croissante.

b) En déduire que (U_n) est convergente. On note l sa limite.

c) démontrer que $\dfrac{5}{6} \leq \ln l \leq 1$. En déduire un encadrement de l.

INTEGRALES & SUITES NUMERIQUES

Exercice 85

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = \int_1^e dx$ et , pour tout $n \in IN$, $U_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$.

1) Démontrer que la suite (U_n) est décroissante.

2) Démontrer que la suite (U_n) est convergente.

3)

a) A l'aide d'une intégration par parties, établir une relation entre U_{n+1} et U_n.

b) En déduire les valeurs des termes U_1 , U_2 et U_3.

Exercice 86

On considère les intégrales $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin x dx$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos x dx$, $n \in IN$.

1) Calculer I_0 et J_0.

2) Soit n un entier naturel non nul.

a) En intégrant par parties I_n , puis J_n, montrer que l'on a le système $\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-\frac{n\pi}{2}} \end{cases}$

b) En déduire les expressions de I_n et J_n en fonction de n.

3) Déterminer les limite de I_n et J_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 87

On pose $I_0 = \int_1^e x dx$, et , pour tout $n \in IN^*$, $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$.

1) Calculer I_0 et I_1 (Pour I_1, on utilisera l'intégration par parties)

2) Soit $n \in IN^*$. En intégrant I_n par parties, démontrer que $2I_n + nI_{n-1} = e^2$. Calculer I_2.

3) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

4) Démontrer que pour tout $n \in IN^*$, $\frac{e^2}{n+3} \le I_n \le \frac{e^2}{n+2}$. Calculer les limites des suite (I_n) et (nI_n).

Exercice 88

Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$ et pour tout $n \in IN^*$, $U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

1) soit *f* la fonction définie et dérivable sur $[0\,;1]$ par $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

Calculer $f'(x)$ et en déduire U_0.

2) Calculer U_1.

3) a) Démontrer que la suite (U_n) est décroissante. En déduire que (U_n) es convergente.

b) Montrer que $\forall x \in [0\,;1],\quad 1 \le \sqrt{1+x^2} \le \sqrt{2}$.

c) En déduire que pour tout $n \in IN^*$, $\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \le U_n \le \dfrac{1}{n+1}$.

Déterminer alors la limite de (U_n).

4) Pour tout entier $n \ge 3$, on pose $I_n = \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\,dx$.

a) Vérifier que pour tout entier $n \ge 3$, $U_n + U_{n-2} = I_n$.

b) A l'aide d'une intégration par parties sur I_n, montrer que

$\forall n \ge 3,\quad nU_n + (n-1)U_{n-2} = \sqrt{2}$.

c) En déduire que $\forall n \ge 3,\quad (2n-1)U_n \le \sqrt{2}$.

d) En utilisant 3) c) et 4) c), Montrer que la suite (nU_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 89

a est un nombre réel strictement positif donné.

1) Par une intégration par parties, démontrer que $\int_0^a te^t\,dt = ae^a - \int_0^a e^t\,dt$.

En déduire que $e^a = 1 + a + \int_0^a (a-t)e^t\,dt$.

2) Soit un entier $n \ge 1$. On pose $I_n = \int_0^a \dfrac{(a-t)^n}{n!}e^t\,dt$.

Démontrer que $I_n = \dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}$.

3) Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!} + I_n$.

4) a) Démontrer que $0 \leq I_n \leq \frac{a^n}{n!}(e^a - 1)$.

b) On pose $U_n = \frac{a^n}{n!}$. Calculer $\frac{U_{n+1}}{U_n}$.

Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$, on a $U_{n+1} \leq \frac{1}{2} U_n$

En déduire que pour tout $n \geq n_0$, $0 \leq U_n \leq U_{n_0}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}$.

c) En déduire les limites des suites I_n et U_n , puis montrer que

$$\lim_{x \to +\infty}(1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!}) = e^a$$

Exercice 90 : Bac C Côte d'Ivoire 2010

On se propose d'étudier la suite (U_n) des nombres réels, définie par :

$U_1 = 1 + \frac{1}{e}$ et pour tout entier naturel n, $\quad U_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{e^{n+1}}\right) U_n$

Dans cet exercice, on admettra que pour tout nombre réel t strictement positif, on a :

$t - \frac{t^2}{2} < \ln(1 + t) < t \qquad (1)$

Soit f la fonction numérique dérivable sur IR et définie par : $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$

1. En utilisant l'inégalité (1) , justifier que :

$\forall x \in IR, e^{-x} - \frac{e^{-2x}}{2} < f(x) < e^{-2x}$.

2. Démontrer que la suite (U_n) est strictement croissante.

3. Démontrer par récurrence que :

$\forall n \in IN^*, \ln(U_n) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$.

4. on pose : $a_n = \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \cdots + \frac{1}{e^n}$ *et* $b_n = \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^4} + \cdots + \frac{1}{e^{2n}}$.

a) A l'aide des questions **1. et 3.** , démontrer que :

$$a_n - \frac{1}{2} b_n < \ln(U_n) < a_n .$$

b) Justifier que : $\forall n \in IN^*, a_n = \frac{1-e^{-n}}{e-1}$.

c) Démontrer que la suite (U_n) est majorée.

En déduire que la suite (U_n) est convergente.

d) On note l la limite de la suite (U_n).

Démontrer que $\frac{2e+1}{2(e^2-1)} \leq \ln l \leq \frac{1}{e-1}$ puis en déduire une valeur approchée de l à 0,1 près.

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Exercice 90

Soit l'équation différentielle (E) : $y''-\frac{1}{4}y = -1+\frac{1}{2}(-8+3x)e^{-x}$.

1) Vérifier que la fonction g définie sur IR par $g(x) = 4+2xe^{-x}$ est solution de (E).

2) Démontrer qu'une fonction f définie et dérivable sur IR est solution de (E) si et seulement si la fonction $f-g$ est solution de l'équation différentielle (E_0) : $y''-\frac{1}{4}y = 0$

3) a) Résoudre (E_0)

b) En déduire les solutions de (E).

c) Déterminer la solution f de (E) vérifiant les conditions : $f(0) = 5 \quad et \quad f'(0) = \frac{3}{2}$.

Exercice 91

On considère sur IR l'équation différentielle (E) : $y'' - 4y = 2 - 4(x-1)^2$.
1) Démontrer qu'il existe un polynôme P du second degré, solution de (E) que l'on précisera.
2) Démontrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement $f - P$ est solution de l'équation différentielle (E'): $y'' - 4y = 0$.
3) Déterminer les solutions de (E') puis en déduire celles de (E).

Exercice 92

1) Déterminer une fonction g de la forme $x \longmapsto ae^{-x}$ telle que pour tout réel x on ait :

$$g'(x) + 3g(x) = 2e^{-x}$$

2) Montrer qu'une fonction f est solution de l'équation différentielle (E) : $y' + 3y = 2e^{-x}$

si et seulement si $f - g$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y' + 3y = 0$
3) Résoudre l'équation différentielle (E).

ALGEBRE ET GEOMETRIE

BARYCENTRES ET LIGNE DE NIVEAU

Exercice 93

Soit ABC un triangle et G le barycentre des points pondérés (A ;1) , (B ; 2) et (C ; 2).

Les droites (BG) et (CG) coupent les droites (AC) et (AB) respectivement en B' et C'.

1) En utilisant les barycentres partiels, démontrer que :

$2\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GB'} = \vec{0}$ et $2\overrightarrow{GC} + 3\overrightarrow{GC'} = \vec{0}$

2) En déduire que les droites (BC) et (B'C') sont parallèles.

Exercice 94

L'unité de longueur est le centimètre.

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 3, B' le milieu de [AC] et D le point tel que $4\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$

1) Démontrer que D est le barycentre du système $\{(\mathrm{A}\,;3), (\mathrm{B}\,; -2), (\mathrm{C}\,;3)\}$.

En déduire que D appartient à la médiatrice du segment [AC].

2) Démontrer que $\overrightarrow{BD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BB'}$

3) Calculer DA^2 et DB^2

4) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que $3\,\mathrm{MA}^2 - 2\,\mathrm{MB}^2 + 3\,\mathrm{MC}^2 = 12$

5) Démontrer que le centre de gravité G du triangle ABC appartient à (E). Tracer (E).

Exercice 95

On considère quatre points A , B , C et D tels que trois quelconques soit non alignés.
1) Démontrer que $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si D est le barycentre du système $\{(A;1);(B;-1);(C;1)\}$.
2) On suppose que $ABCD$ est un parallélogramme. Déterminer puis construire l'ensemble des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = BD$
3) On suppose que $ABCD$ est un rectangle.
a) Démontrer que pour tout point M du plan , on a $MA^2 - MB^2 + MC^2 = MD^2$.
b) Déterminer puis construire l'ensemble des points M du plan tels que
$MA^2 - MB^2 + MC^2 = BD^2$

Exercice 96

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $\mathrm{AB} = 2a$ et $\mathrm{AC} = a$, $(a > 0)$.
Soit I le milieu du segment [AB] et H le point tel que $\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.
1) Faire une figure.
2) Démontrer que H est le barycentre du système de points pondérés
$\{(\mathrm{A}\,;\,-3);(\mathrm{B}\,;1);(\mathrm{C}\,;4)\}$
3) Calculer AH^2 , BH^2 et CH^2 en fonction de a .
4) Soit (Γ_k) l'ensemble des points M du plan tels que $-3\mathrm{MA}^2 + \mathrm{MB}^2 + 4\mathrm{MC}^2 = ka^2$
a) Pour quelle valeur de k le point I est- il élément de (Γ_k) ?
b) Déterminer l'ensemble (Γ_6) des ponts M du plan tels que $-3\mathrm{MA}^2 + \mathrm{MB}^2 + 4\mathrm{MC}^2 = 6a^2$
c) Construire (Γ_6)

5) Pour tout nombre réel $m \neq -5$, on note G_m le barycentre du système
$\{(\mathrm{A}\,;\,m);(\mathrm{B}\,;1);(\mathrm{C}\,;4)\}$.

a) Déterminer le lieu géométrique (Δ) des points G_m lorsque m décrit l'ensemble $IR - \{-5\}$

b) Construire (Δ)

Exercice 97

ABC est un triangle rectangle en A tel que $\mathrm{AB} = a$ et $\mathrm{AC} = 2a$.

Le point I est le milieu du segment [AC] et G le barycentre du système $\{(\mathrm{A}\,;3), (\mathrm{B}\,, -2), (\mathrm{C}\,;1)\}$.

1) Construire le point G et préciser la nature du quadrilatère ABIG. Exprimer en fonction de a les distances GA , GB et GC ;

2) A tout point M du plan on associe le nombre réel $(\mathrm{M}) = 3\,\mathrm{MA}^2 - 2\,\mathrm{MB}^2 + \mathrm{MC}^2$.

a) Exprimer $f(\mathrm{M})$ en fonction de MG et de a .

b) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $f(\mathrm{M}) = 2\,a^2$.

3) A tout point M du plan, on associe maintenant le nombre réel :

$$h(\mathrm{M}) = 3\,\mathrm{MA}^2 - 2\,\mathrm{MB}^2 - \mathrm{MC}^2$$

a) Démontrer qu'il existe un vecteur $\vec{\mathrm{U}}$ non nul tel que : $h(\mathrm{M}) = \overrightarrow{\mathrm{MB}}.\vec{\mathrm{U}} - 2\,a^2$

b) On désigne par (Δ) l'ensemble des points M du plan tels que $h(\mathrm{M}) = -2\,a^2$

Vérifier que les points I et B appartiennent à (Δ) . Préciser la nature de (Δ) et le construire.

c) (Δ) et (Γ) sont sécantes en deux points E et F. Montrer que les triangles GEC et GFC sont équilatéraux.

Exercice 98

A , B , C sont trois points de l'espace et k un réel de l'intervalle $[-1\,;1]$

On note G_k le barycentre de $(A\,;k^2+1)$, $(B\,;k)$, $(C\,;-k)$.

1) Représenter les points A , B , C , le milieu I du segment $[BC]$ et construire les points G_1 et G_{-1}

2) a) Prouver que pour tout réel k de $[-1\,;1]$, on a : $\overrightarrow{AG_k}=-\dfrac{k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$.

b) Donner le tableau de variation de la fonction f définie sur $[-1\,;1]$ par $f(x)=-\dfrac{x}{x^2+1}$.

c) En déduire l'ensemble des points G_k lorsque k décrit $[-1\,;1]$.

3) Déterminer l'ensemble (Π) des points M de l'espace tels que

$$\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$$

4) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M de l'espace tels que

$$\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$$

5) L'espace est maintenant muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$. Les points A , B , C ont pour coordonnées respectives $(0\,;0\,;2)$, $(-1\,;2\,;1)$, $(-1\,;2\,;5)$.

Le point G_k et les ensembles (Π) et (Γ) sont définis comme ci – dessus.

a) Calculer les coordonnées de G_1 et G_{-1}.

Prouver que (Π) et (Γ) sont sécants.

b) Calculer le rayon du cercle (C) d'intersection de (Π) et (Γ).

Exercice 99 (Espace)

ABCD est un tétraèdre, I est le milieu du segment $[AB]$ et J celui du segment $[BC]$.

1) a) G_1 est le barycentre des points pondérés $(A\,;1)$, $(B\,;1)$, $(C\,;-1)$, $(D\,;1)$.

Exprimer $\overrightarrow{IG_1}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$.

b) G_2 est le barycentre des points pondérés $(A\,;1)$, $(B\,;1)$, $(D\,;2)$.

Exprimer $\overrightarrow{IG_2}$ en fonction de $\overrightarrow{ID}$.

c) Démontrer que G_2 est le milieu de $[JG_1]$.

d) Faire une figure et placer les points I , J , G_1 , G_2.

2) m est un réel. On note G_m le barycentre des points pondérés

$(A\,;1),(B\,;1),(C\,;m-2),(D\,;m)$ lorsqu'il existe.

a) Préciser l'ensemble (ε) des valeurs de m pour lesquelles G_m existe.

b) Exprimer en fonction de m les réels a et b tels que $m\overrightarrow{IG_m}=a\overrightarrow{IC}+b\overrightarrow{ID}$. En déduire que G_m appartient à un plan fixe (P).

c) Prouver que $m\overrightarrow{JG_m}$ est un vecteur constant. Préciser ce vecteur.

d) En déduire l'ensemble (F) des points G_m du plan (P) lorsque m décrit (ε)

LES NOMBRES COMPLEXES

Exercice 100 **Forme algébrique**

Ecrire chacun des nombres suivants sous la forme algébrique :

$(3+i)+(-7+4i)$; $(1+2i)(5-3i)$; $\frac{1}{2+3i}$; $\frac{(1-2i)^2(3+i)}{1-i}$.

