

**Partie A : Evaluation des ressources****EXERCICE 1: /7pts**

I-1- Soit  $(U_n)$  la suite numérique définie par :  $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = 2U_n + 1 \end{cases}$ , pour tout  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

a) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $(U_n)$  est une suite d'entiers naturels. **0,5pt**

b) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $U_{n+1}$  et  $U_n$  sont premiers entre eux. **0,5pt**

c) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n = 2^n - 1$ . **0,5pt**

2- Montrer que, pour tout entiers naturels  $n$  et  $p$ , non nuls tels que  $n \geq p$ ,

$$U_n = U_p (U_{n-p} + 1) + U_{n-p}. \quad \mathbf{0,5pt}$$

3-a) Montrer pour  $n \geq p$  l'égalité  $p \operatorname{gcd}(U_n, U_p) = p \operatorname{gcd}(U_p, U_{n-p})$ . **0,5pt**

b) Soit  $n$  et  $p$  deux entiers naturels non nuls, montrer que  $p \operatorname{gcd}(U_n, U_p) = U_{p \operatorname{gcd}(n, p)}$ . **1pt**

c) Déterminer le nombre :  $p \operatorname{gcd}(U_{2005}, U_{15})$ . **0,5pt**

II- Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose  $I_n = \int_1^e (\ln t)^n dt$ .

1- Calculer  $I_1$ . **0,5pt**

2- Etablir une relation de récurrence entre  $I_n$  et  $I_{n+1}$ . **1pt**

3- En déduire  $I_2$  et  $I_3$ . **0,5pt**

4- Démontrer par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $I_n = e \left[ \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} \right] + (-1)^n n! (e-1)$ . **1pt**

**EXERCICE 2: /8pts**

I- Soit  $\xi$  un espace usuel rapporté au repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On considère l'application  $g$  de  $\xi$  qui, à tout point  $M(x', y', z')$  tel que :  $x' = -x+2$ ;  $y' = z+1$ ;  $z' = y+1$ .

1- Définir analytiquement l'homothétie  $h$  de centre  $A(1, 0, 0)$  et de rapport 2, puis montrer que l'application  $f = h \circ g$  admet un point invariant  $B$  que l'on déterminera. **1,5pt**

2- Définir l'homothétie de centre  $(1, -2, -2)$  et de rapport  $\frac{1}{2}$  et montrer que  $r = h \circ f$  est un demi-tour d'axe une droite  $(D)$  à déterminer. **1pt**

II- On considère deux fonctions  $f$  et  $g$  telles que :  $f(x) = x - 1 + \ln(3-x)$  et  $y = g(x)$ .

1. Etudier les variations de  $f$  et dresser son tableau des variations. **1,5pt**

2. Etudier la position de la courbe  $C_f$  de  $f$  par rapport à la droite  $(D) : y = x - 1$ . **0,5pt**

3. Construire  $C_f$  et  $(D)$ . **1pt**

4. Calculer l'aire en  $\text{cm}^2$  du domaine plan délimité par  $C_f$ , l'axe des ordonnées et la droite  $(D)$ . (unité sur les axes 2cm.) **1pt**

5. Soit  $S$  la similitude directe plane dont la forme complexe est  $Z' = (-1 + i)Z + 1 + 4i$ .

a) Préciser les éléments caractéristiques de  $S$ . **0,75pt**

b) Déterminer explicitement  $g(x)$ , sachant que la courbe  $C_g$  de  $g$  est l'image de  $C_f$  par la similitude  $S$ . **0,75pt**

**Partie B : Evaluation des compétences****Situation :**

TCHINDA, étudiant, effectue un stage dans une entreprise qui produit trois types d'huiles végétales. L'huile de type A est prête toutes les 1h 15 min, l'huile de type B toutes les 25 min et l'huile de type C toutes les 45

min. Le dernier jour de son stage, les trois types d'huiles étaient prêts à 8 heures et TCHINDA veut savoir à quelles heures de la journée ces trois types d'huiles seront prêts à la fois pour la dernière fois pour arrêter son stage, sachant que l'entreprise ferme à 18 heures. Après la fermeture de l'entreprise, TCHINDA se rend à un spectacle. Le magicien demande aux spectateurs d'effectuer le programme de calcul suivant : «Prenez le nombre représentant le jour de votre naissance et multipliez – le par 12. Prenez le nombre représentant le mois de votre naissance et multipliez – le par 37. Ajoutez les deux nombres obtenus. Je pourrai alors vous donner votre date d'anniversaire ».TCHINDA annonce 308 et quelques secondes après, le magicien déclare : « Votre anniversaire tombe le 1er Août ».

**Tâche 1** : A quelles heures TCHINDA doit – il arrêter son stage ?

**1,5pt**

**Tâche 2**: Le magicien a – t – il raison ?

**1,5pt**

**Tâche3** : Quelle est la date d'anniversaire de Sandra qui a annoncé 474 ?

**1,5pt**

**Présentation : 0,5pt**

Sujetestexa.com