



Toupé Intellectual Groups

Centre National d'accompagnement à l'Excellence Scolaire au Secondaire

Enseignement Général Francophone et Anglophone – Enseignement Technique

Cours en ligne – Cours de répétitions – Cours à domicile

Direction : Yaoundé | (+237) 696382854 / 672004246 | E-mail : toumpeolivier2017@gmail.com

DIRECTION DES AFFAIRES ACADEMIQUES

INSPECTION GENERALE DES ENSEIGNEMENTS

ACADEMICS AFFAIRS DEPARTMENT

GENERAL INSPECTION OF TEACHING

FICHE DE TRAVAUX DIRIGES DE MATHEMATIQUES N°3

Classes : Terminales S

Nombres Complexes (2)

Année Scolaire : 2021/2022

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$.

Exercice 1

- Soient les nombres complexes : $z = -8\sqrt{3} + 8i$ et $a = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} + \sqrt{2})$
 - Montrer que a est une racine carrée de z
 - Ecrire le nombre complexe z et ses racines carrées sous la forme exponentielle, puis sous la forme algébrique
 - En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$
- On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_k) : Z^3 + kZ^2 - \bar{k}Z - 1 = 0$ avec k un paramètre complexe.
 - Résoudre E_0
 - Dans cette question, on suppose que $k \neq 0$
 - Montrer que si Z_0, Z_1 et Z_2 sont solutions de (E_k) alors $Z_0 \times Z_1 \times Z_2 = 1$
 - Montrer que si Z est une solution de (E_k) alors $\frac{1}{Z}$ l'est aussi
 - Montrer que (E_k) admet au moins une solution de module 1
 - Dans cette question on suppose que $k = e^{i\lambda}, \lambda \in \mathbb{R}$
 - Vérifier que $-k$ est solution de (E_k)
 - Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_k)
 - En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : 2Z^3 + (1 + i\sqrt{3})Z^2 - (1 - i\sqrt{3})Z - 2 = 0$

Exercice 2 :

Dans le plan complexe $\mathbf{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère la droite $(\Delta) : y = 1$

- Vérifier que $M(z) \in (\Delta) \Leftrightarrow |z| = |z - 2i|$
 - On pose $(\vec{u}, \vec{OM}) \equiv \beta[2\pi]$ avec $0 < \beta < \pi$. Montrer que $|z| = \frac{1}{\sin \beta}$ et que $z = \cotg \beta + i$
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $2 \leq n$ et (E') l'équation $z^n = (z - 2i)^n$
 - Montrer que si z est solution de (E') alors $M(z) \in (\Delta)$
 - Montrer que $\left(\frac{z}{z-2i} = e^{i\delta}; \delta \neq 2k\pi\right) \Leftrightarrow z = \cotg \frac{\delta}{2} + i$ (Indication : Retrouver 2.1.)

2.3. En déduire que (E') admet exactement $n - 1$ solutions de la forme

$$z_k = \cot g\left(\frac{k\pi}{n}\right) + i ; 1 \leq k \leq n - 1$$

3. Montrer que l'équation (E') est équivalente à (E'') : $\sum_{k=1}^n C_n^k (-2i)^k z^{n-k} = 0$

4. En déduire que $z_1 \times z_2 \times \dots \times z_{n-1} = \frac{(2i)^{n-1}}{n}$

5. Montrer alors que $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \times \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \times \dots \times \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$

Exercice 3

1. On considère la suite (z_n) définie par $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i$ et $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = -(\sqrt{3} + i)z_n - 1 + i(1 + \sqrt{3})$.

Montrer par récurrence que pour tout entier n , $z_n - i = 2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}(z_0 - i)$

2. L'impédance complexe d'un oscillateur électrique (circuit RLC) série est donnée par la relation $Z = R + i\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$ où R est la résistance totale et $X = g(\omega) = L\omega - \frac{1}{C\omega}$ la réactance du circuit. On pose $\omega = 2\pi f$ avec ω la pulsation et f la fréquence du circuit. L'oscillateur électrique entre dans sa phase de résonance électrique si son impédance complexe est égale à sa résistance électrique et dans cette phase, sa fréquence f prend la valeur f_0 appelée fréquence propre.

2.1. Quelle est la nature de l'impédance complexe si le circuit est dans la phase de résonance ?

2.2. Etablir l'expression de sa fréquence propre

2.3. Etablir que le déphasage φ est $\tan \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$ (φ est un argument de l'impédance Z)

2.4. Etudier et tracer g sur $]0 ; +\infty[$ et en déduire f_0 pour laquelle la réactance est maximale

Situation Problème 1 :

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O ; \vec{e}_1 ; \vec{e}_2)$ d'unité graphique 10m.