Exercice 101

Résoudre dans l'ensemble C des nombres complexes chacune des équations suivantes

(Donner la ou les solution (s) sous forme algébrique)

a) $(1+i)z=3-i$

b) $2z+1-i=iz+2$

c) $(2z+1-i)(iz+3)=0$

d) $\frac{z+1}{z-1}=2i$

Exercice 102

Soit les nombres complexes $\alpha=\frac{3-i}{5+7i}$ et $\beta=\frac{3+i}{5-7i}$

Sans les calculer sous forme algébrique, montrer que $\alpha+\beta$ est un nombre réel et $\alpha-\beta$ est un nombre imaginaire pur.

Exercice 103

Résoudre dans l'ensemble C des nombres complexes l'équation :

$2iz + \bar{z} - 3 = 0$

(On pourra poser $z = x + iy$ où x et y sont des réels)

Exercice 104

Module d'un nombre complexe

Calculer en utilisant la définition et les propriétés du module :

$$\left|\frac{(4+i)(1+i)}{(1+2i)^2}\right|$$

Exercice 105

Affixe d'un point , affixe d'un vecteur.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{e_1}\,;\,\vec{e_2})$.

Soit les points A , B , C et D du plan d'affixes respectives $2+i$, $-3+2i$, $-1+i$ et 4 .

a) Placer ces points dans le repère

b) Démontrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

Exercice 106

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{e_1}\,;\,\vec{e_2})$.

a) Placer dans le repère les points E , F et G d'affixes respectives

$1+2i$, $3-i$ et $-1+5i$.

b) Démontrer que le point E est le milieu du segment [GF].

Exercice 107

Module et distance

Soit les points A , B et M d'affixes respectives $2 - i$, $-3 + 2i$ et z .

1) Traduire géométriquement (sous forme de distance de deux points) les modules suivants : $|z - 2 + i|$; $|z + 3 - 2i|$

2) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan d'affixe z tels que $|z - 2 + i| = 3$

3) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan d'affixe z tels que $|z - 2 + i| = |z + 3 - 2i|$

4) Construire les ensembles (Γ) et (E) dans le même repère :

Exercice 108

Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que :

a) $|z - 1 - i| = \sqrt{2}$

b) $|2z - 3 + 2i| = 4$

c) $|\bar{z} + i| = 2$

d) $\left|\frac{2iz+1}{2+2i}\right| = 2$

e) $|i\bar{z} - 1| = 2|z - 1|$

f) $\left|\frac{2iz-3+4i}{z+i}\right| = 1$

Exercice 109

Ecrire sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1 = -\sqrt{3} + i \ ; \ z_2 = 1 - i \ ; \ z_3 = \left(-\sqrt{3} + i\right)(1 - i) \ ; \ z_4 = \frac{1-i}{-\sqrt{3}+i} \ ;$$

$$z_5 = (1 - i)^3(-\sqrt{3} + i)^2$$

Exercice 110

Soit le nombre complexe $Z = \left(1 + i\sqrt{3}\right)(1 - i)$

1) Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe Z

2) Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe Z

3) Déduire des résultats précédents les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

Exercice 111

Ecrire sous forme exponentielle chacun des nombres complexes suivants :

$z_1 = 3i$; $z_2 = -2i$; $z_3 = -1$; $z_4 = \frac{1}{2}$; $z_5 = -\sqrt{2} + i\sqrt{6}$ $z_6 = \frac{(1+i\sqrt{3})^4(1+i)}{-\sqrt{3}-i}$

Exercice 112

Ecrire les nombres complexes suivants sous forme exponentielle :

a) $\sqrt{2}\left(\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}\right)$; b) $\left(\frac{i}{1-i}\right)^4$; c) $\frac{(\sqrt{3}-i)^5(1+i)}{1+i\sqrt{3}}$; d) $(1+i)^{2005}$

Exercice 113

$\theta \in]0\,;\,\pi]$. Ecrire les nombres complexes suivants sou forme exponentielle :

a) $1 + \cos\theta - i\sin\theta$; b) $\cos\theta + i(\,1 + \sin\theta)$

Exercice 114

Soit $z = \frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}$ où θ est un nombre réel distinct de $k\pi$, $k \in Z$

Démontrer que z est un nombre imaginaire pur.

Exercice 115

Déterminer sous forme exponentielle les solutions dans C de l'équation $z^3 = -8i$:

Exercice 116

1) Déterminer sous forme exponentielle les solutions dans C de l'équation $z^4 + 1 = 0$ et vérifier que ces solutions sont deux à deux conjuguées.

2) représenter les points images de ces solutions dans le repère ci - dessous :

3) En déduire une factorisation du polynôme $P(z) = z^4 + 1$ en produit de quatre polynômes du premier degré , puis en produit de deux polynômes du second degré à coefficient réels.

Exercice 117

1) Déterminer sous forme algébrique les solutions dans C de l'équation $z^4 = 1$

2) En déduire les solutions dans C de l'équation $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^4 = 1$

Exercice 118

Soit l'équation (E) : $z \in \mathrm{C}$, $z^3 + (3-2i)z^2 + (3-7i)z - 2 - 6i = 0$.

1) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.

2) Résoudre (E).

Exercice 119

1) Calculer sous forme algébrique le nombre complexe $(7-3i)^2$.

2) Résoudre dans C l'équation $z^2 - (1+i)z - 10 + 11i = 0$

3) Soit le polynôme P défini par : $P(z) = z^3 - z^2 + (-9 + 10i)z - 11 - 10i$

a) Calculer $P(-i\,)$
b) Déterminer les nombres complexes a et b tels que $P(z) = (z + i)(z^2 + az + b)$
c) Résoudre dans C l'équation $P(z) = 0$

Exercice 120

1) Résoudre dans C l'équation $z^2 - 4iz - 4 + 2i = 0$

2) Soit le polynôme P de la variable complexe z défini par :

$P(z) = z^3 + 4(1 - i)z^2 - 2(2 + 7i)z - 16 + 8i = 0$ et l'équation (E) : $P(z) = 0$

a) Démontrer que l'équation (E) admet une solution réelle z_0 que l'on précisera.

b) Déterminer le polynôme Q tel que $P(z) = (z - z_0)Q(z)$

c) Résoudre dans C l'équation (E).

3) Soit les points A , B et C du plan d'affixes respectives $-1 + 3i$, $1 + i$ et -4 .

a) Placer ces points dans repère orthonormé direct d'unité 1 cm.

b) Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

Exercice 121

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$ d'unité 1 cm.

On considère dans C l'équation (E) : $z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i = 0$.

1) Démontrer que (E) admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on précisera.

2) Déterminer les nombres complexes a et b tels que

$$z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i = (z - z_0)(z^2 + az + b)$$

3) Résoudre l'équation (E) .

4) Soit A , B et C les points d'affixes respectives $4+i$, $4-i$ et $-i$.

a) Placer ces points dans le repère $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$

b) Ω est le point d'affixe 2. Calculer l'affixe du point S tel que ΩAS soit un triangle isocèle et rectangle en Ω de sens direct.

c) Démontrer que les points B , A , S et C appartiennent à un même cercle (Γ) dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 122

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$ d'unité 1 cm.

On considère les points I ; A , B , C , E et G d'affixes respectives : 1 ; 3 ; $2+i\sqrt{3}$; -1 ; 7 et $11+4i\sqrt{3}$

1) Démontrer que le triangle IAB est équilatéral.

2) Démontrer que les points B ,C et G sont alignés.

3)

a) Placer les points I , A , B , C , E et G .

b) Calculer l'affixe du point F de l'axe des abscisses tels que le triangle EFG soit équilatéral.

Exercice 123

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{e_1}\ ;\ \vec{e_2})$ d'unité 2 cm.

A est le point d'affixe $-2-i$. On considère l'application f du plan P privé de A dans P, qui à tout point M du plan distinct de A associe le point M′ d'affixe $z' = \frac{z-i}{z+2+i}$.

1) On pose $z = x+iy$, avec x et y réels .

a) Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y .

b) En déduire que l'ensemble (Γ) des points M du plan d'affixe z tel que z' soit imaginaire pur, est le cercle de centre le point $K(-1\ ;0)$, de rayon $\sqrt{2}$, privé du point A.

c) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan d'affixe z tels que z' soit un nombre réel.

d) Construire les ensembles (Γ) et (E) dans le repère $(O\ ;\ \vec{e_1}\ ;\ \vec{e_2})$

Exercice 124

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{e_1}\,;\,\vec{e_2})$ d'unité 2 cm.

A et B sont les points d'affixes respectives $-1+2i$ et $1-i$.

A Tout point M du plan distinct de A , d'affixe z , on associe le point M′ d'affixe z' tel que

$$z' = \frac{z-1+i}{z+1-2i}$$

1) Déterminer géométriquement l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z tels que z' soit un nombre imaginaire pur.

2) Déterminer géométriquement l'ensemble (D) des points M du plan d'affixes z tels que z' soit un nombre réel.

3) Déterminer géométriquement l'ensemble (Δ) des points M du plan d'affixes z tels que M′ soit sur le cercle trigonométrique.

4) Construire les ensemble (Γ) , (D) et (Δ) dans le repère $(O\,;\,\vec{e_1}\,;\,\vec{e_2})$.

Exercice 125

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{e_1}\,;\,\vec{e_2})$ d'unité 2 cm.

Soit A , B , C et D les points du plan d'affixes respectives :

$z_A = 2-2i$, $z_B = -1+7i$, $z_C = 4+2i$ et $z_D = -4-2i$

1) placer ces points dans le repère.

2) On pose $Q_1 = \dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ et $Q_2 = \dfrac{z_B - z_D}{z_A - z_D}$

a) Calculer les nombres complexes Q_1 et Q_2 sous forme algébrique.

b) En déduire que les points A , B , C et D sont cocycliques.

3) Soit Ω le point d'affixe $-1+2i$. Démontrer que Ω est le centre du cercle passant par les points A , B , C et D.

Exercice 126

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,,\vec{e_1}\,,\,\vec{e_2})$ d'unité 4 cm.

A , B et C sont les points d'affixes respectives i , $1+i$ et $-1+i$.

On considère la fonction f du plan dans lui-même qui à tout point M distinct de A, d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{iz+2}{z-i}$

1-a) Calculer les affixes des points B' et C' , images des points B et C par f .

b) Prouver que pour tout nombre complexe $\neq i$, $(z'-i)(z-i)=1$

c) D est le point d'affixe $1+2i$.

Placer les points A , B , C et D dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

Déduire de la question précédente une construction de l'image D' du point D par .

2) Soit r un nombre réel strictement positif.

Déterminer l'image par f du cercle de centre A et de rayon r.

3-a) Prouver que la droite $(O ; \vec{e_2})$ privée du point A est globalement invariante par .

b) On note (D) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{e_1}$. Déterminer l'image par f de la droite (D) privée du point A.

Exercice 127

1) Résoudre dans C l'équation $z^2 - 4iz - 4 + 2i = 0$.

2) On considère le polynôme P défini par $P(z) = z^3 + 4(1-i)z^2 - 2(2+7i)z - 16 + 8i$.

a) Vérifier que $P(-4) = 0$.

Déterminer les nombres complexes a , b et c tels que $P(z) = (z+4)(z^2 + az + b)$

c) Résoudre dans C l'équation (E) : $P(z) = 0$.

3) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ d'unité 2 cm.

Soit A , B et C trois points du plan d'affixes respectives $-1+3i$, $1+i$ et -4.

a) Placer les points A , B et C et le milieu I de [BC].

b) Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

4-a) Déterminer l'affixe du barycentre G des points pondérés (A , 4) , (B , 3) et (C , 5).

Construire G.

b) En déduire les affixes des vecteurs $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$.

c) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que

$\|4\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 5\overrightarrow{MC}\| = \|4\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\|$.

5) On considère l'application h du plan définie par :

$h(\mathrm{M}) = \overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{MB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MC}} + 3\overrightarrow{\mathrm{MC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MA}}$.

On désigne par (H) l'ensemble des points M du plan tels que $h(\mathrm{M}) = 18$

a) Calculer $h(\mathrm{G})$

b) Vérifier que $\mathrm{C} \in$ (H).

c) Démontrer que pour tout point M du plan on a : $h(\mathrm{M}) = 6\mathrm{MG}^2 + h(\mathrm{G})$

d) Déterminer et construire l'ensemble (H).

Exercice 128

$(\mathrm{O}, \overrightarrow{\mathrm{e_1}}, \overrightarrow{\mathrm{e_2}})$ est un repère orthonormé direct du plan complexe.

U et V sont les points du plan d'affixes respectives 1 et i.

On rappelle que si A, B, C sont trois points distincts du plan d'affixes respectives a, b, c alors

$$mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}}\right) \equiv arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) [2\pi]$$

Déterminer l'ensemble des points M du plan, d'affixe z tels que $\frac{z-i}{z-1}$ soit un nombre imaginaire pur non nul.

On considère dans le plan les points U, M, M', P d'affixes respectives $1, z, z', zz'$.

Démontrer que les points M, M' et P sont deux à deux distincts.

Démontrer que pour tous nombres complexes z et z' vérifiant les conditions de la question précédente, on a :

$$arg\left(\frac{zz'-z'}{zz'-z}\right) \equiv arg\left(\frac{z'}{z'-1}\right) + arg\left(\frac{z}{z-1}\right) [2\pi]$$

En déduire que les points M, M' et P sont alignés si et seulement si les points O, U, M et M'

Sont cocycliques ou alignés.

Exercice 129

I) Soit le polynôme P à variable complexe définie par

$P(z) = z^3 - (4+6i)z^2 + (-7+16i)z + 16 - 2i$

1) Calculer $P(2i)$.

2) Déterminer les nombres complexes a , b et c tels que $P(z) = (z-2i)(az^2 + bz + c)$

3) Résoudre dans C l'équation $P(z) = 0$

II) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité 1 cm , on considère

les points Ω, A et B les points d'affixes respectives $2i$, 2 + 3i et 2 + i .

1) Faire une figure que l'on complétera au cours de l'exercice.

2) Justifier que le symétrique C du point A par rapport à Ω a pour affixe -2 + i .

3) Déterminer l'affixe du point E tel que ΩAE soit un triangle isocèle et rectangle en Ω de sens direct.

