



T'Oumpé Intellectual Groups

Centre National d'accompagnement à l'Excellence Scolaire au Secondaire

Enseignement Général Francophone et Anglophone – Enseignement Technique

Cours en ligne – Cours de répétitions – Cours à domicile

Direction : Yaoundé | (+237) 696382854 / 672004246 | E-mail : toumpeolivier2017@gmail.com

DIRECTION DES AFFAIRES ACADEMIQUES

INSPECTION GENERALE DES ENSEIGNEMENTS

ACADEMICS AFFAIRS DEPARTMENT

GENERAL INSPECTION OF TEACHING

FICHE DE TRAVAUX DIRIGES DE MATHEMATIQUES N°2

Classes : Terminales S

Nombres Complexes (1)

Année Scolaire : 2021/2022

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$.

Exercice 1

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

$$Z_1 = \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right); Z_2 = \frac{1}{1+\sqrt{2}-i\sqrt{3}}; Z_3 = \frac{1}{2+i} + \frac{1}{2-i}; Z_4 = \frac{(3-i)(1+2i)}{(1-3i)(2+i)}; Z_5 = \frac{(-1-2i)^3}{(1+i)^4}$$

Exercice 2

Détermine les parties réelles et imaginaires des nombres complexes suivants.

$$Z_1 = (3+4i)^3; Z_2 = (2-i)^3; Z_3 = \frac{2+i}{3+4i} - \frac{3-4i}{2-i}; Z_4 = (3+4i)^3 - (2-i)^3$$

Exercice 3

1°) Pour quelles valeurs du nombre réel x le nombre complexe $[10-x+i(2+x)](x-1)$ est-il un nombre réel ? un nombre imaginaire pur ?

$$2^\circ) \text{ Vérifie que : } \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} + \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} - 1 = 0$$

Exercice 4

Calcule le module des nombres complexes des exercices 1 et 2.

Exercice 5

1°) Détermine les nombres complexes z tels que : $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |z-1|$.

$$2^\circ) \text{ Résous dans } \mathbb{C}^2 \text{ le système } (S) : \begin{cases} (1+i)z - iz' = 2+i \\ (2+i)z + (2-i)z' = 7-4i \end{cases}$$

Exercice 6

Dans chacun des cas suivants, calcule le module et un argument de Z et en déduire la forme algébrique de Z .

$$Z = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3; Z = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right); Z = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right); Z = \left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{-1+i}\right)^3$$

Exercice 7

Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants

$$Z_1 = \frac{i}{1-i}; Z_2 = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{4}}; Z_3 = \frac{e^{-2i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}; Z_4 = \frac{5-5i}{10e^{i\frac{\pi}{4}}}; Z_5 = \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{-1+i}\right)^{10}$$

Exercice 8

Soit $Z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $Z_2 = 1-i$

1°) Détermine le module et un argument de Z_1 et Z_2

2°) Ecrire sous forme algébrique et trigonométrique le quotient $\frac{Z_1}{Z_2}$

3°) En déduire les valeurs $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$ de

Exercice 9

Soit n un entier naturel. On pose : $A = \sum_{k=0}^{n-1} \cos kx$ et $B = \sum_{k=0}^{n-1} \sin kx$

1°) Calcule et écrit sous forme exponentielle $A + iB$

2°) En déduire les expressions plus simples de A et B

Exercice 10

Calcule et écrit sous forme algébrique les racines carrées des nombres complexes suivants.

$$Z_1 = 5 - 12i; Z_2 = -8i; Z_3 = 7 + 24i; Z_4 = 11 + 4i\sqrt{3}; Z_5 = -i$$

Exercice 11

1°) Calcule : $(1 + 8i)^2$

2°) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(2 + i)z^2 - (9 + 2i)z + 5(3 - i) = 0$

Exercice 12

Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

$$a) iz^2 + z - 3 + i = 0; b) (-2 + i)z^2 + (4 - 5i)z + 3 - i = 0; c) z^2 - z + 1 = 0$$

Exercice 13

Soit l'équation (E): $z^3 + (1 - i)z^2 + (4 - i)z - 4i = 0$

1°) Vérifie que i est une solution de l'équation (E)

2°) Trouve un polynôme P du second degré / : $z^3 + (1 - i)z^2 + (4 - i)z - 4i = (z - i)P(z)$

3°) Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$

Exercice 14

Soit P le polynôme défini par : $P(z) = z^3 - 2(1 + 2i)z^2 + 7iz + 3(1 - 3i)$

1°) Démontre qu'il existe un imaginaire pur $i\beta$ solution de l'équation : $P(z) = 0$

2°) Détermine le polynôme Q / : $P(z) = (z - i\beta)Q(z)$

3°) Résous alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

Exercice 15

Soit P le polynôme défini par : $P(z) = z^4 + (5 - 2i)z^3 + (8 - 10i)z^2 + (6 - 16i)z - 12i$.

1°) Vérifie que : $P(2i) = P(-3) = 0$

2°) Détermine un polynôme Q du second degré tel que pour tout nombre complexe z , on a :

$$P(z) = [z^2 + (3 - 2i)z - 6i]Q(z)$$

3°) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$

Exercice 16

1°) Linéarise : $\cos^4 x + \sin^4 x$; $\cos^4 x + \sin^2 x$; $\cos^3 x \sin^3 x$; $\cos^3 x \sin^2 x$.