La cour de la maison de **Pierre** vérifie l'ensemble $(\mathcal{H}_1)$ des points $M(z)$ du plan tel que $z^3 = 8$. Pierre décide de mettre du gazon sur toute sa cour. 10m² de gazon coûtent **15 000 francs**. Celle de **Jacques** vérifie l'ensemble $(\mathcal{H}_2)$ des points $M(z)$ du plan tel que $|4z + 4 - 4i\sqrt{3}| = |2 - 2i|$. Il décide de verser du gravier sur sa cour et un camion de gravier peut recouvrir 314 m². Jacques achète le camion de gravier à **70 000 francs**. **Christophe** quant à lui veut entourer sa concession avec du fil barbelé en faisant trois tours autour de sa concession. Sa concession vérifie l'ensemble $(\mathcal{H}_3)$ des points $M(z)$ du plan tel que $[z^2 + (1 + 6i)z - 10 + 6i][z^2 + (1 - 6i)z - 10 - 6i] = 0$. Cinq mètres de fil barbelé coûtent **6000 francs**.

Tâches :

1°) Combien Christophe dépensera-t-il ?

2°) Combien Jacques dépensera-t-il ?

3°) Combien Pierre dépensera-t-il ?

Situation Problème 2 :

L'unité de longueur est le décamètre

M. IKANGA possède un champ triangulaire dont le sommet A a pour affixe $1 + 5i$ et les deux autres sommets sont les solutions de l'équation complexe : $Z^2 - (2 + 4\sqrt{2} + 2i)Z + 4\sqrt{2} + i(2 + 4\sqrt{2}) = 0$

Il souhaite sécuriser son terrain par un fil barbelé qui coute **225 FCFA** le mètre et dispose de

42000 FCFA. Son fils Yann élève en classe de Tle D lui dit qu'elle constate que l'angle de sommet A mesure 60° . Son ami M. BELLA lui propose **1.000.000 FCFA** pour l'achat de son terrain, M. IKANGA lui dit qu'il peut vendre son terrain à **5000 FCFA** le mètre carré.

Tâches :

- 1°) L'argent de M. IKANGA sera-t-il suffisant pour couvrir tout son terrain du fil barbelé ?
- 2°) Son fils Yann a-t-elle raison ?
- 3°) M. BELLA peut-il acheter tout le terrain de M. IKANGA ?

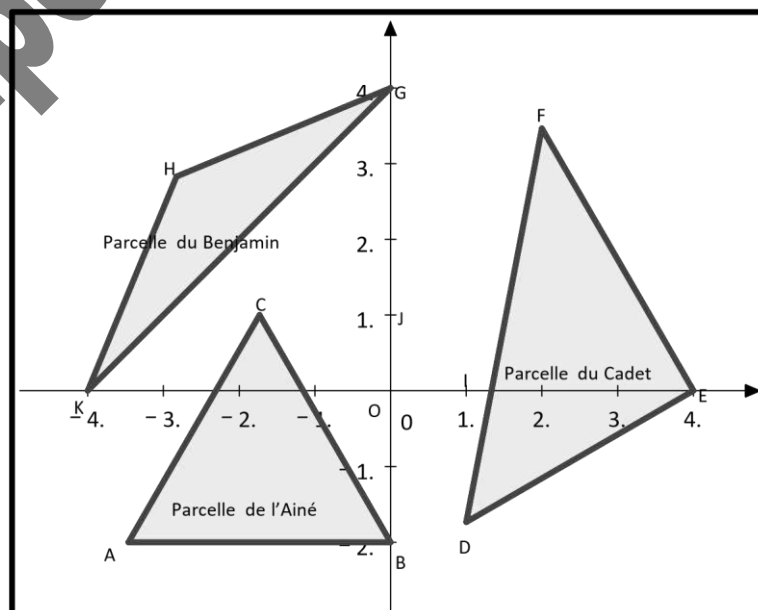
Situation Problème 3 :

A sa mort, un père laisse à chacun de ses trois progénitures une parcelle bornée. Avant sa, il a rédigé sur un testament comment chacun des trois devrez retrouver les bornes qui délimite sa parcelle. Selon son testament, en considérant les positions des poteaux électriques situer aux points O, I et J comme un repère d'un plan complexe, chacun d'eux : Ainé, Cadet et Benjamin, retrouvera les affixes des points images bornes qui délimitent sa parcelle en résolvant respectivement les équations :

$$(E_1): z^3 + (3\sqrt{3} + 5i)z^2 + (-1 + 3i\sqrt{3})z + 8i = 0;$$

$$(E_2): z^3 - (7 + i\sqrt{3})z^2 + 4(5 + i\sqrt{3})z + 32 = 0;$$

$$(E_3): z^3 + 2[(2 + \sqrt{2}) - (2 + \sqrt{2})i]z^2 - 16i(1 + \sqrt{2})z - 32\sqrt{2}(1 + i) = 0.$$



Tâches :

- 1°) Détermine la surface de la parcelle de l'Ainé.
- 2°) Détermine la surface de la parcelle du Cadet.
- 3°) Détermine la surface de la parcelle du Benjamin.