4)

a) Placer C et E dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.

b) Démontrer que les points A , B , C et E appartiennent à un même cercle (Γ) dont précisera le centre et le rayon.

c) Tracer (Γ).

5) A tout point M d'affixe $z \neq 2i$, on associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' = \frac{(-2+3i)z + 16 + 4i}{z - 2i}$$

a) Déterminer les points A' , B' et C' respectivement associé aux points A , B , C .

Vérifier que le triangle $A'B'C'$ est rectangle en B'.

6-a) Démontrer que pour tout nombre complexe $z \neq 2i$, on a :

$$|z' + 2 - 3i| \times |z - 2i| = 10$$

b) En déduire le lieu géométrique de points M' lorsque M décrit (Γ).

Exercice 130

Soit A et B les points du plan d'affixes respectives $-2i$ et $1+i$.

1) Déterminer l'écriture complexe de la translation t de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

2) Soit la droite (D) d'équation $y = x + 2$. Déterminer une équation de la droite (D') image de (D) par la translation t .

NOMBRES COMPLEXES ET TRANSFORMATIONS DU PLAN

Exercice 131

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct, on considère les points A, B , C et D d'affixes respectives $1+i, 3-2i, 4-2i$ *et* $1-4i$

On admet qu'il existe une unique rotation R tels que $R(A) = C$ et $R(B) = D$.

1) Déterminer l'écriture complexe de R .
2) En déduire les éléments caractéristiques de R .

Exercice 132

Le plan est muni d'un repère orthonormée direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

On donne les points $A(4;-1)$; $B\left(1+\sqrt{3}\,;2+\sqrt{3}\right)$; $C\left(2-2\sqrt{3}\,;1\right)$; $D(0\,;\,-1)$

On désigne par a , b , c et d les affixes des ponts A , B , C , D

1) Démontrer que $\dfrac{a-c}{d-c} = \left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right)(1+i)$

On admettra que $\dfrac{a-b}{d-b} = \left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right)(1+i)$

2) Déduire des résultats précédents les mesures respectives des angles $\left(\widehat{\overrightarrow{CD}\,;\,\overrightarrow{CA}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{BD}\,;\,\overrightarrow{BA}}\right)$

Démontrer que les points A , B , C , D sont sur un même cercle (C).

Construire son centre Ω, puis dessiner (C).

3) On considère la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$

Quelle est l'image de D par cette rotation ?

En utilisant l'expression complexe de cette rotation, trouver l'affixe du point **Ω**.

ISOMETRIES DU PLAN

Exercice 133

ABCD est un carré de sens direct et de centre O. E , F , G , H sont les milieux respectifs des segments [DA] , [AB] , [BC] et [CD].

1) Faire une figure

2) déterminer la nature et les éléments caractéristiques de chacune des composées suivantes :

$S_{(AC)} \circ S_{(FH)}$; $S_{(AD)} \circ S_{(EG)}$; $S_{(EF)} \circ S_{(BD)}$; $S_{(AC)} \circ S_{(OC)}$

Exercice 134

ABC est un triangle équilatéral de sens direct et de centre O. A′ , B′ et C′ sont les milieux respectif des segments [BC] , [CA] et [AB] . La droite (d) parallèle à (CC′) passant par B coupe (B′C′) en K.

1) Déterminer la droite (Δ) dans chacun des cas suivants :

a) $R_{(O\,;\,\frac{2\pi}{3})} = S_{(\Delta)} \circ S_{(AO)}$

b) $R_{(B\,;\,-\frac{\pi}{3})} = S_{(OB)} \circ S_{(\Delta)}$

c) $R_{(O\,;\,-\frac{2\pi}{3})} = S_{(\Delta)} \circ S_{(OC)}$

2) soit les rotations $R_{(A\,;\,\frac{\pi}{3})}$ et $R_{(O\,;\,-\frac{2\pi}{3})}$

a) Déterminer les droites (d_1) et (d_2) tels que :

$$R_{(A\,;\frac{\pi}{3})} = S_{(d_2)} \circ S_{(AO)} \quad \text{et} \quad R_{(O\,;-\frac{2\pi}{3})} = S_{(AO)} \circ S_{(d_1)}$$

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la composée

$R_{(A\,;\frac{\pi}{3})} \circ R_{(O\,;-\frac{2\pi}{3})}$

Exercice 135

Dans le plan orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, deux points *A* et *B* ont pour coordonnées respectives $(-a;0)$ et $(a;0)$ où *a* est un nombre réel strictement positif.

r_A est la rotation de centre *A*, d'angle $\frac{\pi}{3}$ et r_B la rotation de centre *B*, d'angle $\frac{-2\pi}{3}$.

Pour tout point M du plan on note $M_A = r_A(M)$ *et* $M_B = r_B(M)$

1) M étant un point donné dans le repère $(O;\vec{u};\vec{v})$, distinct de *A* et *B* , construire M_A *et* M_B.

2-a) Déterminer la nature de la transformation $r_B \circ r_A^{-1}$

b) En déduire que le milieu du segment $[M_A M_B]$ est un point Ω indépendant du choix de M

3- a) Déterminer l'affixe du point A', image de *A* par $r_B \circ r_A^{-1}$.

b) En déduire l'affixe du point Ω.

Exercice 136

Dans le plan orienté, on considère un triangle rectangle isocèle *ABC* tel que

$$mes(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi].$$

Soit *I* le milieu de [*BC*]. On note R_B la rotation de centre *B* et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et R_C la rotation de centre *C* et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On note *T* la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

On se propose de trouver par deux méthodes la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $S = R_C \circ T \circ R_B$.

1) Première méthode. (Utilisation des nombres complexes)

On rapporte au plan le repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

a) Donner l'écriture complexe des transformations R_B, R_C, T puis S.

b) Caractériser alors S.

2) Deuxième méthode (Propriétés géométriques d'une transformation)

a) Déterminer sans calcul la nature de S.

b) Préciser l'image de B par S.

c) Caractériser S.

Exercice 137

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. Unité graphique : 4 cm.

Soit A, B et C Les points du plan d'affixes respectives $Z_A = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, $Z_B = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $Z_C = 1 + i$.

1) Démontrer que ABC est un triangle équilatéral de sens direct.

2- a) Placer les points A , B et C dans le repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ et construire sur la même figure les points E , F et G, milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$.

Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $mes(\overrightarrow{MG}, \overrightarrow{MA}) \equiv \frac{\pi}{3} [\pi]$.

(On pourra vérifier que E appartient à (Γ))

b) Déterminer et construire l'ensemble (Γ') des points M du plan tels que

$2MB^2 + 2MF^2 - ME^2 = FB^2$. (On pourra vérifier que B appartient à (Γ').

c) Justifier qu'il existe une unique rotation R et une unique symétrie glissée S telles que

$$R(A) = S(A) = F \text{ et } R(G) = S(G) = B.$$

d) Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes $\frac{Z_F - Z_E}{Z_A - Z_E}$ et $\frac{Z_B - Z_E}{Z_G - Z_E}$.

En déduire les éléments caractéristiques de R.

e) Ecrire S comme composée de la rotation R et d'une symétrie orthogonale dont on précisera l'axe.

e) Déterminer les images de (Γ) par R et par S.

Exercice 138

Dans le plan orienté, On donne un triangle ABC de sens direct.
On considère extérieurement au triangle les carrées ACRS et BAMN,
puis le parallélogramme MASD dont on notera le centre I.
Le but de l'exercice est de montrer que la droite (AD) est
une hauteur du triangle ABC et que AD = BC.
Pour cela on propose deux méthodes.

1) Méthode géométrique

On considère la rotation r de centre A, d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Déterminer les images des points M et C par r.

b) On note S' l'image de S par r. Montrer que A est le milieu de [C S'].

c) On note I' l'Image de I par r. Montrer que I' est le milieu de [BS'].

d) En déduire que (AD) est perpendiculaire à (BC) et que $AD = BC$

2) Utilisation des nombres complexes

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct. On désigne par a , b et c les affixes respectives des points A , B et C.

a) Calculer les affixes des points S et M en fonction de a , b et c.

b) Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$.

d) Montrer que $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux et que $AD = BC$.

Exercice 139

Dans le plan orienté on considère un triangle ABC de sens direct.

$ACDE$ est le carré tel que $mes\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.On désigne par O son centre.

AFBG est le carré tel que $mes\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$. On désigne par *O'* son centre .

I et *J* son les milieux respectifs des segments [*BC*] et [*EF*].

1) En utilisant la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, démontrer que $mes\left(\overrightarrow{FC},\overrightarrow{BE}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

et que *FC* = *BE*.

2) En déduire que le triangle *OIO'* est un triangle rectangle et isocèle.

3) Démontrer que *JO'IO* est un carré.

Exercice 140

Dans le plan orienté, Soit *ABC* un triangle équilatéral de sens direct. *I* est le milieu de [*BC*] et *J* est le point tel que *B* soit le milieu de [*JC*]. r_1 est la rotation de centre *A* et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et r_2 la rotation de centre *B* et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

1) Soit *A'* et *B'* les images respectives de *A* et *B* par la transformation $r_2 \circ r_1$. Démontrer que *I* est le milieu de [*AA'*] et *B* le milieu de [*AB'*].

2) En précisant la nature de $r_2 \circ r_1^{-1}$, Démontrer que pour tout point *M* du plan, *I* est le milieu de $[M_1M_2]$, où M_1 est l'image de *M* par r_1 et M_2 l'image de *M* par r_2 .

Exercice 141

Soit *ACE* un triangle rectangle en *C* tel que $mes\ (\widehat{\overrightarrow{AE}\ ;\ \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

On désigne par *B* le milieu de [*AE*], *D* l'image de *C* par la symétrie orthogonale d'axe (*AE*), *I* le milieu de [*DE*], *J* le milieu de [*AB*] et *K* le milieu de [*DB*].

1) Faire une figure (prendre *AC* = 4 cm)

2) Soit S la similitude directe de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ qui transforme A en B.

a) Démontrer que $S(E) = D$

b) Démontrer que le centre O de S appartient aux cercles circonscrits des triangles ABC et DBE. Construire O.

c) Justifier que l'image de (AC) par S est (CB), et celle du cercle circonscrit à ACE est le cercle de diamètre $[BD]$. En déduire l'image de C par la similitude S.

3-a) Justifier qu'il existe une rotation R et une symétrie glissée g telles que

$R(B) = g(B) = A$ et $R(E) = g(E) = D$.

b) Déterminer les éléments caractéristiques de chacune de ces deux transformations.

4) Calculer $SoR(B)$, en déduire la nature et les éléments caractéristiques de SoR

Exercice 142 **(Bac C 2008 Côte d'Ivoire)**

Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct. On désigne par G le barycentre des points pondérés $(A\,;1)$, $(B\,;1)$ et $(C\,;\,-1)$. Pour la figure prendre comme unité de longueur le centimètre et $AB = 6$. Cette figure sera complétée au fur et à mesure.

1. Démontrer que le quadrilatère $ACBG$ est un losange.

2. a) On appelle O le centre du losange $ACBG$. E est le symétrique de O par rapport à B. Le point F est l'image de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$. Construire les points E et F.
   b) Démontrer que F est l'image de G par la translation de vecteur $\overrightarrow{BE}$.

3. On note $t = t_{\overrightarrow{BE}} \circ t_{\overrightarrow{CB}}$
   a) Déterminer les images des points A et C par t.
   b) K est l'image de B par t. Démontrer que le point K appartient à la droite (GF). Construire K.
   c) Déterminer l'image du triangle ABC par t.

4. On note : $f = t \circ S_{(OC)}$ où $S_{(OC)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (OC)
   a) Déterminer l'image du triangle ABC par f.
   b) Démontrer que f est une symétrie glissée.
   c) Soit $S_{(BF)}$ la symétrie orthogonale d'axe (BF). Démontrer que $S_{(OC)} = t_{\overrightarrow{EO}} \circ S_{(BF)}$
   d) En déduire les éléments caractéristiques de f.

SIMILITUDES DIRECTES DU PLAN

Exercice 143

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ (unité 1 cm).

1) Déterminer les racines cubiques dans C du nombre complexe 216 et les écrire sous forme exponentielle.

On appelle A , B et C les points images de ces racines, A étant le point dont l'affixe est réel et B le point dont l'affixe a une partie imaginaire positive. Placer ces points dans le repère.

2) Soit les points D , E et F d'affixes respectives $3+i\sqrt{3}$, $-3+i\sqrt{3}$ et $-2i\sqrt{3}$.

a) Montrer que D appartient à la droite (AB). Placer D.

b) Sur quelle droite se trouve E ? Placer E .

c) Montrer que F appartient à la droite (AC). Placer F .

3) Montrer qu'il existe une similitude directe S unique transformant A en D et B en E et déterminer son expression complexe.

Déterminer les éléments caractéristiques de S .

Vérifier que S transforme C en F .

Exercice 144

Le pan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O\,;\vec{u}\,;\vec{v}\right)$.

1) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan d'affixe z tels que

$$\left|(1-i\sqrt{3})z-\sqrt{3}-i\right|=4$$

2) Sot A , B e B' les points d'affixes respectives i , $\sqrt{3}$ et $-4i$.

Déterminer l'écriture complexe de la similitudes directe S qui transforme A en O et B en B'.

Préciser le centre, le rapport et l'angle de S.

3) En utilisant les résultats établis au 2) retrouver l'ensemble (Γ) défini au 1).

Exercice 145

Soit d un réel strictement positif.

Dans le plan orienté, on considère un carré $OABC$ De centre I tel que :

$$mes\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \quad et \quad OA=d$$

J est le milieu de $[OI]$.

1) Faire une figure.

Soit la similitudes directe plane *f* telle que $f(O)=I \quad et \quad f(A)=J$.

a) Déterminer l'angle et le rapport de f .

b) Construire le point $C'=f(C)$ et déterminer $f(B)$

c) Soit Ω le centre de la similitude direct f . Démontrer que les points (Ω, O, I, C) d'une part et (Ω, O, A, J) d'autre part sont cocycliques.

En déduire une construction de Ω.

d) Démontrer que les droites $(O\Omega)$ et (ΩC) sont orthogonales.

2) Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ tel que *A* ait pour affixe *d*.

Déterminer l'écriture complexe de *f*.

Exercice 146

Soit O , A et B trois points distincts du plan. On note θ une mesure en radian de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB})$. On suppose que $\theta \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

On considère les rectangles $OPQA$ et $OBRS$ tels que $mes(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OP}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$, $OP=2OA$ et $mes(\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OS}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$, $OS=\frac{OB}{2}$.