2°) Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\cos 5x + 2\cos 3x + \cos x = 0$; b) $\sin x + \sin 2x + \sin 7x + \sin 8x = 0$;

c) $\sin 3x - \sin 2x = \sin x$ et d) $\cos 2x + \cos 6x = \sin 3x - \sin 5x$.

Exercice 17

Dans chacun des cas suivants, détermine et représente l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la condition indiquée :

a) $|z - 2 + i| = |\bar{z} - i|$; b) $|z - 2 + i| = |z|$; c) $|z - 3 + i| = |2z - 4i|$; d) $\left| \frac{z-3i}{z-2+i} \right| = 1$

Exercice 18

Soit les points $\Omega \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Dans chacun des cas suivant :

Donne l'écriture complexe de la transformation puis détermine l'image de A par cette transformation.

a) Symétrie de centre Ω .

b) Homothétie de centre Ω et de rapport $-\frac{1}{2}$.

c) Rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Exercice 19

Soit f la transformation du plan dont l'écriture complexe est : $z' = 4e^{i\frac{\pi}{3}}z + 4\sqrt{3} - 2i$

1°) Détermine le nombre complexe z_0 tel que : $z' - z_0 = 4e^{i\frac{\pi}{3}}(z - z_0)$

2°) En déduis que f est la composée d'une homothétie et d'une rotation de même centre que l'on précisera.

Exercice 20

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 - (6 + i\sqrt{3})z^2 + (11 + 4i\sqrt{3})z - 6 - 3i\sqrt{3} = 0$.

1°) Résous cette équation en sachant qu'elle a deux solutions réelles.

2°) On désigne par A, B, C, E et G les points d'affixes respectives $3, 2 + i\sqrt{3}, -1, 7$ et $11 + 4i\sqrt{3}$.

a. Démontre que le triangle IAB est équilatéral.

b. Démontre que les points B, C et G sont alignés.

c. Place les points A, B, C, E et G .

3°) Calcule l'affixe du point F de l'axe des abscisses tel que le triangle EFG soit équilatéral.

Exercice 21

1°) a. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 4z + 8 = 0$. Ecrire les solutions sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

b. Place les images A et B des solutions, A étant l'image de la solution dont la partie imaginaire est négative. Quelle est la nature du triangle OAB ?

2°) Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z$

a. Détermine la nature et les éléments caractéristiques de l'application f .

b. Détermine sous forme trigonométrique, puis sous forme algébrique l'affixe du point A' , image de A par f . En déduis les valeurs de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Exercice 22

On considère les nombres complexes : $a = -\sqrt{3} + i$, $b = 3 + 2i$ et $c = 7 - 2i$.

1°) a. Détermine de deux façons différentes les racines carrées de a .

b. Détermine les entiers relatifs n pour lesquels a^n est un nombre réel.

c. Détermine les entiers relatifs n pour lesquels a^n est un nombre imaginaire pur.

2°) Détermine et construis les ensembles de points M d'affixe z tels que : a) $|z - b| = |z - c|$ et $2|z - b| = |a|$.

3°) Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = (1 + i\sqrt{3})z - 5i\sqrt{3}$.

a. Démontre que f admet un seul point invariant Ω .

b. Démontre que f est la composée d'une rotation et d'une homothétie positive de même centre Ω . Précise l'angle de la rotation et le rapport de l'homothétie.

3°) Détermine et construis les images par f des ensembles déterminés à la question 2°).

Exercice 23

Soit A le point d'affixe $2i$ et f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z , distinct de A , associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \frac{2iz-5}{z-2i}$

1°) Démontre que f admet deux points invariants.

2°) Démontre que f est bijective et détermine son application réciproque.

3°) Démontre que la droite de repère $(O ; \vec{e}_1)$, privée de A , est globalement invariant par f .

4°) a. Démontre que : $|z' - 2i| \cdot |z - 2i| = 9$.

4°) b. En déduis l'image par f du cercle (C) de centre A et de rayon r .

Détermine r pour que (C) soit globalement invariant par f .

Exercice 24

Soit l'équation $(E): z^4 + 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1 = 0$, $z \in \mathbb{C}$.

1°) Montre que si z_0 est solution de (E) , alors $\bar{z}_0$ est solution de (E) .

a. Détermine les nombres réels a et b tels que : $(E) \Leftrightarrow z^2 \left[\left(z - \frac{1}{z} \right)^2 + a \left(z - \frac{1}{z} \right) + b \right] = 0$

b. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + aZ + b = 0$, puis l'équation (E) .

3°) Démontre que les images des quatre solutions de (E) appartiennent à un même cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 25

Soit l'équation $(E) : z^5 = 1$.

1°) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) et représente les images des solutions.

2°) Démontre que la somme des solutions de l'équation (E) est nulle et en déduis que :

$$\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$$

3°) Démontre que $\cos \frac{2\pi}{5}$ est solution de l'équation : $4X^2 + 2X - 1 = 0$ et déduis la valeur de $\cos \frac{2\pi}{5}$

4°) Soit l'équation $(E') : (z - 1)^5 = (z + 1)^5, (z \in \mathbb{C})$.

a. Démontre que si z_0 est solution de (E') , alors : $\left| \frac{z_0 - 1}{z_0 + 1} \right| = 1$. En déduis que les solutions de (E') sont imaginaires pures.

b. Résous alors (E')