Situation Problème 4 :

M. SONNA qui est un chasseur professionnel disposant un équipement de dernière génération s'en va dans une réserve pour chasser. L'éco garde lui donne les consignes suivantes : Il ne doit que chasser les hérissons, les biches et certains gros oiseaux ; il devra donner 1000 FCFA pour chaque biche, 500 FCFA pour chaque oiseau et 750 FCFA pour chaque hérisson tué. Il ne doit pas arrêter plus de 10 animaux par espèce, il lui montre le sommet d'un arbre qui représente l'origine d'un repère bien défini et deux points A et B avec pour $A \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2} ; \frac{-\sqrt{3}-1}{2} \right)$ et $B \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} ; \frac{\sqrt{3}-1}{2} \right)$ coordonnées en lui disant qu'il ne doit pas chasser en dehors de

la zone délimitée par les points M d'affixes Z vérifiant $\left| \frac{Z-Z_A}{Z_B-Z} \right| = \frac{59}{2}$ où Z_A et Z_B sont les affixes des points A et B .

M. SONNA se trouvant sur ce sommet aperçoit une biche au point A . Pour atteindre cet animal, il doit positionner son arme de telle sorte que l'angle obtenu avec l'axe des réels soit bien précise pour ne pas louper sa cible. A la sortie de la chasse, on dénombre 74 pattes d'animaux plus 6 biches et plus 4 oiseaux. Il se voit alors donner une somme de 16 250 FCFA.

Tâches :

- 1°) Détermine le nombre d'animaux tués par espèce par M. SONNA.
- 2°) Détermine l'angle que M. SONNA doit obtenir pour atteindre cette cible.
- 3°) Détermine l'aire que M. SONNA doit effectuer sa chasse.

Situation Problème 5 :

L'unité de longueur est le décamètre.

Emmanuel possède trois terrains dont il veut absolument clôturer car il lui est rapporté que des personnes mal intentionnées utilisent ces espaces non occupés à des mauvaises fins. Emmanuel décide donc d'utiliser le fil barbelé vendu à 3 500 FCFA le rouleau de 5m.

- Le 1^{er} terrain est formé de tous les points $M(x; y)$ du plan solution de l'équation $Re(Z') = 0$ où $Z' = \frac{z-4-6i}{z-2i}$, $z = x + iy$;
- Le 2^{ème} terrain quant à lui est formé de tous les points $M(x; y)$ du plan vérifiant $|z - 3 - i| = 5$, $z = x + iy$;
- Le 3^{ème} terrain a la forme d'un rectangle dont les dimensions sont les parties réelle et imaginaire de la solution à l'équation : $(1 + 4i)z + (3 - 4i)\bar{z} = 4 - 8i$, $z = x + iy$.

Tâches :

- 1°) Détermine le montant à dépenser par Emmanuel pour l'achat du fil barbelé devant permettre de clôturer le 1^{er} terrain.

2°) Détermine le montant à dépenser par Emmanuel pour l'achat du fil barbelé devant permettre de clôturer le 2^{ème} terrain.

3°) Détermine le montant à dépenser par Emmanuel pour l'achat du fil barbelé devant permettre de clôturer le 3^{ème} terrain.

Situation Problème 6 :

Lorsqu'un appareil est très consommateur d'énergie électrique, il faut améliorer son facteur de puissance permettant ainsi à celui-ci de réduire le courant absorbé. Il est noté $\cos \varphi$ et est compris entre 0 et 1. David possède un appareil consommateur fonctionnant en régime sinusoïdal dont le circuit électrique est un dipôle d'impédance complexe $\underline{Z} = Ze^{j\varphi}$. On monte en parallèle un condensateur de capacité C avec ce dipôle afin de le rendre moins consommateur. Pour cela, l'admittance complexe de l'ensemble noté $\underline{Y}_e = jC\omega + \frac{1}{\underline{Z}}$ doit être un réel. David souhaite également alimenter une charge d'impédance inconnue $\underline{Z}_c = R_c + jX_c$ par une source de tension sinusoïdale modernisée par sa f.é.m. $e(t) = Ee^{j\omega t}$ et son impédance interne $\underline{Z}_0 = R_0 + jX_0$ pour une puissance $P = R_e(\underline{P})$ quelle reçoit soit maximale et dans ce cas, on parlera d'adaptation d'impédance $\underline{P} = \frac{1}{2} \underline{Z}_c i^2$ avec $\underline{i} = \frac{e(t)}{\underline{Z}_c + \underline{Z}_0}$. Il est à noter que j est l'imaginaire pur remplaçant i .

Tâches :

1. Quelle doit être la capacité du condensateur à utiliser pour que l'appareil consomme moins ?
2. Quelle doit être l'impédance de la charge pour quelle reçoive une puissance maximale ?
3. Donner donc l'expression de cette puissance maximale