Le but de l'exercice est de montrer que les droites (PB) et (QR) se coupent en un point que l'on note I et que I appartient au cercle circonscrit au rectangle $OBRS$

1) Faire une figure avec les éléments cités ci – dessus .

2) Soit *f* la similitude directe de centre O , d'angle orienté de mesure $\theta+\frac{\pi}{2}$ et de rapport $k=\frac{OB}{2OA}$.

a) Déterminer les images par *f* des points O , P , A et en déduire celle du point Q.

b) Grâce à ce qui précède, comparer les angles $(\overrightarrow{OP}\,;\overrightarrow{OQ})$ et $(\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OR})$, ainsi que les rapports

$$\frac{OQ}{OP} \quad et \quad \frac{OR}{OB}$$

3) On muni le plan d'un repère orthonormé direct dont l'origine est le point *O*. On note z_P , z_Q , z_B , z_R les affixes respectives des points *P* , *Q* , *B* , *R*.

a) Montrer que $\dfrac{z_Q}{z_P} = \dfrac{z_R}{z_B}$

b) Démontrer que l'égalité $\dfrac{z_R}{z_B} = \dfrac{z_R - z_Q}{z_B - z_P}$ équivaut à celle démontrée à la question précédente.

c) En déduire l'existence du point *I* et la cocyclicité des points *O* , *I* , *B* , *R*.

Exercice 147

Dans le plan orienté, on considère le triangle *ABC* rectangle en *B* tel que $mes\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$.

I , *E* , *J* sont les milieux respectifs des segments [*AB*] , [*AC*] et [*EC*].

1) Montrer qu'il existe une rotation *r* transformant *A* en *E* et *B* en *C*.

Préciser son angle ; Construire son centre *O* en justifiant la construction.

Dans la suite de l'exercice, *k* désigne un nombre réel, *M* et *M'* sont les points définis par $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{EM'} = k\overrightarrow{EC}$.

2) a) Préciser la position de *M* et *M'* pour $k = 0$, $k = \dfrac{1}{2}$ et $k = 2$.

Le réel *k* est désormais quelconque.

b) Démontrer que *M* est le barycentre du système $\{(A\,;1-k)\,;(B\,;k)\}$.

c) En déduire que $M' = r(M)$, puis, préciser la nature du triangle *OMM'* .

d) Montrer que les points *O* , *A* , *M* et *M'* sont cocycliques.

3) Soit *N* le centre du cercle circonscrit au triangle *OMM'* .

a) Montrer que *N* est l'image de *M* par une similitude directe de centre *O* dont on précisera l'angle et le

rapport.

b) Quel est l'ensemble des points N lorsque M décrit la droite (AB) ? Construire cet ensemble.

Exercice 148 **(Bac C 2005 Côte d'Ivoire)**

L'unité de longueur est le centimètre.

A et B sont deux points du plan tels que $AB = 6$.

G_1 est le barycentre des points pondérés (A ; 1) et (B ; 3)

G_2 est le barycentre des points pondérés (A ; 1) et (B ; -3).

1. a) Construire les points G_1 et G_2

b) Démontrer que l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $MA^2 - 9MB^2 = 0$ est le cercle de diamètre $[G_1G_2]$

c) Construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{MA}\,;\,\overrightarrow{MB}}\right) = \frac{\pi}{3}$

2. Soit C l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$

D l'image du point B par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{2}{3}$

S la similitude directe qui applique A sur B et C sur D

a) Construire les points C et D

b) Calculer le rapport de S .

c) Justifier qu'une mesure de l'angle de S est $\frac{\pi}{3}$

3. On note Ω le centre de S .

a) Démontrer que Ω appartient à (Γ) et à (E). Placer Ω.

b) Démontrer que $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AC}\,;\,\overrightarrow{AD}}\right) = \frac{-2\pi}{3}$.

c) En déduire que les points A , C , D et Ω appartiennent à un même cercle (C). Construire (C).

Exercice 149 **(Bac C 2009 Côte d'Ivoire)**

OAB est un triangle rectangle isocèle en O tel que $\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

On désigne par I le milieu du segment $[AB]$, par (C) le cercle de centre O et de rayon OA et par (Γ) le cercle de diamètre $[AB]$. Le point D est l'intersection du cercle (C) et de la demi droite $[IO)$. On note J le point d'intersection de la demi droite $[DB)$ et du cercle (Γ).

1-a) Faire une figure.

b) Justifier que mes $\left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

c) Démontrer que le triangle DAJ est rectangle isocèle en J et de sens direct.
Démontrer que la droite (OJ) est la médiatrice du segment $[AD]$

2) Soit S la similitude directe de centre A telle que $S(I) = O$

a) Déterminer le rapport k et l'angle θ de S.

b) Soit H le milieu du segment $[JA]$ et K le point d'intersection de la droite (OJ) avec la droite (AD)
Démontrer que $S(H) = K$.

c) Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{KI},\overrightarrow{KJ}}\right)$.

3) Déterminer l'image du cercle (Γ) par S.

LES CONIQUES

Exercice 150

Dans chacun des cas $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ est un repère orthonormé du plan. Déterminer une équation cartésienne de la conique (Γ) et la représenter :

1) (Γ) est une parabole :

a) De foyer $F(3\,;2)$ et de directrice la droite (D) d'équation $x = 1$.

b) De foyer $F(1\,;4)$ et de directrice la droite (D) d'équation $y = 2$

2) (Γ) est une conique à centre de foyer F de directrice associée (D) et d'excentricité e :

a) $F(1\,;0)$; (D) : $x = 10$; $e = \frac{4}{5}$.

b) $F(5\,;0)$ (D) : $x = 0$; $e = \frac{5}{4}$.

c) $F(0\,;4)$ (D) : $y = 6$; $e = \frac{1}{2}$

d) $F(0\,;6)$ (D) : $y = 3$; $e = 2$.

Exercice 151

(Γ) est une conique de foyer F, de directrice associée (D) et d'excentricité e. l est la distance de F à (D). Choisir un repère et donner une équation de (Γ) dans les cas suivants :

a) $l=4 \quad et \quad e=1$

b) $l=1 \quad et \quad e=2$

c) $l=9 \quad et \quad e=\frac{4}{5}$

d) $l=1 \quad et \quad e=\frac{1}{2}$.

Exercice 152

Dans chacun des cas , on donne une équation de la conique (Γ) dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

Déterminer la nature de (Γ) et préciser dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ ses éléments géométriques : sommets, foyers , directrices , asymptotes . Construire (Γ) dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

1) $y+2=2(x-3)^2$

2) $x-1=-3(y-2)^2$.

3) $25(x-3)^2+4(y+1)^2-100=0$

4) $(x+2)^2+9(y+1)^2-9=0$

5) $4(x-3)^2-9(y+2)^2-36=0$

5) $-(x-1)^2+(y-2)^2-4=0$.

Exercice 153

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ d'unité 2 cm. Soit (Γ) la conique d'équation $3(x+1)^2+4y^2=12$.

1) a) Déterminer la nature de cette conique et la construire.

b) Déterminer les foyers, les directrices et l'excentricité de (Γ).

2) A chaque point M de (Γ) de coordonnées $(x\,;\,y)$ on associe le nombre complexe $z = x + iy$.

Démontrer que $|z| = \frac{1}{2}(3 - x)$. En déduire que $|z| = \frac{3}{2 + \cos\theta}$, θ étant un argument de z.

3) Soit M' et M'' les point de (Γ) ayant pour affixes respectives *z'* et *z''* d'arguments respectifs θ et $\theta + \pi$.

a) Calculer $\left\|\overrightarrow{M'M''}\right\|$ en fonction de θ

b) Déterminer θ pour que $\left\|\overrightarrow{M'M''}\right\|$ soit maximum, puis minimum.

Exercice 154

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.

1) On considère les points A de coordonnées $(-1\,;0)$ et I de coordonnées $(4\,;0)$. Soit (E) l'ellipse de centre I, dont un sommet est A et un foyer est O.

a) Déterminer les trois autres sommets de (E).

b) Calculer l'excentricité de (E) et déterminer une équation de sa directrice associée au foyer O dans les repère $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.

c) Déterminer une équation de (E) dans le repère $(I\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.

d) Tracer (E).

2) Dans cette question, à tout réel θ de l'intervalle $[0\,;\pi]$ on associe l'équation

$$z \in C, \quad z^2 - 2(4 + 5\cos\theta)z + (4\cos\theta + 5)^2 = 0.$$

a) Résoudre cette équation dans *C*.

b) Lorsque θ appartient à $]0\,;\pi[$, on note z_1 la solution de l'équation dont la partie imaginaire est strictement positive et z_2 l'autre solution.

Soit M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2.

Donner les coordonnées de M_1 en fonction de θ dans le repère $(I\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.

En déduire l'ensemble des points M_1, puis celui des points M_2 lorsque θ décrit $]0\,;\pi[$.

Exercice 155

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.
Soit (D) la droite d'équation $x = 6$ et F le point de coordonnées $(8\,;0)$.

Soit θ un nombre réel tel que $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$.

On désigne par (Γ_θ) l'ensemble des points M du plan tels que $\frac{MF}{MH} = \frac{1}{\cos\theta}$, où H est le projeté orthogonal de M sur (D) .

1) Préciser la nature de (Γ_θ) selon les valeurs de θ.

2) Construire la courbe (Γ_0) correspondant à $\theta = 0$.

3) a) Ecrire une équation cartésienne de la courbe $\left(\Gamma_{\frac{\pi}{6}}\right)$ correspondant à $\theta = \frac{\pi}{6}$.

b) Préciser les éléments caractéristiques de cette courbe (foyers, sommets, éléments de symétrie de
cette courbe) .

c) Construire $\left(\Gamma_{\frac{\pi}{6}}\right)$.

EXERCICES DE DENOMBREMENT

Exercice 156

L'entée d'un immeuble est commandée par un appareil à digicode ; un digicode est composée de cinq éléments : trois chiffres suivis de deux lettres.
1) Combien y a – il de digicodes possibles.
2) Combien d'entre eux commencent par le chiffre 0.
3) Combien d'entre eux commencent par trois chiffres identiques ?
4) Combien d'entre eux ont deux lettres identiques ?

Exercice 157

1) Combien peut – on former d'anagrammes du mot «LAINE » ?
2) Combien de ces anagrammes commencent par une consonne ?
3) Reprendre les deux questions précédentes pour le mot « BALEINE »
NB : On appelle anagramme d'un mot, tout assemblage ordonné formé de toutes les lettre du mot.

Exercice 158

On jette un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6, trois fois de suite et on note successivement les chiffres obtenus sur la face supérieure .

1) Quel est le nombre de résultats possibles ?

2) Quel est le nombre de résultats :

a) Comportant trois chiffres identiques ?

b) Comportant trois chiffres distincts deux à deux ?

c) Comportant 2 (et 2 seulement) chiffres identiques.

Exercice 159

Sur un damier « 4×4 » de seize cases on place 4 jetons sur 4 cases différentes.

1) Les 4 jetons sont de couleurs différentes. De combien de façons peut – on les disposer ?

2) Les jetons sont identiques. De combien de façons peut – on les disposer ?

Exercice 160

En informatique, on appelle octet une liste de 8 éléments pris dans l'ensemble $\{0\,;1\}$.

Exemples d'octets : 01001100 ; 11100101 ; 00011111.

1) Combien y a t – il d'octets possibles ?

2) Combien y a t – il d'octets commençant par 0 et se terminant par 0 ?

3) Combien y a t – il d'octets contenant exactement quatre 1 ?

Exercice 161

Un Q.C.M est composé de cinq items. Pour chacun d'eux, trois réponses sont proposées, une seule est vraie.

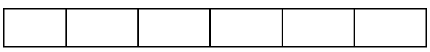
1) De combien de façons peut – on répondre au Q.C.M ?

2) De combien de façons peut – on répondre correctement aux cinq items ?

3) De combien de façons peut – on répondre correctement à quatre items exactement ?

Exercice 162

On dispose de trois couleurs pour colorier le motif ci – dessous composé de six case.



Deux cases voisines ne doive être de la même couleur. Déterminer :
1) Le nombre de coloriages possibles.
2) Le nombre de coloriages utilisant exactement deux des trois couleurs disponibles.
3) Le nombre de coloriages utilisant au moins une fois chacune des trois couleurs disponibles.

PROBABILITES

Exercice 163

Une urne contient cinq boules blanche numérotées de 1 à 5 , trois boules noires numérotées de 6 à 8 et deux boules vertes numérotées 9 et 10.
On tire simultanément deux boules de l'urne. On admet l'équiprobabilité.
1) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A « Les deux boules sont de numéros impaires »
B « Les deux boules ont la même couleur »
C « Les deux boules ont des numéros impaires et sont de la même couleurs ».
Les événements A et B sont – ils indépendants ?
2) Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants ?
D « les deux boules sont de couleurs différentes »
E « les deux boules sont de couleurs différentes et portent des numéros impairs ».

Exercice 164

On considère l'ensemble E des nombres de quatre chiffre écrits avec 1 , 2 , 3 et 4 , un même chiffre pouvant être répété plusieurs fois. Une épreuve consiste à choisir un élément de E.
1) Quel est le nombre d'éléments de E ?
2) Soit A l'ensemble des éléments de E écrits avec deux chiffres distincts, l'un d'eux étant répété trois fois (par exemple 2232).
Calculer la probabilité de choisir un élément de A.
3) B l'ensemble des éléments de E écrits avec deux chiffres distincts, chacun d'eux étant répété deux fois (par exemple 3223).
Calculer la probabilité de choisir un élément de B.
4) Soit C l'ensemble des éléments de E écrits avec trois chiffres distincts , l'un d'eux étant répété deux fois (par exemple 2434).
Calculer la probabilité de choisir un élément de C.

Exercice 165

Deux individus A et B lancent des fléchettes en direction d'une cible. On admet que chacun des individus atteint ou non la cible indépendamment de l'autre.

La probabilité que l'individu A (respectivement B) atteigne la cible est de $\frac{5}{8}$ (respectivement $\frac{2}{3}$).

Calculer la probabilité :
1) Que les deux individus atteignent la cible.
2) Qu'au moins un des deux individus atteigne la cible.
3) Qu'un individu et un seul atteigne la cible.
4) qu'aucun des deux individus n'atteigne la cible.

