Lycée Bilingue de BAMYANGA , ANNEE SCOLAIRE 2021-2022

TRAVAUX DIRIGES N°1 SUR LES NOMBRES COMPLEXES APPROCHE ALGEBRIQUE TleC-D.

PROPOSES PAR M. NOUMSSI

ÉTUDE ALGÉBRIQUE DES NOMBRES COMPLEXES

1 On considère le nombre complexe
$Z = x^2 + x - 2 + (x+2)i$ où x est un nombre réel.
Pour quelles valeurs de x :

a. Z est-il réel ?
b. Z est-il nul ?
c. Z a pour partie réelle 4 ?

OPÉRATIONS SUR LES NOMBRES COMPLEXES

2 Donnez la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$z_1 = \left(\frac{3}{2} - 4i\right) + (9+2i)$; $z_2 = \left(5 - i\sqrt{3}\right)(3i)$;
$z_3 = (3-i)(2i-1)^2$; $z_4 = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^3$; $z_6 = \frac{2-i}{3i-1}$
$z_5 = \dfrac{i(1-7i)}{(2+3i)^2}$.

3 f est la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :
$f(z) = (2-i)z^2 - (1+3i)z + 5$.

Calculer $f(i)$, $f\left(\dfrac{1}{i}\right)$ *et* $f\left(\dfrac{3-i}{3+i}\right)$.

4 Z est un nombre complexe distinct de i de la forme $x + iy$ (x, y réels).
Déterminer dans les deux cas suivants, la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe Z :

a) $Z = -2z^2 + 3iz - 7$; b) $Z = \dfrac{2iz}{z-i}$.

NOMBRE COMPLEXE CONJUGUÉ

5 Donnez la forme algébrique du nombre complexe conjugué de chacun des complexes suivants :

a) $3 - 11i$; b) $i(9+2i)$; c) $(3+i)(-13-2i)$;
d) $\frac{2-3i}{8+5i}$; e) $\frac{2}{1+i} - \frac{3}{1-i}$.

6 f est le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par
$f(z) = z^2 - 7z + 9$.

1. Démontrer que pour tout complexe z,
$\overline{f(z)} = f\left(\overline{z}\right)$.
2. Calculer $f(1+i)$. En déduire $f(1-i)$.

7 Soit z un nombre complexe non nul. Pourquoi peut-on affirmer que chacun des nombres complexes suivants est soit réel, soit imaginaire pur ?

$\boldsymbol{A = z^2 + \bar{z}^2}$ **;** $\boldsymbol{B = \frac{z - \bar{z}}{z^3 + \bar{z}^3}}$ **;** $\boldsymbol{C = \frac{z^2 - \bar{z}^2}{z\bar{z} + 2}}$.

8 On considère le nombre complexe $Z = \frac{1-iz}{1+iz}$ où $z \neq i$.
1. Déterminer tous les complexes z distincts de i pour que le complexe Z soit réel.
2. Montrer que Z est imaginaire pur si et seulement si $z\bar{z} = 1$.

9 **Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0$.**

MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE

10 Calculer le module de chacun des complexes suivants :

b) $5 - 12i$; b) $i\sqrt{2}(-1+i)$;
c) $\frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2(1+i)}$; d) $\left(\frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{1 - i\sqrt{3}}\right)^2$; e) $z = \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i}\right)^{1988}$

11

Soit $z = -\sqrt{2 - \sqrt{3}} + i\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ un nombre complexe.

1) Calculer z^2.
2) Déduire le module de z^2, puis celui de z.

12 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\boldsymbol{z^2 + |z|^2 - 8 = 0}$.

ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ DANS $\mathbb{C}$: RACINES CARRÉES D'UN NOMBRE COMPLEXE

13 Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :

a. $z^2 + z + 1 = 0$ b. $z^2 + 2z + 2 = 0$

c. $(z+1)^3 = z^3$; d. $z^3 - 1 = 0$;
e. $z^4 + z^2 + 1 = 0$; f. $iz^2 + (1-5i)z + 6i - 2 = 0$.

14 (E) désigne l'équation suivantes :

$z^2 - 2\cos\theta z + 1 = 0$ où θ est un réel de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

a. Résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$.

b. On désigne par z_1 et z_2 les deux solutions de cette équation. Calculer en fonction de θ $z_1^2+z_2^2$; $z_1^3+z_2^3$; $z_1^4+z_2^4$.

