



T'Oumpé Intellectuel Groups

Centre National d'accompagnement à l'Excellence Scolaire au Secondaire

Enseignement Général Francophone et Anglophone – Enseignement Technique

Cours en ligne – Cours de répétitions – Cours à domicile

Direction : Yaoundé | (+237) 696382854 / 672004246 | E-mail : toumpeolivier2017@gmail.com

DIRECTION DES AFFAIRES ACADEMIQUES

INSPECTION GENERALE DES ENSEIGNEMENTS

ACADEMICS AFFAIRS DEPARTMENT

GENERAL INSPECTION OF TEACHING

FICHE DE TRAVAUX DIRIGES DE MATHEMATIQUES N°1

Classes : Terminales S

Démonstration par Récurrence

Année Scolaire : 2021/2022

EXERCICE 1 : Démontrer chacune des propositions suivantes en utilisant un raisonnement par récurrence

1. Pour tout entier naturel non nul n , $1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) = (n + 1)^2$
2. Pour tout entier $n \geq 2$, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ naturel, puis en déduire : $\sum_{k=1}^n k(n-k) = \frac{n(n+1)(n-1)}{6}$ et $S = 3^2 + 4^2 + \dots + 99^2$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{4n^2-1} = \frac{n}{2n+1}$
4. Pour tout entier naturel non nul n , $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$
5. Pour tout entier naturel non nul n , $\sum_{p=1}^n p(p+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$
6. Pour tout entier naturel $n \geq 3$, $\sum_{i=1}^n i2^{i-1} = 1 + (n-1)2^n$
7. Pour tout entier naturel non nul n :
 - a. $10^n - 1$ est un multiple de 9
 - b. $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est un multiple de 7
8. Pour tout entier naturel non nul n , $\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n}$
9. Pour tout entier naturel $n \geq 4$, $2^n \geq n^2$

EXERCICE 2 (Séries C et E uniquement) : Démontrer par récurrence que

1. Pour tout entier naturel n non nul, $\sum_{k=1}^n k(k!) = (n+1)! - 1$
2. Pour tout entier naturel non nul n , $\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} (2k-1) = (-1)^{n+1} \times n$
3. Pour tout entier naturel n , $(1+x)^n \geq 1 + nx$ où x est un réel strictement positif
4. Pour tout entier naturel n , $(1+a)^{n+1} - a(n+1) - 1$ est divisible par a^2
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

6. On définit les suites (x_n) et (y_n) par
$$\begin{cases} x_0 = 3, y_0 = 1 \\ x_{n+1} = \frac{6}{5}x_n + \frac{2}{5}y_n + 1 \\ y_{n+1} = \frac{2}{5}x_n + \frac{9}{5}y_n + 2 \end{cases}$$

Démontrer que les points $M_n(x_n, y_n)$ appartiennent à la droite $(D) : 2x - y - 5 = 0$

EXERCICE 3 :

On pose pour tout entier naturel $n \geq 1$, $S_n = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n - 1)^3$

1. Calculer S_1 , S_2 et S_3 .
2. Démontrer par récurrence que $S_n = 2n^4 - n^2$
3. Déterminer l'entier naturel n tel que $S_n = 29161$
4. Calculer $S = 33^3 + 35^3 + \dots + 99^3$

EXERCICE 4 : Fonctions et récurrence

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par $f(x) = \frac{1}{x-2}$

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ (les dérivées première et seconde de f)
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n ,

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \times n!}{(x-2)^{n+1}} \quad (f^{(n)} \text{ est la dérivée } n^{\text{ième}} \text{ de } f)$$