Exercice 166

On dispose au hasard les lettres du mot « MATH » dans un damier
5×5 représenté ci – contre .
1) Montrer que le nombre de dispositions possibles est 303 600.
2) Calculer la probabilité d'obtenir :
  a) les quatre lettres sur une même ligne.
  b) Exactement trois lettres sur une même ligne.
  c) Exactement deux lettres sur une même ligne.
  d) Au plus une lettre par ligne.
3) Calculer la probabilité de lire le mot « MATH » sur une ligne ou une colonne.
   NB : La lecture se fait de gauche à droite sur une ligne et de haut en bas sur une colonne, y compris les cas où deux lettres sont séparées par une case vide.

Exercice 167

L'expérience consiste à lancer ce dé et à noter la couleur de la face supérieure.
1) Calculer la probabilité d'avoir :
  a) une face blanche ;
  b) Une face noire.
2) On lance le dé quatre fois de suite.
  a) Calculer la probabilité d'avoir dans l'ordre : une face blanche, une face noire , une face blanche , une
     face blanche.
  b) Calculer la probabilité d'avoir une seule face noire au cours de quatre lancers.
  c) Calculer la probabilité d'avoir une face noire au quatrième lancer.
3) Soit *n* un entier naturel non nul.
  a) Calculer la probabilité P_n d'avoir au moins une face blanche au cours de *n* lancers.
  b) Déterminer le plus petit entier *n* tel que $P_n \geq 0{,}99$.

Exercice 168

Un jeu de dominos est fabriqué avec les sept couleurs : violet, indigo , bleu , vert , jaune , orange , rouge .
Un domino se compose de deux cases portant chacune l'une des sept couleurs.
Chaque couleur peut figurer deux fois sur le même domino : c'est un double.
1) Montrer que le jeu comporte 28 dominos différents.
Les 28 dominos, indiscernables au toucher, sont mis dans un sac.
2) On tire simultanément trois dominos du sac . Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux doubles parmi les trois dominos ?
3) Dans cette question on tire un seul domino. Calculer la probabilité des événements suivants :

J_2 « le jaune figure deux fois »

J_1 « le jaune figure une seule fois »

J « le jaune figure au moins une fois »

4) On effectue n tirages successifs d'un domino, en notant à chaque tirage la (ou les) couleur (s) obtenue (s) avant de remettre le domino tiré et de procéder au tirage suivant ; les tirages sont indépendants .
Calculer en fonction de n , la probabilité P_n , que J soit réalisé au moins une fois.

Exercice 169

Deux joueurs, Paul et Jacques, lancent chacun une seule fois un même dé dont chacune des six faces numérotées de 1 à 6 a la même probabilité de sortir.
Le joueur qui gagne est celui qui obtient un nombre strictement supérieur à celui de l'autre.
La partie est nulle si les deux joueurs obtiennent le même nombre .
1) Calculer la probabilité que Paul gagne.
2) On suppose dans cette question que Paul a obtenu le nombre 4. Calculer la probabilité que Jacques gagne.
3) Le joueur qui gagne obtient en euro la somme des nombres obtenus par les deux joueurs.
Soit X la somme d'argent reçue par Paul. (X = 0 si la partie est nulle ou si Jacques gagne).
a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X, puis calculer la loi de probabilité de X.
b) Calculer l'espérance mathématique et l'écart – type de X.
c) Pour avoir le droit de jouer, Paul doit miser 5 euros. Le jeu est – il avantageux pour ce joueur ?

Exercice 170 **(Bac C 2005 Côte d'Ivoire)**

On sait par expérience qu'un tireur professionnel touche sa cible avec la probabilité 0,7.
Les tirs sont supposés indépendants.
Tous les résultats demandés seront donnés sous forme de décimale exacte.

1. Le tireur effectue cinq tirs successifs. Calculer la probabilité pour qu'il touche sa cible :
   a) cinq fois.
   b) exactement deux fois.
   c) au moins une fois.

2. Il tire n fois de suite $(n \geq 1)$. Démontrer que la probabilité pour qu'il touche la cible au moins une fois est égale à $1-(0{,}3)^n$.

3. Combien faut- il de tirs au minimum pour que la cible soit touchée au moins une fois avec une probabilité supérieure ou égale à 0,995 ?

Exercice 171 **(Bac C 2007 Côte d'Ivoire)**

Dans une ville de Côte d'Ivoire, un sondage a permis de constater que 30% de la population sont gaucher et 70% sont droitiers. (*Les résultats seront des arrondis d'ordre 4*).

1. Justifier que dans un groupe de 6 personnes choisies au hasard dans cette ville, la probabilité pour qu'il y ait un seul gaucher est égale à 0,3025.

2. Calculer la probabilité pour qu'un groupe de 6 persoones choisie au hasard dans cette ville contienne :

   a) Exactement 2 gauchers ;
   b) Au moins un gaucher.

3. Un atelier de couture de cette ville est équipé de 5 paires de ciseaux pour droitiers et 2 paires de ciseaux pour gauchers. Cet atelier vient de recevoir 6 stagiaires.

Soit X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de stagiaire de l'atelier pouvant trouver une paire de ciseaux à sa convenance.

a) Déterminer les valeurs prises par X.
b) Justifier que la probabilité pour que X prenne la valeur 2 est égale à 0,0007.
c) Calculer la probabilité pour que X prenne la valeur 6.

Exercice 172 : Bac C Côte d'Ivoire 2010

Un jeu consiste à lancer trois fois un dé cubique équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6 et on note successivement les chiffres obtenus sur la face supérieure :

1. Démontrer que la probavilité d'obtenir trois chiffres identique est $\frac{1}{36}$
2. Calculer la probabilité d'obtenir trois chiffres dont la somme est égale à 6.
3. Démontrer que la probabilité d'obtenir exactement deux chiffres identiques est $\frac{5}{12}$
4. Le droit de participer au jeu est de 3000 francs.
- Si le joueur obtient 3 chiffres identiques, il reçoit 5000 francs ;

-S'il obtient 3 chiffres deux à deux distincts, il reçoit 3000 francs ;
-S'il obtient exactement deux chiffres identiques, il ne reçoit rien.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique d'un joueur au cours d'une partie.
On appelle gain algébrique d'un joueur la différence entre ce qu'il reçoit et sa mise :
a) Déterminer les valeurs prises par X
b) Déterminer la loi de probabilité de X
c) Déterminer le gain moyen d'un joueur au cours d'une partie. Le jeu est – il équitable ?

ARITHMETIQUE

Exercice 172

Dans la division euclidienne de a par b ($b \geq 1$) , on note q le quotient et r le reste.
a) Si $b = 7$, quelles sont les valeurs possibles de r ?
b) Si $b = 9$ et $q = -3$ quelles sont les valeurs possibles de a ?
c) Si $a = 54$ et $r = 3$, déterminer b et q .

Exercice 173

Sachant que $100^{100} = 13q + 35$ où $q \in IN$, écrire la division euclidienne de 100^{100} par 13

Exercice 174

Démontrer que le produit de trois entiers naturels consécutifs est divisible par 3.

Exercice 175

1) Pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq 9$, déterminer le reste de la division euclidienne de k^4 par 10.
2) En déduire que pour tout entier naturel n, l'écriture en base 10 de n^4 ne se termine pas par 4.

Exercice 176

Déterminer le chiffre des unités du nombre 13^{247} dans la base 10.

Exercice 177

Démontrer que pour tout $n \in IN,\ 3^{2n} - 1$ est divisible par 8

Exercice 178

A l'aide de l'algorithme d'Euclide déterminer le PGCD de a et b dans chacun des cas :

a) $a = 441$; $b = 777$
b) $a = 1998$; $b = 444$
c) $a = 1610$; $b = 259$
d) $a = 5000$; $b = 1515$

Exercice 179

1) Soit a et b deux entiers relatifs non nuls.
Démontrer que les couples $(a\,;b)$ et $(b - a\,;b)$ ont le même PGCD.
2) Déterminer en utilisant la propriété précédente le PGCD de 1575 et 210.

Exercice 180

Soit n un entier non nul.
1) Montrer le PGCD de $5n^3 - n$ et $n + 2$ est le PGCD de $n + 2$ et 38
2) Quelles sont les valeurs possibles de ce PGCD ?
3) Déterminer les entiers naturels n tels que :
a) $n + 2$ divise $5n^3 - n$
b) PGCD$(5n^3 - n\,; n + 2) = 19$

Exercice 181

Le développement en base 10 d'un entier naturel N est :
$N = \alpha_n 10^n + \alpha_{n-1}10^{n-1} + \cdots + \alpha_1 10 + \alpha_0$, où chaque α_i est élément de l'ensemble { 0 ; 1 ; 2 ; … ; 9}.
1) Justifier que le chiffre α_0 des unités de N est le reste de la division euclidienne de N par 10.
2) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n le chiffres des unités de 17^n.
3) En déduire le chiffre des unités de 17^{1090}.

Exercice 182

Soit l'équation : (E) : $(x\,;\,y) \in Z \times Z$, $35x - 12y = 7$.
1) Montrer que si le couple $(x\,;\,y)$ est solution de (E), alors y est multiple de 7.
2) En déduire une solution particulière de (E).
3) Résoudre (E).
4) Si $(x\,;\,y)$ est solution de (E), on note d le PGCD $(x\,;\,y)$.
a) Quelles sont les valeurs possibles de d.
b) Déterminer les couples $(x\,;\,y)$ solutions de (E) pour lesquels le PGCD est maximal.

Exercice 183

1) x et y sont deux entiers naturels non nuls , premiers entre eux.
a) Justifier que x et y ne sont pas pairs à la fois.
b) Démontrer que $x + y$ et xy sont l'un pair , l'autre impair.
2) Déterminer les entiers naturels diviseurs de 84 dans l'ordre croissant.
3) Déterminer les entiers naturels a et b vérifiant $\begin{cases} a+b=84 \\ m=d^2 \end{cases}$ où d = PGCD (a ; b) et m = PPCM (a ;b)

Exercice 184

1) On considère l'équation (E) : $6x + 7y = 57$ où x et y sont des entiers relatifs.
a) Déterminer un couple d'entiers relatifs (u ; v) tel que $6u + 7v = 1$. En déduire une solution particulière $(x_0\,;\,y_0)$ de l'équation (E).
b) Résoudre l'équation (E).
2) Soit $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace. On considère le plan (p) d'équation

$6x+7y+8z=57$. On considère les points du plan (P) appartenant aussi au plan $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.
Montrer qu'un seul de ces points a pour coordonnées des entiers naturels. Déterminer les coordonnées de ce point.
3) On considère un point du plan (P) dont les coordonnées x , y et z sont des entiers naturels.
a) Montrer que l'entier y est impair.
b) On pose $y = 2p + 1$ où p est un entier naturel.
Montrer que le reste de la division euclidienne de $p + z$ par 3 est égal à 1.
c) On pose $p + z = 3q + 1$ où q est un entier naturel.
Montrer que les entiers naturels x , p et q vérifient la relation $x+p+4q=7$. En déduire que q prend les valeurs 0 ou 1.
d) En déduire les coordonnées de tous les points de (P) dont les coordonnées sont des entiers naturels.

Exercice 185

Soit n un entier naturel non nul.
1) Montrer que le PGCD de $5n^3-n$ et $n + 2$ est le PGCD de $n + 2$ et 38.
2) Quelles sont les valeurs possibles de ce PGCD ?
3) Déterminer les entiers naturels n tels que :
a) $n + 2$ divise $5n^3-n$
b) PGCD ($5n^3-n$, $n + 2$) = 19.

Exercice 186

1) Soit a et b des entiers naturels non nuls tels que $PGCD\ (a + b\ , ab) = p$ où p est un nombre premier.
a) Démontrer que p divise a^2 . (On remarquera que $a^2=a(a+b)-ab$)
b) En déduire que p divise a . On constate donc, de même, que p divise b.
c) Démontrer que $PGCD\ (a\ , b) = p$.
2) On désigne par a et b des entiers naturels tels que $a \le b$.
a) Résoudre le système $\begin{cases} PGCD(a\,,b)=5 \\ PPCM\,(a\,,b)=170 \end{cases}$

b) En déduire les solutions du système $\begin{cases} PGCD(a+b\,,ab)=5 \\ PPCM\,(a\,,b)=170 \end{cases}$

Exercice 187

Soit p un nombre premier donné. On se propose d'étudier l'existence de couple (x , y) d'entiers naturels strictement positifs vérifiant l'équation (E) : $x^2+y^2=p^2$.
1) On pose $p = 2$. Montrer que l'équation (E) n'admet pas de solution.

On suppose désormais que $p \neq 2$ et que le couple (x , y) est solution de (E).

2) a) Montrer x et y sont de parités différentes

b) Montrer que x et y ne sont pas divisibles par p .

c) En déduire que x et y sont premiers entre eux.

3) On suppose maintenant que p est une somme de deux carrés non nul c'est-à-dire $p = u^2 + v^2$ où u et v sont des entiers naturels strictement positifs.

a) Vérifier alors que le couple $\left(\left|u^2 - v^2\right| ; 2uv\right)$ est solution de (E).

b) Donner une solution de (E) lorsque $p = 5$, puis lorsque $p = 13$.

4) On se propose enfin de vérifier sur deux exemples que l'équation (E) est impossible lorsque p n'est pas somme de deux carrés.

a) p 3 et $p = 7$ sont – il sommes de deux carrés ?

b) Démontrer que les équations $x^2 + y^2 = 9$ et $x^2 + y^2 = 49$ n'admettent pas de solution en entiers naturels strictement positifs.

Exercice 188

Partie A

On note D_a l'ensemble des diviseurs d'un entier relatif a.

On rappelle que trois entiers relatifs a, b et c sont dits premiers entre eux dans leur ensemble si le plus grand élément de $D_a \cap D_b \cap D_c$ est 1 ($\cap$ désigne l'intersection)

On considère l'équation (E) d'inconnue (x, y, z) avec $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{N}$

(E) : $x^2 + y^2 = z^2$

On note S_0 l'ensemble des solutions (a, b, c) de (E) telles que a, b et c soient premiers entre eux dans leur ensemble.

Soit (a, b, c) un élément de S_0.

1- Montrer que a, b et c sont premiers entre eux deux à deux.

2- a, b, c peuvent-ils être tous pairs ?

3- a, b et c peuvent-ils être tous impairs ?

Partie B

Soit l'équation (F) : $x \in \mathbb{R}$, $4x^3 + x^2 + x - 3 = 0$

1) Montrer que l'équation (F) admet une unique solution réelle appartenant à l'intervalle $]\,0\,;1[$.

