



Epreuve de Mathématiques

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES [12, 75 points]

EXERCICE 1 : [3, 5 points]

E est le plan vectoriel dont une base est $B = (\vec{i}, \vec{j})$. Soit f l'endomorphisme de E défini par $f(\vec{u}) = (2x + 3y)\vec{i} + (-x - 2y)\vec{j}$ avec $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$

1. Déterminer la matrice A de f dans la base B . [0, 5pt]
2. Démontrer que si $\text{Ker } f = \{0_E\}$ alors f est injectif [0, 75pt]
3. Déterminer le noyau de f dans la base B . [0, 5pt]
4. f est-il injectif ? justifier votre réponse [0, 5pt]
5. Soient les vecteurs $\vec{e}_1 = \vec{i} + \vec{j}$; $\vec{e}_2 = -\vec{i} + \vec{j}$ et $B' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$
- a. Montrer que B' est une base de E . [0, 25pt]
- b. Donner la matrice A' de f dans la base B' . [1pt]

EXERCICE 2 : [4, 25 points]

- I. L'unité de longueur étant le centimètre, ABC est un triangle rectangle en A tels que $AB = AC = 2$ et $BC = 2\sqrt{2}$. On note I milieu du segment $[BC]$, J barycentre des points pondérés $(A, 1)$ et $(I, 2)$ et (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que $AM^2 + BM^2 + CM^2 = 8$.

1. Montrer que pour tout point M du plan,
 $BM^2 + CM^2 = 2IM^2 + 4$ et $AM^2 + 2IM^2 = 3JM^2 + \frac{4}{3}$ [1pt]
2. En déduire que pour tout point M du plan, on a :
 $AM^2 + BM^2 + CM^2 = 3JM^2 + \frac{16}{3}$ [0, 5pt]
3. En déduire la nature et la construction de l'ensemble (Γ) . [0, 75pt]

- II. Une urne contient 6 jetons portant les numéros : 1 ; 2 ; 4 ; -1 ; -2 et -4. On tire deux jetons successivement avec remise dans cette urne. On désigne par a le numéro porté par le premier jeton et par b , celui porté par le deuxième jeton. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax^2 + bx + 20$ et on désigne par f l'endomorphisme du plan vectoriel E de base $(\vec{i}, \vec{j})$ dont la matrice dans cette base est $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ b & a \end{bmatrix}$.

Déterminer le nombre de couples $(a; b)$ pour lesquels :

1. La courbe de la fonction g admet au point d'abscisse 1 une tangente parallèle à l'axe des abscisses. [1pt]
2. f n'est pas un automorphisme de E . [1pt]

EXERCICE 3 : [5 points]

- I. Soit f fonction définie par : $f(x) = \frac{-x+2}{x}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. [1pt]
2. Calculer la dérivée de f et dresser son tableau de variation. [0, 75pt]
3. Tracer (C_f) [0, 5pt]

II.

1. Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{-u_n+2}{u_n} \end{cases}$

Utiliser la courbe (C_f) pour construire les trois premiers termes de cette suite. [0, 75pt]

2. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{u_n+2}{u_n-1}$

a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme. [1pt]

b. Exprimer v_n en fonction de n . [0, 5pt]

c. Calculer $S = 2 \left(\frac{1}{2^0} - \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{20}} \right)$. [0, 5pt]

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES [7, 25 points]

Ze, Eboutou et Belinga sont tous propriétaire d'une société forestière, ils disposent chacun un grumier et doivent transporter des billes de bois avec leur grumier dans trois villes différentes.

- Le grumier de Ze doit faire un trajet de 100km , avec une vitesse moyenne de x kilomètres par heure et une consommation en gas-oil de $6 + \frac{x^2}{100}$ litres par heures. Le prix du gas-oil est 600 francs CFA le litre, et le chauffeur Abdou de ce grumier est payé à 1800 francs CFA l'heure.
- Le grumier d'Eboutou doit faire un trajet de 200km , avec une vitesse moyenne de x kilomètres par heure avec une consommation en gas-oil de $\frac{150}{x} + \frac{x}{4}$ litres pour 100km .Le salaire horaire du chauffeur Oumarou est de 1500 FCFA et le litre de gasoil coûte 600 FCFA .
- Le grumier de Belinga doit faire un trajet de 225km , avec une vitesse moyenne de x kilomètres par heure avec une consommation en gas-oil de $9 - \frac{x^2}{65}$ litres par heures. Le prix du gas-oil est 650 francs CFA le litre, et le chauffeur Ndiffor de ce grumier est payé à 2900 francs CFA le kilomètre par heure.

Ze, Eboutou et Belinga recommandent à leur chauffeur de rouler à une vitesse moyenne qui permettra à la société de minimiser le coût du trajet , c'est alors qu'Abdou , Oumarou et Ndiffor reçoivent de leur patron les montants respectifs. 37 000 FCFA, 26 000 FCFA et 58 000FCFA que chacun d'eux utilisera pour gérer le coût du trajet.

Tâches :

- Le montant dont dispose Abdou lui permettra-il de gérer le coût du trajet ? [2, 25pts]
- Le montant dont dispose Oumarou lui permettra-il de gérer le coût du trajet ? [2, 25pts]
- Le montant dont dispose Ndiffor lui permettra-il de gérer le coût du trajet ? [2, 25pts]

Présentation : [0, 5pt]