

Collège Mgr F. X. VOGT		Année scolaire : 2020/2021
Département de Mathématiques		Niveau : 1ères classes : PD&TI
Second cycle		Cours en ligne

Leçon n°3 : EQUATIONS ET INÉQUATIONS IRRATIONNELLES

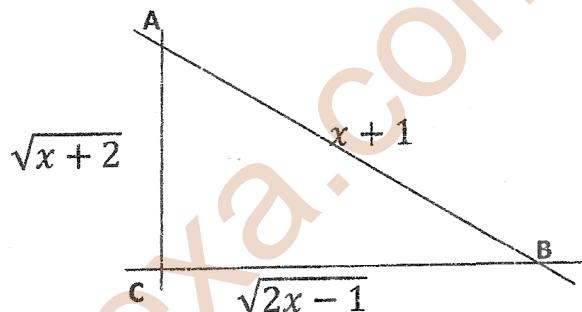
1. Prérequis :

- a) Comparer les nombres réels suivants : $3 - 2\sqrt{5}$ et $-1 - \sqrt{2}$; $1 + 2\sqrt{2}$ et $5 - 3\sqrt{2}$
enfin $| -3 + \sqrt{2} |$ et $-2 + \sqrt{2}$

- b) Résoudre dans \mathbb{R} le système d'inéquations suivant :
- $$\begin{cases} -2x^2 + 5x + 7 \geq 0 \\ -x + 4 \geq 0 \\ -3x^2 + 13x - 9 \leq 0 \end{cases}$$

2. Situation-problème :

Pour quelles valeurs de x cette figure forme-t-elle un triangle ?



3. Activités d'apprentissage :

- a) Montrer que pour tout $x \in]-\infty; \frac{1}{2}[$, l'inéquation n'admet pas de solution.

- b) Montrer que pour tout $x \in [\frac{1}{2}; 3[$, l'inéquation est équivalente au système

d'inéquations :

$$\begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ x + 2 \geq 0 \\ \sqrt{2x - 1} + \sqrt{x + 2} \leq 0 \text{ et } x + 1 > 0 \end{cases}$$

- c) En déduire l'ensemble solution de l'inéquation de la situation-problème sur $[\frac{1}{2}; 3[$

- d) Montrer que sur $[3; +\infty[$, l'inéquation est équivalente au système d'inéquations :

$$\begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ x + 2 \geq 0 \\ -2\sqrt{(2x - 1)(x + 2)} \leq x^2 - x \end{cases}$$

- e) En déduire l'ensemble solution de l'inéquation de la situation-problème sur \mathbb{R}

4. A retenir :

a) Pour résoudre dans \mathbb{R} l'équation irrationnelle : $\sqrt{P(x)} = Q(x)$ on pose le système

de contraintes :
$$\begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \geq 0 \\ P(x) = (Q(x))^2 \end{cases}$$
, on résout l'équation : $P(x) = (Q(x))^2$ et on vérifie que les solutions de cette équation respectent les contraintes des inéquations.

b) Pour résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation : $\sqrt{P(x)} \leq Q(x)$, on pose le système de

contraintes :
$$\begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \geq 0 \\ P(x) - (Q(x))^2 \leq 0 \end{cases}$$
, qu'on résout en dressant un tableau des signes commun aux trois expressions, puis on lit la solution de l'inéquation à partir de ce tableau des signes.

c) Pour résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation : $\sqrt{P(x)} \geq Q(x)$, on pose les systèmes de

contraintes suivants :
$$\begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \geq 0 \\ P(x) - (Q(x))^2 \geq 0 \end{cases}$$
 ou
$$\begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) < 0 \end{cases}$$
, puis dresser le

tableau des signes à partir du système à trois inéquations puis lire la solution suivant le signe de $Q(x)$.

5. Exercices d'application

A. Résoudre dans \mathbb{R} les équations ci-après :

a. $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x-3} = x-1$

b. $\sqrt{x^3 + 4x^2 - 2x - 3} = \sqrt{2x^2 + 10x + 6}$

b. Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

a. $\sqrt{2x+3} \geq x+2$

b. $\sqrt{(2x+3)(-x+6)} \leq x+4$

c. $\sqrt{x^2 - 6x + 3} > x - 3$

d. $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x-3} \leq x+5$

e. $\sqrt{-3x+3} + \sqrt{x+3} \geq -2x+8$

f. $\sqrt{x^2 - 2x - 24} > x+1$

g. $\sqrt{4x+8} + \sqrt{x^2 + 2x + 2} \leq \sqrt{x^2 + 6x + 11}$