2-a) Montrer que si (F) à une solution rationnelle $\frac{p}{q}$ où p et q sont premiers entre eux, alors p divise 3 et q divise 4.

b) Déterminer les nombres rationnelles vérifiant cette dernière condition.

3) Trouver une solution rationnelle de l'équation (F) et achever la résolution de l'équation dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.

Exercice 189

I) Soit x un nombre réel.
1) Vérifier que $x^4 + 4 = (x^2 + 1)^2 - 4x^2$
2) En déduire que $x^4 + 4$ peut s'écrire comme produit de deux trinômes à coefficients entiers.
II) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On pose $A = n^2 - 2n + 2$ et $B = n^2 + 2n + 2$
1) Démontrer que $n^4 + 4$ n'est pas premier.
2)Démontrer que tout diviseur commun à A et n divise 2.
3) Démontrer que tout diviseur commun à A et B divise $4n$.
4) Dans cette question on suppose que n est impair
a) Démontrer que A et B sont impaires , puis en déduire que le nombre $d = PGCD(A, B)$ est impair
b)Démontrer que d divise n.
c) en déduire que d divise 2 ,puis que A et B sont premiers entre eux.
5) on suppose maintenant que n est pair.
a) Démontrer que 4 ne divise pas A
b) Démontrer que d est de la forme $d = 2p$ où p est un nombre impair.
c) Démontrer que p divise n. En déduire que $d = 2$
e) Déduire des question précédentes que les nombres 197 et 257 sont premiers entre eux.

Exercice 190 **(Bac C 2008 Côte d'Ivoire)**

On considère l'équation (E) définie par : $(x, y) \in Z \times Z,\ 35x - 27y = 2$.
1.a) Utiliser l'algorithme d'Euclide pour calculer le PGCD de 35 et 27.
b) En déduire une solution de l'équation (E′) : $(x, y) \in Z \times Z,\ 35x - 27y = 2$.

2. a) Vérifier que $(-20, -26)$ est une solution de (E).
b) Démontrer que les solutions de (E) sont les couples (x, y) d'entiers relatifs vérifiant : $x = 27k - 20$ et $y = 35k - 26$ où k est un entier relatif.

3. Les habitants d'un village adorent deux génies protecteurs N'Gouan et Moayé. Le Génie N'gouan est adoré tous les 140 jours et le génie Moayé tous les 108 jours. Les jours où les cultes coïncident sont considérés comme des jours de grâce appelés « jour des génies »
Un matin, le village a adoré le génie Moayé.
Déterminer le nombre de jours qui séparent ce matin-là du « jour des génies » sachant qu'ils avaient adoré le génie N'gouan 8 jours auparavant.

Exercice 191 (bac C 2009)

On pose $a = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, $b = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $c = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

Partie A

1) Exprimer a^6 , b^6 et c^6 sous forme algébrique.
2) En déduire une solution de l'équation (E) : $z \in C, z^6 = -8i$
3) Soit $\mathrm{j} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
a) Vérifier que $\mathrm{j}^3 = 1$
b) Démontrer que $\mathrm{j}b$ *et* $\mathrm{j}^2 b$ sont aussi des solutions de (E).
c) En déduire toutes les solutions de (E). Les écrire sous forme algébrique.

Partie B

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système :
$$\begin{cases} x \equiv 0[6] \\ x \equiv 3[4] \end{cases}$$

2) Déterminer tous les entiers naturels n vérifiant les deux propositions suivantes :
- a^n est un nombre réel
- b^n est un nombre imaginaire pur.

PROBLEMES DE SYNTHESE

Problème 1 **(Bac C 2005 Côte d'Ivoire)**

On considère la fonction f de IR vers IR définie par :
$$f(x) = \frac{x}{1 + xe^x}$$
On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plans muni d'un repère orthogonal (O , I , J)

Partie I : Etude de *f*

1. Soit ψ la fonction dérivable sur IR et définie par $\psi(x) = 1 + xe^x$.
a) Etudier les variations de ψ et dresser son tableau de variation.(*On ne demande pas de calculer les limites*)
b) Démontrer que pour tout nombre réel x , $\psi(x) > 0$.
En déduire l'ensemble de définition de f.
2. Soit φ la fonction dérivable sur IR et définie par : $\varphi(x) = 1 - x^2e^x$.
a) Calculer les limites de φ en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Etudier les variations de φ et dresser son tableau de variation.
c) Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique α comprise entre 0,7 et 0,71.
d) En déduire :

- $\forall x \in]-\infty; \alpha[, \varphi(x) > 0$
- $\forall x \in]\alpha; +\infty[, \varphi(x) < 0$

3. On admet que f est dérivable sur IR.
a) Démontrer que : $\forall x \in$ IR, $\quad f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{(1 + xe^x)^2}$
b) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$
c) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.
4. Soit (D) la droite d'équation $y = x$.
a) Démontrer que (D) est asymptote à (C) en $-\infty$.
b) Etudier la position de (C) par rapport à (D). (*On pourra utiliser la question I.1.b*).
Démontrer que la droite (D) est tangente à (C) au point d'abscisse 0.
d) Tracer (D) et (C) dans la fenêtre définie par :

$$X_{min} = -4{,}5 \quad ; \quad X_{max} = 4$$
$$Y_{min} = -5 \quad ; \quad Y_{max} = 0{,}4$$

On prendra OI $= 2$cm ; OJ $= 5$cm et $\alpha = 0{,}7$

Partie II : Etude d'une suite

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1 + te^t}\,dt$

1. a) Sans calculer I_1, en donner une interprétation graphique.
   b) Démontrer que la suite $(I_n)_{n \in IN}$ est décroissante.
   c) Démontrer que la suite $(I_n)_{n \in IN}$ est convergente.

2. a) Démontrer que :
$\forall t \in [0\,;1]$, $\quad \dfrac{1}{1+e} \leq \dfrac{1}{1 + te^t} \leq 1.$
$(On\ pourra\ utiliser\ les\ variations\ de\ \psi\ sur\ [0\,;1])$

b) En déduire que pour tout entier naturel n, $\quad \dfrac{1}{(1+e)(n+1)} \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$

c) Déterminer la limite de $(I_n)_{n \in IN}$.

Problème 2 **(Bac C 2006 Côte d'Ivoire)**

L'objectif de ce problème est de démontrer que la suite $(U_n)_{n \in IN}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = -2 \\ U_{n+1} = \dfrac{e^{U_n}}{e^{U_n} + (\ln|U_n|)^2} \end{cases}$$

converge vers 1.

Partie A

Soit g la fonction dérivable et définie de IR* vers IR par : $g(x) = \ln|x| - \frac{2}{x}$

1.a) Démontrer que pour tout nombre réel x non nul,

$$g'(x) = \frac{x+2}{x^2}$$

b) En déduire les variations de la fonction g puis dresser son tableau de variation. (*On ne calculera pas les limites*)

2. a) Démontrer que l'équation $x \in$ IR , $g(x) = 0$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.

b) Démontrer que :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty\,;0[\, \cup\,]\alpha\,;\,+\infty[, g(x) > 0 \\ \quad \forall x \in]0\,;\,\alpha[,\ \ g(x) < 0 \end{cases}$$

Partie B

Soit f la fonction dérivable et définie sur IR par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + (\ln|x|)^2} \ \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(C) est la représentation graphique de f dans un repère orthonormé (O , I , J).

(*L'unité graphique est 4 cm*)

1. a) Etudier la continuité de f en 0.

b) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ puis donner une interprétation graphique de chacun des résultats.

2 . a) Etudier la dérivabilité en 0. En déduire que (C) admet une tangente à l'origine que l'on Précisera.

b) Pour tout nombre réel x différent de zéro, démontrer que :

$$f'(x) = \frac{\varphi(x)g(x)}{(e^x + (\ln|x|)^2)^2} \ \text{ avec } \ \varphi(x) = e^x \ln|x|$$

c) Démontrer que $f(\alpha) = \dfrac{\alpha^2}{\alpha^2 + 4e^{-\alpha}}$ et en déduire que: $0 < f(\alpha) < 1$

d) Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x et en déduire le tableau de variation de f .

3. Démontrer que : $\forall x \in IR, 0 \leq f(x) \leq 1$.
4. Tracer la droite d'équation $y = x$ et la courbe (C).

Partie C

On considère la suite $(U_n)_{n \in IN}$ définie au début du problème.

1. Vérifier que : $\forall n \in IN,\ U_{n+1} = f(U_n)$.
2. A l'aide de la courbe (C), représenter $U_0 , U_1 , U_2 , U_3 \text{ et } U_4$ sur l'axe des abscisses.
3. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n , $U_n \in [0\,;1]$

4. a) Démontrer par récurrence que $(U_n)_{n\in IN}$ est strictement croissante.
   b) Démontrer que $(U_n)_{n\in IN}$ est convergente.
   c) Démontrer que la limite de $(U_n)_{n\in IN}$ est égale à 1.
   (*On pourra utiliser les variations de f sur* [0 ; 1])

Problème 3 **(Bac C 2007 côte d'Ivoire)**

On considère la fonction numérique f définie sur $]-1\,;1[$ par : $f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
On note (C) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé (O , I , J). Unité graphique 2 cm.

Partie A

1. Calculer les limites de f en -1 et en 1.
   Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
2. a) Démontrer que :
   $$\forall x \in\,]-1\,;1[;\ f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$
   b) En déduire le tableau de variation de f.
   c) Déterminer une équation de la droite (T), tangente à (C) au point d'abscisse 0.
3. Soit g la fonction de IR vers IR définie par $g(x) = f(x) - x$
   a) Déterminer le sens de variation de g.
   b) Calculer $g(0)$ en déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
   c) Déterminer la position de (C) par rapport à (T).

4. Construire dans le même repère (C) et (T).
5. a) Démontrer que f est une bijection de $]-1\,;1[$ sur IR.
   b) On désigne par f^{-1} la bijection réciproque de f et (C') la courbe représentative de f^{-1} dans le repère (O , I , J). Construire (C').
   c) Démontrer que $\forall y \in \mathrm{IR}\,, f^{-1}(y) = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$

Partie B

1. Soit Φ une primitive de f^{-1} sur IR ($On\ ne\ cherchera\ pas$ à $calculer\ \Phi(x)$).
   a) Démontrer que $\Phi \circ f$ est une primitive de la fonction $x \longmapsto xf'(x)$sur $]-1\,;1[$
   b) Démontrer que pour tous éléments a et b de $]-1\,;1[$,
   $$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt = \Phi\circ f(b) - \Phi\circ f(a)$$
   c) En déduire que $\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt = \int_a^b tf'(t)dt$

d) Démontrer que pour tout élément x de $]-1\,;1[$,

$$\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt = \int_0^x tf'(t)dt \quad (\,On\ pourra\ utiliser\ B.1.c)$$

2. a) Démontrer que pour tout élément x de $]-1\,;1[$,

$$\int_0^x tf'(t)dt = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2)\,.\,(On\ pourra\ utiliser\ A.2.\mathrm{a})$$

b) En déduire que pour tout élément y de IR,

$$\int_0^y f^{-1}(t)dt = \ln\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)$$

3. Soit A l'aire de la partie du plan délimité par :
la courbe $(\mathrm{C'})$ de f^{-1} et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$ et l'axe (OI).
Calculer A en unité d'aire.

4. a) Hachurer sur le graphique, l'ensemble D des points dont les coordonnées $(x\,,y)$ vérifient : $0 \leq x \leq 1\,;0 \leq y \leq 1\ \ et\ \ f^{-1}(x) \leq y \leq f(x)$
b) Calculer l'are de D en cm^2.

Problème 4 **(Bac C 2008 Côte d'Ivoire)**

On considère la fonction f, dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :
$f(x) = -1 + x\ln x$ si $x \neq 0$ et $f(0) = -1$.
On note (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté au repère orthonormé (O , I , J). L'unité graphique est 5 cm.

Partie A

1. a) Justifier que f est continue en 0.
b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)+1}{x}$
Interpréter graphiquement le résultat.

2. a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
b) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.

3. a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique s comprise entre 1,7 et

1 ,8.

Pour la suite on prendra 1,8 pour valeur approchée de s.

b) Justifier que :

$\forall x \in]0\,;s[,\quad f(x) < 0$

$\forall x \in]s\,;\,+\infty[,\quad f(x) > 0$

4. a) Justifier que (C) admet une branche parabolique de direction (OJ) en $+\infty$.

b) Tracer (C).

c) A l'aide d'une intégration par parties, calculer en fonction de s l'intégrale

$$I = \int_1^s f(x)dx$$

d) En déduire une valeur approchée à 10^{-2} près de l'aire $\mathcal{A}(s)$ en cm^2 de la partie du plan délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = s$.

Partie B

On considère la fonction g, dérivable sur $\left]\frac{1}{e}\,;+\infty\right[$ et définie par : $g(x) = \dfrac{1+x}{1+\ln x}$

1. a) Démontrer que : $\forall x \in \left]\frac{1}{e}\,;\,+\infty\right[$, $g(x) = x \Leftrightarrow f(x) = 0$.

b) En déduire le nombre de solutions de l'équation $g(x) = x$ et leur valeur.

2. a) Démontrer que, pour tout nombre réel x élément de l'intervalle $\left]\frac{1}{e}\,;\,+\infty\right[$,

$$g'(x) = \frac{f(x)}{x(1+\ln x)^2}$$

b) Justifier que g est strictement croissante sur l'intervalle $[s\,;\,2]$.

3. Démontrer que : $g([s\,;2]) \subset [s\,;2]$

4. a) Démontrer que $\forall x \in [1\,;\,+\infty[,\quad \dfrac{1}{(1+\ln x)^2} \leq 1$

b) Démontrer que pour tout réel x élément de $[s\,;\,2]$, $\quad \dfrac{f(x)}{x} \leq \dfrac{2}{3}f(2)$

En déduire que : $\forall x \in [s\,;2], |g'(x)| \leq 0.3$.

On considère la suite $(U_n)_{n\in IN}$ définie par :

$U_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = g(U_n)$

5. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n , $U_n \in [s\,;\,2]$

6. a) Utiliser l'inégalité des accroissements finis pour justifier que :

$\forall n \in IN, |U_{n+1} - s| \leq 0{,}3|U_n - s|$

b) En déduire que : $\forall n \in IN,\quad |U_n - s| \leq \dfrac{(0,3)^n}{2}$

7. a) Justifier que U_n converge vers s.

b) A partir de quelle valeur de n, U_n est une valeur approchée de s à 10^{-4} près ?

