TOumpé Intellectual Groups

Centre National d'accompagnement à l'Excellence Scolaire au Secondaire

Enseignement Général Francophone et Anglophone – Enseignement Technique

Cours en ligne – Cours de répétitions – Cours à domicile

Direction : Yaoundé | (+237) 696382854 / 672004246 | E-mail : toumpeolivier2017@gmail.com

DIRECTION DES AFFAIRES ACADEMIQUES	ACADEMICS AFFAIRS DEPARTMENT
****************	****************
OFFICE DES EXAMENS ET CONCOURS	EXAMS AND COMPETITIONS OFFICE
****************	****************

VACANCES 2021 : CONTROLE CONTINU DES ACQUIS N° 3

Classes : Terminales CE	Durée : 3 heures	Coefficient : 7/6	Année Scolaire : 2021/2022

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES — 15.5 POINTS

EXERCICE 1 — LOGIQUE MATHEMATIQUE — 06 POINTS

Dans chacune des questions ci-après, précisez le type de raisonnement logique à adopter puis utilisez-le afin de démontrer les affirmations. Il est à noter que la qualité de la rédaction est un élément phare dans vos démonstrations.

1. Montrer que pour tout réel x, on a : $1 + tan^2 x = \frac{1}{cos^2 x}$
2. Montrer que : $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}}$
3. Montrer que si $a, b \in Q$ (ensemble des nombres rationnels) alors $a + b$ l'est aussi.
4. Montrer que l'assertion suivante est fausse : « Tout entier positif est somme de trois carrés »
5. Soit n un entier naturel. Montrer que si n^2 est pair, alors n l'est également.
6. Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel non nul par : $Un = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

   Montrer que pour tout entier naturel k non nul, $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$
7. Démontrer pour tout $n \geq 1$ que : $Sn = \frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$

EXERCICE 2 — CRITERES DE DIVISIBILITE — 05 POINTS

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes :
   a) $xy = 2x + 3y$
   b) $x^2 - y^2 - x + 3y = 30$
2. Déterminer les entiers relatifs n tes que $n - 4$ divise $3n - 17$
3. Soit m un entier naturel non nul ayant pour décomposition en produit de facteurs premiers $m = a^\alpha \times b^\beta \times c^\gamma$. Soit S' la somme de tous ses diviseurs positifs.
   a) Donner le nombre de diviseurs positifs de m
   b) Montrer que $S' = \frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1} \times \frac{b^{\beta+1}-1}{b-1} \times \frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1}$

c) Calculer la somme des diviseurs positifs de 2520

4. Déterminer un entier de décomposition de $X^i Y^j$ qui admet 6 diviseurs positifs dont la somme est 228
5. On dit qu'un entier **m** est parfait si et seulement si la somme $S'(m)$ de ses diviseurs positifs est égale à $2m$. Démontrer que si 2^{n-1} est premier alors $2^{n-1}(2^n - 1)$ est un nombre parfait

EXERCICE 3 NOMBRE DE FERMAT 04.5 POINTS

Soit **n** un entier naturel. On appelle nombre de Fermat, le nombre $F_n = 2^{2^n} + 1$

1. Montrer que $\forall\, l \in \mathbb{N}, x^l - 1 = (x-1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{l-1})$ et en déduire que $2^a - 1$ premier $\Rightarrow a$ premier
2. Soit t un entier naturel non nul.
   2.1. Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{N}, x^{2t+1} + 1 = (x+1)(x^{2t} - x^{2t-1} + \cdots + x^2 - x + 1)$
   2.2. Montrer que si **u** est un entier impair alors $2^u + 1$ n'est pas un nombre premier
   2.3. Montrer que si **u** est un entier naturel qui possède un diviseur impair alors $2^u + 1$ n'est pas premier
   2.4. En déduire les seuls entiers naturels de la forme $2^u + 1$ qui sont des nombres de Fermat
   2.5. Vérifier que pour tout entier naturel **n**, $F_{n+1} = (F_n - 1)^2 + 1$. Déduire alors $pgcd(F_{n+1}, F_n)$

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES 04.5 POINTS

Compétence visée : Résoudre une situation problème, déployer un raisonnement logique, communiquer à l'aide du langage mathématique en faisant appel aux congruences et à la division euclidienne.

TOumpé Intellectual Groups pour la sécurité des données personnelles de ses élèves et enseignants, a opté pour le chiffrement affine. A chaque lettre de l'alphabet français on associe à l'aide du tableau ci-dessous un entier compris entre 0 et 25.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Le procédé de codage est défini de la façon suivante :

- **Etape 1 :** A la lettre que l'on veut coder, on associe l'entier m correspondant dans le tableau
- **Etape 2 :** On calcule le reste de la division euclidienne de $9m + 5$ par 26 et on le note p
- **Etape 3 :** Au nombre p, on associe la lettre correspondant dans le tableau.

On dit alors que lorsqu'on code la lettre associée à m on obtient la lettre associée à p et lorsqu'on décode la lettre associée à p, on obtient la lettre associée à m.

On rappelle que $9m + 5 \equiv p[26] \Leftrightarrow m \equiv 3p - 15[26]$. Dans cette plateforme, les élèves travaillent en groupe et chaque groupe se constitue du même nombre d'élèves. Lorsque 11 groupes se retrouvent pour une séance de travail programmée le week-end en ligne à midi, il y a 7 classes numériques occupées et 5 élèves qui n'ont pas d'espace personnel de travail (une place assise dans la modélisation d'une classe en présentiel).

Taches à effectuer :

1. Aider la Directrice Générale de cette plateforme à coder le mot **EMPLOYE**
2. Aider la Directrice Générale de cette plateforme à décoder le mot **OZPSMPSDPPSUX**
3. Déterminer le nombre minimal d'élèves par groupe sachant que chaque groupe a plus de 300 élèves

Présentation **1pt**