Chapitre 6 : Suites numériques

Leçon 1 : Suites monotones ; suites bornées ; suites croissantes majorées ; suites décroissantes minorées

[Objectifs pédagogiques : À la fin de cette leçon, l'élève sera capable de :

- Etudier la monotonie d'une suite numérique ;
- Justifier qu'une suite numérique est majorée ou minorée ;
- Montrer sans calculer sa limite, qu'une suite est convergente…**]**

[Rappels utiles : (Ne pas recopier forcément ces rappels dans le cahier de cours)

- **Définition**

- Une **suite numérique** est une fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.
- **Définir une suite** u **(application de** $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$**)**, c'est associer à chaque entier naturel n un nombre réel $u(n)$ et un seul.
- $u(n)$ est noté u_n **(«** u **indice** n **»).**
- u_n est appelé **« terme d'indice** n **de la suite** u **».**
- **La suite numérique** u **(application de** $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$**) est notée** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- Mais si une partie I de $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble de définition d'une suite u, alors u est notée : $(u_n)_{n\in I}$.

- **Différentes façons de définir une suite numérique**

a) Une suite (u_n) peut être définie de façon explicite $u_n = f(n)$, où f est une fonction définie sur [0 ; +∞ [

N.B. : La formule explicite $u_n = f(n)$ permet de calculer directement à partir de n, le terme d'indice n.

Exemples : les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que :

$u_n = 2n + 3$; $v_n = \frac{n^2+1}{2n}$ …

b) Une suite (u_n) peut être définie par récurrence. (c'est-à-dire par la donnée de u_0 par exemple et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, $n \in \mathbb{N}$ où f est une fonction définie sur un intervalle I, tel que $\forall\, x \in \mathrm{I}$, $f(x) \in \mathrm{I}$.

Exemples : - la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = {u_n}^2 + 1$

- la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $v_0 = -1$ et $v_{n+1} = \sqrt{2v_n + 3}$

- **Suites arithmétiques et suites géométriques**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.

	Suites arithmétiques	**Suites géométriques**
Définition	(u_n) est arithmétique signifie qu'il existe un réel r tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$. Le réel r est appelé raison de la suite arithmétique (u_n). N.B. : r est indépendant de n.	Dire que (u_n) est géométrique signifie qu'il existe un réel q tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n$. Le nombre réel q est appelé raison de la suite géométrique (u_n).

	Suites arithmétiques	Suites géométriques
Relation entre les termes	Théorème 1 : Si (u_n) est une suite arithmétique de 1[er] terme u_0 et de raison r, alors pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr$. Théorème 2 : Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors quels que soient les indices n et p, $u_n = u_p + (n-p)r$.	Théorème 1 : Si (u_n) est une suite géométrique de 1[er] terme u_0 et de raison $q \neq 0$, alors pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 q^n$. Théorème 2 : Si (u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 0$, alors quels que soient les indices n et p, $u_n = u_p \times q^{n-p}$.
Somme de termes consécutifs	Théorème : Soit (u_n) une suite arithmétique. Si $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$ est une somme de termes consécutifs de la suite arithmétique (u_n), alors on a : $S_n = \frac{n(u_0+u_{n-1})}{2}$. N.B. : Le nombre de termes de la somme de termes consécutifs, $u_p + u_{p+1} + \cdots + u_m$ est : $m-p+1$. (m et p étant des entiers naturels tels que $m > p$).	Théorème 1 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $q \neq 1$, $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Théorème 2 : Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$. Si Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$ est une somme de termes consécutifs de la suite géométrique (u_n), alors on a : $S_n = u_0 \times \frac{1-q^n}{1-q}$. N.B. : Si (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$, alors $u_p + u_{p+1} + \cdots + u_m = u_p \times \frac{1-q^{m-p+1}}{1-q}$ (m et p étant des entiers naturels tels que $m > p$)...

Travail à faire : à réviser par les élèves
- Représentation et détermination graphique des termes d'une suite...]

Résumé

1. Suites monotones (Sens de variation d'une suite numérique)

Une suite numérique$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est:
- croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$ (ou $u_{n+1} - u_n \geq 0$)
- décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$ (ou $u_{n+1} - u_n \leq 0$)
- constante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$ (ou $u_{n+1} - u_n = 0$)

* Une suite qui est soit croissante, soit décroissante est dite **monotone**.

* Une suite qui est soit strictement croissante, soit strictement décroissante est dite **strictement monotone.**

N.B. : On peut remplacer $\mathbb{N}$ par I si la partie I de $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble de définition de la suite numérique u.

<u>Exercice Résolu</u> :

Etudier le sens de variation de chacune des suites suivantes :
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$.
- La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $v_n = 2 - \sqrt{n+1}$.

sujetexa.com