Problème 5 **(Bac C 2009 Côte d'Ivoire)**

On considère la fonction f dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et définie par: $f(x) = \frac{1}{4}x - 1 + \frac{\ln x}{x}$

(C) est la représentation graphique de f dans le repère orthonormé (O , I , J). Unité graphique 2 cm.

Partie A

On considère la fonction u dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et définie par :

$u(x) = x^2 + 4 - 4\ln x$.

1) Etudier les variations de u.

2) Justifier que : $\forall x \in\ ]0\ ;\ +\infty[\ u(x) > 0$.

Partie B

1) Calculer la limite de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

2-a) Calculer la limite de f en $+\infty$.

b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{4}x - 1$ est asymptote à $(\ C\ )$en $+\infty$

$3-$ a) Vérifier que $\forall x \in\ ]0\ ;\ +[, f'(x) = \frac{u(x)}{4x^2}$

b) En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

4-a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α tel que $1 < \alpha < e$

b) Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de α.

5-a) Démontrer qu'il existe un point unique A de (C) où la tangente (T) est parallèle à la droite (D).

b) Donner les coordonnées du point A

6-a) Etudier la position relative de (D) par rapport à (C).

b) Construire (T), (D) et (C).

Partie C

On considère la suite numérique (a_n) définie pour tout entier $n \geq 1\ par$:

$$a_n = \int_{e^{n-1}}^{e^n} \frac{\ln t}{t} dt$$

1-a) Hachurer sur le graphique le domaine du plan dont l'aire en unité d'aire est égale à a_1.

b) Interpréter graphiquement le nombre a_n

c) Calculer a_n puis étudier la convergence de la suite (a_n).

2) Justifier que $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \frac{1}{2}n^2$

Problème 6 **(fonction exponentielle, fonction logarithme)**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; I ; J)$ d'unité 4 cm.

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = e^x - \frac{1}{x}$.

1) Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

2) Montrer que g est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$ et dresser son tableau de variation.

3) a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $0{,}56 \prec \alpha \prec 0{,}56$.

b) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x sur $]0 ; +\infty[$.

Partie B

On donne la fonction numérique f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = e^x - x\ln x$ si $x > 0$, et f (0) = 1.

1) a)Etudier la continuité de f en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0. En donner une interprétation graphique.

2) Calculer les limites en $+\infty$ de $f(x)$ *et* $\frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.

3) a) Calculer $f'(x)$ *et* $f''(x)$ pour tout $x > 0$.

b) Démontrer que $f(\alpha) = \alpha^2 + \frac{1}{\alpha}$ et que $f'(\alpha) = \frac{1}{\alpha} + \alpha - 1$. En déduire un encadrement de $f'(\alpha)$ par deux décimaux d'ordre 2 en partant de l'encadrement de α obtenu dans partie A

c) Dresser le tableau de variation de f' . En déduire le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x sur

$]0\,;+\infty[$.

d) Dresser le tableau de variation de *f*.

4) Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à (C_f) au points d'abscisse α est

$y=(x+1)f'(\alpha)$.

Vérifier que le point $A(-1\,;0)$ appartient à (T).

Partie C

Soit *h* la fonction numérique définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x)=f(x)-(x+1)f'(\alpha)$.

1) Calculer $h'(x)$ *et* $h''(x)$ pour tout $x > 0$.

2) a) Dresser le tableau de variation de h' puis déterminer le signe de $h'(x)$ suivant les valeurs de *x* sur

$]0\,;+\infty[$.

b) Dresser le tableau de variation de *h*.

c) En déduire la position relative de (C_f) et (T) sur $]0\,;+\infty[$.

3) Construire (C_f) et (T) dans le repère $(O\,;I\,;J)$.

Problème 7

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J) , n est un entier naturel non nul.

Partie A

Soit g_n la fonction numérique de la variable réelle définie par $g_n(x)=n+\ln(x-1)^n$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D_{g_n} de g_n suivant la parité de *n*.
2) Calculer les limites de g_n aux bornes de D_{g_n} suivant la parité de *n*.

3) Démontrer que $\forall n \in D_{g_n}$, $g_n'(x) = \dfrac{n}{x-1}$.

4) Dresser le tableau de variation de g_n suivant la parité de *n*.

5) **On suppose dans cette question que *n* est pair.**

   a) Résoudre dans IR l'équation $g_n(x) = 0$.

   b) Démontrer que $\forall x \in \left]-\infty; 1-e^{-1}\right[\cup \left]1+e^{-1}; +\infty\right[$, $g_n(x) > 0$

   et $\forall x \in \left]1-e^{-1}; 1\right[\cup \left]1; 1+e^{-1}\right[$, $g_n(x) < 0$.

Partie B : On suppose dans toute la suite du problème que *n* est pair

Soit f_n la fonction la fonction numérique de la variable réelle, de courbe représentative (C_n), définie par : $\begin{cases} f_n(x) = (1-x)\ln(x-1)^n & si\ \ x \neq 1 \\ f_n(1) = 0 \end{cases}$

1)

   a) Démontrer que f_n est continue en 1.

   b) Etudier la dérivabilité de f_n en 1. En donner une interprétation graphique.

2) Démontrer que le point $\Omega(1;0)$ est centre de symétrie de (C_n).

3)

   a) Démontrer que $\forall x \in \left]1; +\infty\right[$, $f_{n+2}(x) - f_n(x) = (1-x)\ln(x-1)^2$

   b) En déduire que sur $\left]1; +\infty\right[$, les courbes (C_n) passent par un unique point dont on précisera les coordonnées.

   c) Etudier sur $\left]1; +\infty\right[$ les positions relatives des courbes (C_{n+2}) et (C_n).

4) Calculer les limites $+\infty$ de $f_n(x)$ et de $\dfrac{f_n(x)}{x}$. En donner une interprétation graphique.

5) Démontrer que $\forall x \in \mathrm{IR} - \{\ 1\ \}$, $f_n'(x) = -g_n(x)$.

6) Etudier les variations de f_n et dresser son tableau de variation.

7) Déterminer une équation de la tangente (T_n) à (C_n) au point d'abscisse 2.

Partie C

1) Dresser le tableau de variation de f_2 sur $\left[1; +\infty\right[$.

2)

a) Construire (T_2) *et* (C_2) sur $[1;+\infty[$ puis su IR.

b) Construire (T_4) *et* (C_4) sur $[1;+\infty[$.

Problème 8

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ d'unité 2 cm.

Pour tout $n \in IN$, on définit sur $]0\,;+\infty[$, la fonction f_n par :

$$f_n(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} - n(e^{x-1} - 1) \ .$$

Partie A : Préliminaire

Soit la fonction g définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $g(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(x+1)$.

1) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variations (On ne demande pas les limites).

2) En déduire que pour tout $x \in \,]-1\,;+\infty[$, $g(x) \leq 0$.

Partie B : Etude du cas n = 0.

1) Calculer les limites de f_0 en $+\infty$ et à droite en 0 . Interpréter graphiquement les résultats.

2) On admet que f_0 est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

a) Calculer $f_0'(x)$ en fonction de g (x) .

b) En déduire le sens de variation de f_0 et dresser son tableau de variation.

3) Tracer la courbe (C_0) de f_0 dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

Partie C : Etude de la famille de fonctions (f_n)

On suppose $n \geq 1$, on note (C_n) la représentation graphique de f_n dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

1) Calculer les limites de f_n en $+\infty$ et à droite en 0.

2) Démontrer que toutes les courbes (C_n) passent par un même point Ω dont on précisera les

coordonnées.

3) Pour tout entier $n \geq 1$, étudier la position relative des courbes (C_{n+1}) et (C_n).

4) a) Etudier les variations de f_n sur $]0\,;+\infty[$. Dresser le tableau de variation de f_n.

b) Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n dans

$]0\,;+\infty[$.

5) Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a $\alpha_n > 1$.

6) a) Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a $f_{n+1}(\alpha_n) = 1 - e^{\alpha_n - 1}$.

b) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

7) a) Démontrer que pour tout $x > 0$, on a : $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \leq 1$.

b) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, $\alpha_n \leq 1 + \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

c) Déduire des questions 5) et 7. b) la limite de α_n quand n tend vers $+\infty$

8) Tracer (C_1) et (C_2) dans le même repère que (C_0)

Problème 9

Dans tout le problème, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ d'unité 4 cm.

Partie A

1) Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x + \ln\left(\dfrac{x}{2x+1}\right)$.

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

a) Calculer les limites de f aux bornes de $]0\,;+\infty[$.

b) Démontrer que f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ et dresser son tableau de variation.

c) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - \ln 2$ est asymptote à (C_f) en $+\infty$.

d) Etudier la position de (C_f) par rapport à (D).

e) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0\,;+\infty[$ une solution unique α .Justifier que α appartient à l'intervalle $\left[1\,;\frac{5}{4}\right]$.

2) Soit la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = (2x+1)e^{-x}$.

a) Déterminer la limite de g en $+\infty$.

b) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variations.

c) Tracer la courbe (C_g) représentative de g dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

d) Soit b un réel strictement positif. Calculer en cm^2 l'aire $A(b)$ du domaine du plan limité par (C_g), l'axe

des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = b$. (On utilisera une intégration par parties).

3) Déterminer la limite de $A(b)$ quand b tend vers $+\infty$.

Partie B

1) Montrer que α est solution de l'équation $g(x) = x$.

2) Montrer que : si $1 \le x \le \frac{5}{4}$, alors $1 \le g(x) \le \frac{5}{4}$.

3) En étudiant le signe de g'' et les variations de g', montrer que pour tout $x \in \left[1\,;\frac{5}{4}\right]$, $|g'(x)| \le \frac{1}{2}$.

4) Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = g(U_n)$.

a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in IN,\quad 1 \le U_n \le \frac{5}{4}$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, $|U_{n+1} - \alpha| \le \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$.

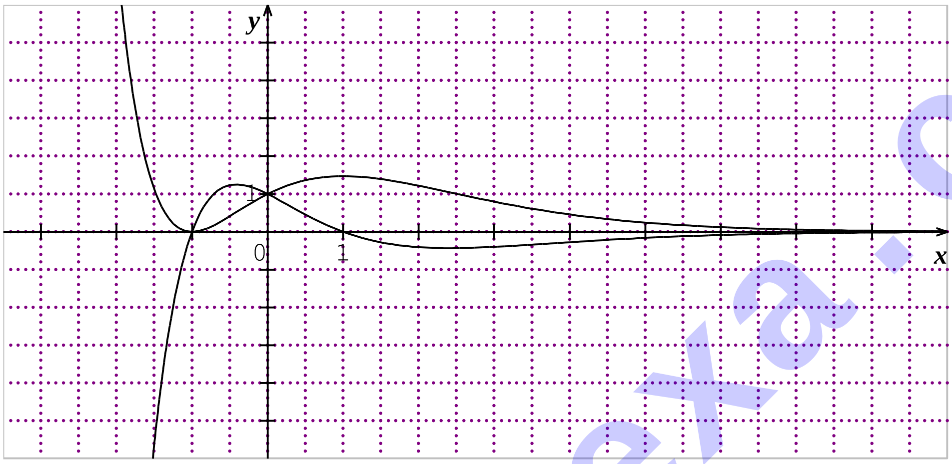
En déduire que : pour tout entier naturel n, $|U_n - \alpha| \le \frac{1}{2^{n+2}}$.

c) Déterminer la limite de la suite (U_n).

d) Déterminer un entier naturel p tel que U_p soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Problème 10

PARTIE A : **Lecture graphique**



Dans un repère orthogonal, les courbes (C) et (C') représentent deux fonctions g et g' dérivables sur IR, g étant une primitive de g' sur IR.

1. Associer à chaque fonction sa courbe. Justifier.

2. Quel est le coefficient directeur de la tangente à (C) au point d'abscisse 0 ?

PARTIE B : équation différentielle

On considère l'équation différentielle sur IR :

$(E): y' + y = 2(x+1)e^{-x}$

1. Prouver que la fonction $f_0: x \mapsto (x^2 + 2x)e^{-x}$ est une solution de (E)

2.On désigne par (E') l'équation différentielle : $y' + y = 0$.

a) Démontrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction $f - f_0$ est une solution de (E')

b) Résoudre (E') , puis en déduire l'expression de $f(x)$ lorsque f est une solution de (E).

3. Sachant que la fonction g de la partie A est une solution de (E), déterminer l'expression de $g(x)$ pour tout réel x.

4. Déterminer la solution h de l'équation *(E)*dont la courbe représentative admet au point d'abscisse 0 une tangente de coefficient directeur 0.

PARTIE C : Etude d'une solution

f est la fonction définie sur IR par $f(x) = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$.

1. Déterminer les limites d f en $-\infty$ et en $+\infty$

2.Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

3. (C_f) est la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm.

a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la représentation graphique (C_f) de f au point d'abscisse -1.

b) Tracer (C_f) e (T).

4. a) Déterminer les nombres réels a , b et c pour que la fonction $F: x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ soit une primitive de f sur IR.

b) Soit α un nombre réel strictement positif.

Calculer en cm^2 l'aire $A(\alpha)$ du domaine du plan délimité par (C_f) , et le droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$

Problème 11

A tout entier naturel $n \geq 1$ on associe la fonction f_n définie sur $[1 ; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{(lnx)^n}{x^2}$$

On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$ (unité graphique : 1 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).

Partie A : Etude de f_1

1. a) Etudier les variations de f_1 et dresser son tableau de variation. On précisera les limites aux bornes.

b) Tracer (C_1) et sa tangente (T_1) au point d'abscisse 1

2. a) Soit β un nombre réel tel que $\beta \geq 1$.

A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $I_1(\beta) = \int_1^\beta f_1(x)dx$

b) En déduire la limite de $I_1(\beta)$ quand β tend vers $+\infty$.

Parties B : Comportement des fonctions f_n , pour $n \geq 1$.

1. a) Calculer la limite de f_n quand en $+\infty$.

b) Démontrer que pour tout $x \in [1 \,;\, +\infty[\,;\; f'_n(x) = \frac{1}{n!}\,\frac{(\ln x)^{n-1}(n-2\ln x)}{x^3}$

c) En déduire les variations de f_n et dresser son tableau de variations.

d) Vérifier que la valeur maximale de f_n sur $[1 \,;\, +\infty[$ est $\quad y_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{2e}\right)^n$

2. On se propose d'étudier la suite (y_n) pour ≥ 1 .

a) Calculer, pour tout $x > 1$, le quotient $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$.

b) Démontrer que $y_{n+1} = \frac{1}{2}\, f_n(e^{\frac{n+1}{2}})$ et que $y_{n+1} \leq \frac{1}{2} y_n$.

c) En déduire que $y_n \leq \frac{1}{e} \times \frac{1}{2^n}$. Quelle est la limite de la suite (y_n) ?