15 On considère dans $\mathbb{C}$ le polynôme défini par $P(z) = z^3 - 3z^2 - iz + 4 - i$.

1. Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle que l'on déterminera.
2. Résoudre l'équation $P(z) = 0$.

16 P est le polynôme de variable complexe z défini par :

$P(z) = z^4 - 27z^3 + 6z^2 - 27z + 5$

1. Établir que pour tout nombre complexe z, $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$
2. En déduire que si z_0 est une racine de P, alors $\bar{z}_0$ l'est aussi.
3. Calculer $P(i)$ et résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(Z) = 0$.

17 1. u est un nombre complexe tel que $|u| = 1$, $u \neq 1$ et z est un nombre complexe quelconque.

1. Montrer que $\dfrac{z - u\bar{z}}{1-u}$ est réel.

2. Montrer que si $\dfrac{z - u\bar{z}}{1-u}$ est réel, alors z est réel ou $|u| = 1$.

18 P est le polynôme défini dans θ par :

$P(z) = z^4 + 3z^3 + \dfrac{9}{2}z^2 + 3z + 1$

1. Montrer que $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$ et en déduire que si z_0 est une solution de l'équation $P(z) = 0$ alors $\bar{z}_0, \frac{1}{z_0}, \frac{1}{\bar{z}_0}$ sont aussi des solutions de cette équation.
2. Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une racine de la forme $a + i$ où a est réel à déterminer.
3. Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

19 $\mathcal{P}$ est le polynôme défini par : $\mathcal{P}(z) = z^3 - 3z^2 + (3 - i)z - 2 + 2i$.

i. vérifier que $\mathcal{P}$ admet une racine réelle α.

ii. Déterminer les nombres complexes a et b tels que $\mathcal{P}(z) = (z - \alpha)(z^2 + az + b)$.

iii. Résoudre alors l'équation $\mathcal{P}(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.

20 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = 48 + 14i$.

21 Le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Déterminer l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan en posant $z = x + iy$ tels que:

a) $\left|\frac{z+i}{z-i}\right| = 3$; b) $\left|\bar{z} + \frac{3}{2}i\right| = \sqrt{5}$;c) $|z + \bar{z} - 1| = 4$;

d) $|z + 5 - i| = |\bar{z} - 2 - i|$;

e) $|z + 1 + i| = |3z - 9 - 3i|$;

f) $(z\bar{z})^2 - z\bar{z} - 6 = 0$; g) $z^2 - (1 - 2i)^2 = \bar{z}^2 - (1 + 2i)^2$.

h) $\frac{2z-1}{z^2}$ est un nombre réel;

i) $\frac{z-2+4i}{z+1-2i}$ est un nombre réel;

k) $\frac{z-2+4i}{z+1-2i}$ est un nombre imaginaire pur ;

l) $\left|\frac{z-2+4i}{z+1-2i}\right| = 1$;

m) $\frac{z+i}{z-1}$ soit un réel strictement positif.

22 Soit l'équation (E) :

$$z^4 + 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1 = 0 \ (z \in \mathbb{C})$$

1) Démontrer que si z_0 est solution de (E), alors $\overline{z_0}$ est solution de (E).

2.a) Déterminer les nombres réels a et b tels que :

(E) $\Leftrightarrow z^2\left[\left(z - \frac{1}{z}\right)^2 + a\left(z - \frac{1}{z}\right) + b\right] = 0$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + aZ + b = 0$,puis l'équation (E).

23 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

a) $z^2 - 4z + 5 + i(z + 1) = 0$

b) $(z^2 - 4z + 5)^2 + (z + 1)^2 = 0$.

2. En déduire qu'il existe quatre nombres réels a, b, c et d que l'on précisera tels que pour tout nombre réel x, on a :
$(x^2 - 4x + 5)^2 + (x + 1)^2 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$

24 Soit P le polynôme défini par :

$\mathcal{P}(z) = z^3 - 2(1 + 2i)z^2 + 7iz + 3(1 - 3i)$.

1) Démontrer qu'il existe un imaginaire pur $i\beta$ solution de l'équation : $P(z) = 0$.

2) Déterminer le polynôme Q tel que :

$$P(z) = (z - i\beta)Q(z).$$

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$.

25 Calculer et écrire sous forme algébrique les racines carrées des nombres complexes suivants :

a) $15 - 8i$; b) $2i$; c) $-i$; d) $-5 + 12i$.