PARTIE C Etude de primitives de f_n

A tout $x \geq 1$ et à tout entier $n \geq 1$, on associe l'intégrale $I_n(x) = \int_1^x f_n(t)dt$

1. a) Soit k un entier naturel tel que $k \geq 1$.

A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que :

$$I_{k+1}(x) = I_k(x) - \frac{1}{(k+1)!}\,\frac{(\ln x)^{k+1}}{x}.$$

b) En déduire que : $I_n(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} - \frac{(\ln x)^2}{2!x} - \cdots - \frac{(\ln x)^n}{n!x}$.

2. α est un réel fixé tel que $\alpha \geq 1$.

a) Démontrer que $0 \leq I_n(\alpha) \leq (\alpha - 1)y_n$.

b) En déduire la limite de $I_n(\alpha)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Pour tout $x \geq 1$ et pour tout entier $n \geq 1$, On pose :

$$w_n(x) = 1 + \frac{\ln x}{1!} + \frac{(\ln x)^2}{2!} + \cdots + \frac{(\ln x)^n}{n!}$$

a) Exprimer $w_n(x)$ en fonction de $I_n(x)$.

b) α étant un réel fixé tel que $\alpha \geq 1$, déterminer la limite de $w_n(\alpha)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

c) En déduire la limite l de la suite (U_n) , $n \geq 1$ définie par :

$$U_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

Problème 12

Partie A

1. Démontrer que pour tout nombre réel strictement positif x , on a $\ln x \leq x - 1$

2. En déduire que pour tout nombre réel x, on a $e^x \geq x + 1$

3. en déduire que pour tout nombre réel strictement positif x , on a $e^x - \ln x \geq 2$ (1)

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - \ln x} \quad si \ x > 0 \ et \quad f(0) = 0$$

On désigne par (C) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 4 cm.

1. Montrer que f est continue en 0

2. Etudier la dérivabilité de f en 0.

3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.Interpréter graphiquement ce résultat.

4. On désigne par g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g((x) = e^x - \ln x - xe^x + 1$.

a) Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$

b) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation

c) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $1{,}23 < \alpha < 1{,}24$

d) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

4.a) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations

b) Démontrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{e^\alpha - \dfrac{1}{\alpha}}$

c) En utilisant l'encadrement de α obtenu à la question 4. c) Déterminer un encadrement de $f(\alpha)$.

En déduire que 0,38 est une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.

5. Tracer (C) et préciser ses tangentes aux points d'abscisses 0 et α

Partie C

On considère la suite (U_n) définie par :

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $U_n = \int_1^n f(x)dx$ (on ne cherchera pas à calculer cette intégrale)

1. Interpréter géométriquement U_n.

2. Etudier le sens de variation de la suite (U_n).

3. Soit φ la fonction définie sur $[1 ,; +\infty[$ par $\varphi(x) = e^x - xlnx - lnx$.

a) Calculer $\varphi'(x)$ pour tout $x \in [1\,;\,+\infty[$

b) En utilisant l'inégalité (1) du préliminaire, montrer que pour tout $x \geq 1$, $\varphi'(x) \geq 0$

c) En déduire que pour tout $x \geq 1$, $\varphi(x) \geq 0$

4. a)Montrer que pour tout réel $x \geq 1$, $f(x) - \dfrac{1+x}{e^x} \leq 0$

b) Montrer que pour tout réel $x \geq 1$, $f(x) \geq xe^{-x}$

c) A l'aide d'une intégration par parties, calculer en fonction de n l'intégrale $\int_1^n xe^{-x}dx$

d) En déduire en fonction de n l'intégrale $\int_1^n (1+x)e^{-x}dx$.

5.a) Déduire des résultats précédents un encadrement de la suite U_n , puis montrer que la suite U_n est majorée.

b) Montrer que la suite U_n est convergente. On note l sa limite.

c) Démontrer que $\dfrac{2}{e} \leq l \leq \dfrac{3}{e}$

Problème 13

Dans tout le problème ,le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{e_1}\,;\,\vec{e_2})$, l'unité graphique étant 2 cm.

Partie A

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur IR par $f(x) = -x + 2e^{x-1}$ et (C_f) la représentation graphique de f dans le repère $(O\,;\,\vec{e_1}\,;\,\vec{e_2})$.

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

Calculer $\lim_{x \to -\infty} (f(x) + x)$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus

2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3. Tracer dans le repère $(O\ ;\ \vec{e_1}\ ;\ \vec{e_2})$ la courbe (C_f) , la droite (D_1) d'équation $y = -x$ et la droite (Δ) d'équation $y = -x + 5$

4. Hachurer la partie (E) du plan limité par la courbe (C_f) , la droite (Δ) et la droite d'équation $x = 0$.

Partie B

Soit S l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe $z = x + iy$ $(x \in IR$, $y \in IR)$, associe le point M' d'affixe d'affixe $z' = x' + iy'$ $(x' \in IR$, $y' \in IR)$ tel que

$z' = (-1 + i)z + 5 + 3i$

1. déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S.

2 . Exprimer les coordonnées x' et y' du point M' en fonction des coordonnées x et y du point M.

3. Déterminer une équation de chacune des images par S de la droite d'équation $x = 0$ et de la droite (Δ) .

4. Démontrer que l'image par S de la courbe (C_f) est la courbe d'équation

$y = 2\ln\left(\frac{-x + 5}{2}\right) + x$

Partie C

Soit la fonction g définie par $g(x) = 2\ln\left(\frac{-x + 5}{2}\right) + x$

1. Déterminer l'ensemble de définition D_g de la fonction$g$ et calculer les limites aux bornes de D_g

2. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

3. Soit (D) la droite d'équation $y = x - 2$ et A le point d'intersection de (C_g)et (D).

Déterminer les coordonnées $(\alpha\ , \beta)$ de A et étudier la position relative de (C_g) par rapport à (D).

4.a Tracer (D) et (C_g) dans le même repère $(O\ ;\ \vec{e_1}\ ;\ \vec{e_2})$

b. Vérifier que la fonction $G : x \longmapsto 2x\ln\left(\frac{5-x}{2}\right) - 10\ln(5-x)$ est une primitive de sur $]-\infty\,;5[$ de la fonction $x \longmapsto g(x)-(x-2)$

c. (E') étant le domaine du plan délimité par (C_g), la droite (D) et la droite d'équation $x = 0$,calculer l'aire $\mathcal{A} = \int_0^{\alpha}\big(g(x)-(x-2)\big)dx$ de (E') .

d) En admettant que $S(E) = (E')$. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (C_f) et (Δ), ainsi que l'aire de (E).

Problème 14

A tout entier naturel n non nul, on associe la fonction f_n définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $f_n(x) = x^n\ln(x+1)$.

On désigne par (C_n) la représentation graphique de f_n dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

PARTIE A

1) Soit h_n la fonction définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $h_n(x) = n\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$.

a. On admet que h_n est dérivable sur $]-1\,;\,+\infty[$.

Démontrer que pour tout $x \in\,]-1\,;\,+\infty[$, $h'_n(x) = \frac{n(1+x)+1}{1+x}$

b. En déduire le sens de variation de h_n. (On ne demande pas les limites)

c. Calculer $h_n(0)$, puis déterminer le signe de $h_n(x)$ suivant les valeurs de x .

2) On admet que pour tout entier naturel non nul n, la fonction f_n est dérivable sur $]-1\,;\,+\infty[$

a. Vérifier que pour tout $x > -1$, $f_1'(x) = h_1(x)$

b. Vérifier que pour tout $n > 1$ et $x > -1$, $f_n'(x) = x^{n-1}h_n(x)$.

c. Déterminer la limite de f_n en $+\infty$.

d. Calculer la limite de f_n en -1 par valeurs supérieures suivant la parité de n.

e. Suivant la parité de n , étudier les variations de f_n et dresser son tableau variations.

3)

a. Etudier la position relative des courbes (C_1) et (C_2).

b. Tracer ces deux courbes.

PARTIE B

(U_n) est la suite définie pour tout entier $n \geq 1$ par $U_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)dx$.

1)

a. Démontrer que $0 \leq U_n \leq \dfrac{\ln 2}{1+n}$

b. En déduire que la suite (U_n) converge et préciser sa limite.

2)

a. En remarquant que pour tout $x \in [0\,;1]$ on a $\dfrac{x^2}{1+x} = x - 1 + \dfrac{1}{1+x}$, calculer $\int_0^1 \dfrac{x^2}{1+x}dx$.

b. Calculer U_1 à laide d'une intégration par parties.

3) Pour tout $x \in [0\,;1]$, on pose $S_n(x) = 1 - x + \cdots + (-1)^n x^n$ (1).

a. Démontrer que $S_n(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}$ (2).

b. En utilisant successivement les expressions (1) et (2) de $S_n(x)$, montrer que :

$$1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2 - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx.$$

c. En utilisant une intégration par parties et le résultat précédent, démontrer que :

$$U_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left[\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)\right].$$

4) **Application**

Soit E l'ensembles des points M du plan, de coordonnées (x ; y) vérifiant $0 \leq x \leq 1$ et $f_2(x) \leq y \leq f_1(x)$. Calculer U_2 et en déduire l'aire de E en cm^2.

Problème 15

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,, \vec{i}\,, \vec{j})$ d'unité 4 cm.

Soit le nombre complexe $u = re^{i\alpha}$ avec $r > 0$ et $\alpha = \dfrac{5\pi}{4}$.

1) On construit les points A_n du plan répondant aux conditions suivantes :

- A_0 est l'origine du repère ;
- A_1 est le point d'affixe i ;
- Pour tout entier $n \geq 2$, le point A_n est l'image du point A_{n-2} par la similitude directe de centre A_{n-1}, de rapport r et d'angle orienté de mesure α.

On désigne par z_n l'affixe du point A_n.

a) Ecrire pour tout entier $n \geq 2$, une relation entre z_n , z_{n-1} et z_{n-2}.

b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $z_n - z_{n-1} = (-u)^{n-1} i$.

c) Déterminer l'expression de z_n en fonction de n et u.

2) a) Montrer qu'il existe une similitude directe S , et une seule , telle que : $A_1 = S(A_0)$ et $A_2 = S(A_1)$. Préciser les éléments caractéristiques de S.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $A_{n+1} = S(A_n)$.

On note S^0 l'application identique du plan , et , pour tout entier naturel n , on pose $S^{n+1} = S \circ S^n$.

Soit $p \in IN$. Montrer que pour tout $n \in IN$, on a : $A_{n+p} = S^n(A_p)$.

c) Montrer que S^4 est une homothétie.

d) En déduire que les points A_n sont éléments d'un ensemble formé par la réunion de quatre droites que l'on précisera.

3) On suppose que $r = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. On appelle Ω le centre de la similitude directe S .

a) démontrer que pour tout entier naturel n, les vecteurs $\overrightarrow{\Omega A_{n+1}}$ et $\overrightarrow{A_n A_{n+1}}$ sont orthogonaux.

b) représenter graphiquement les points A_0 , A_1 , $\cdots$, A_9 dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.

c) Calculer $\|\overrightarrow{\Omega A_n}\|$ en fonction de n et de $\|\overrightarrow{\Omega A_0}\|$. En déduire la limite de $\|\overrightarrow{\Omega A_n}\|$ lorsque n tend vers $+\infty$.

d) Pour tout entier naturel n , on pose $L_n = \sum_{k=0}^{n} \|A_k A_{k+1}\|$. Etudier la limite de la suite (L_n) quand n tend vers $+\infty$.

Problème 16 (Bac C Côte d'Ivoire 2010)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O , I , J). L'unité graphique est le centimètre.

Partie A

Soient f et g les fonctions numériques dérivables sur IR et définies pour tout réel x par :

$f(x) = \frac{1}{3}\left(-5x + 4\sqrt{x^2 + 15}\right)$ et $g(x) = \frac{1}{3}\left(-5x - 4\sqrt{x^2 + 15}\right)$.

On note (C) et (C') les courbes représentatives des fonctions f et g.

1.a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

b) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = -\frac{1}{3}x$ est une asymptote à (C) en $+\infty$.

c) Justifier que la courbe (C) est au – dessus de la droite (Δ)

Dans la suite du problème, on admettra que la droite (Δ') *d'équation* $y = -3x$ *est asymptote à* (C) *en* $-\infty$ *et que la courbe* (C) *est au dessus de la droite* (Δ').

2.a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
b) Démontrer que f est strictement décroissante sur IR, puis dresser son tableau de variation.
3. Déterminer les points d'intersection de la courbe (C) avec les droites (OI) et (OJ).
4.a) Construire (Δ) , (Δ') et la courbe (C) dans le plan muni du repère (O , I , J).
b) Démontrer que la courbe (C') est l'image de la courbe (C) par la symétrie de centre O.
c) Construire la courbe (C') dans le même repère que (C).

Partie B
Dans cette partie, on admettra que l'image d'une hyperbole (H) *de foyers* F *et* F' , *de sommets* A *et* A' *par une similitude directe* s, *est une hyperbole* (H') *de foyers* $s(\mathrm{F})$ *et* $s(\mathrm{F}')$, *de sommets* $s(\mathrm{A})$ *et* $s(\mathrm{A}')$.

On note (H) la courbe d'équation : $3x^2 + 3y^2 + 10xy - 80 = 0$.

1. Démontrer que $(\mathrm{H}) = (\mathrm{C}) \cup (\mathrm{C}')$.

2. Soit s la similitude directe de centre O, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.
Soit x , x', y et y' des nombres réels. Pour tout point M du plan d'affixe $z = x + iy$, on note M' le point d'affixe $z' = x' + iy'$ tel que $\mathrm{M}' = s(\mathrm{M})$.
a) Déterminer l'écriture complexe de s.
b) Justifier que $x' = \frac{1}{2}(x + y)$ et $y' = \frac{1}{2}(-x + y)$.
c) En déduire que M appartient à (H) si et seulement si M' appartient à la courbe (Γ) d'équation $4x^2 - y^2 = 20$.
3. a) Justifier que (Γ) est une hyperbole puis déterminer les coordonnées de ses foyers et de ses sommets.
b) Déterminer l'excentricité de (Γ).
c) Construire (Γ) et ses asymptotes dans le même repère que (H) . (*On utilisera deux couleurs différentes pour* (H) *et* (Γ)).
4. Déduire des questions précédentes que (H) est une hyperbole dont on précisera les foyers et les sommets.