les Séries d' Exercices

Nouveau

1

Limites
Continuité

Nouvelle édition
Revue et corrigée
+ Groupe WhatsApp pour Discuter les difficultés

OUARZAZATE 2022

110 Exercices

Badr Eddine El FATIHI

2 Bac SM

MATHS 2022

Badr Eddine EL FATIHI
00212660344136
Professeurbadr.blogspot.com
Ouarzazate 2022

ROYAUME DU MAROC

SÉRIES D'EXERCICES

« 2ème Année Bac – SM »

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Projet de livre 2021-2022

Tome 1 : limites et continuité

- **Montrer une limite par la définition**
- **Enlever la forme indéterminée**
- **La continuité à gauche et à droite**
- **Limite au voisinage de plus ou moins l'infini**
- **Prolongement par continuité**
- **L'arc tangente et la racine nième**
- **Montrer qu'une équation admet des solutions**
- **Travailler avec la règle de l'Hôpital**

Professeur Badr Eddine EL FATIHI
Ouarzazate 2021
Samedi 01 septembre 2021

1 : Préface

Ce livre est un support d'exercices corrigés conçu en faveur des élèves de la 2ème année Bac SM du Maroc. J'ai y classé 110 exercices pour la leçon intitulée limites et continuité. Les exercices proposés sont riches, variés et contiennent tout type de questions. C'est une plate-forme de travail pour les élèves qui auraient besoin d'un supplément de soutien très particulier. dans ce cadre, l'élève est invité à choisir le type d'exercices là où il se sent faible et de prendre son temps pour renforcé ses apprentissages. Mon objectif est d'aider ces élèves à parvenir à un niveau qui leurs permettrait de passer les devoirs, les examens et tout type de concours d'admission pour les écoles supérieurs avec succès.

Cette série contient entre autre un rappel de cours, les énoncés des exercices et les réponses détaillées qu'on devrait lire attentivement et en profiter au maximum les idées de résolution. J'ai y classé encore des moyens et des méthodes hors programme juste pour élargir son équilibre de connaissances. Sachez que, dans les concours d'admission et même dans les examens, la réponse finale compte plus que la méthode suivie. La vitesse de réalisation est aussi importante car vous serez certainement serrés par le temps. D'ailleurs les concours sont formulés sous la forme de questions à choix multiple. Bon courage à tout le monde et à bientôt ☺

2 : Méthodologie du travail

- **Considérer d'abord une séance d'exercice comme un jeu, car Apprendre par le jeu est le meilleur moyen existant de nos jours**
- **Choisir le type d'exercices voulu**
- **Lisez la question et essayer de trouver la réponse en 10 min en consultant de temps à autre le rappel de cours**
- **Consulter ma réponse sur ce livre**
- **Notez les lacunes et difficultés rencontrées**
- **Retourner pour refaire l'exercice à nouveau**
- **Passer à un autre exercice**

3 : Rappel de cours

Outil N° 1 :

C'est la définition d'une limite d'une fonction que ce soit finie ($l \epsilon \mathbb{R}$) ou infinie, au voisinage d'un point ou au voisinage de plus ou moins l'infini :

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \alpha > 0)\ (\forall x \epsilon D_f)\ : \\ |x - x_0| < \alpha \ \Rightarrow\ |f(x) - l| < \varepsilon \end{array} \right.$$

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (\forall A > 0)\ (\exists \alpha > 0)\ (\forall x \epsilon D_f)\ : \\ |x - x_0| < \alpha \ \Rightarrow\ f(x) > A \end{array} \right.$$

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists B > 0)\ (\forall x \epsilon D_f)\ : \\ x > B \ \Rightarrow\ |f(x) - l| < \varepsilon \end{array} \right.$$

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (\forall A > 0)\ (\exists B > 0)\ (\forall x \epsilon D_f)\ : \\ x > B \ \Rightarrow\ f(x) > A \end{array} \right.$$

Il suffirait d'apprendre par cœur ces quatre définitions. Et pour en déduire les cas de moins l'infini, il suffit d'effectuer un petit changement de variable de type :

$$x \to -\infty \quad \Leftrightarrow \quad (-x) \to +\infty$$
$$f(x) \to -\infty \quad \Leftrightarrow \quad -f(x) \to +\infty$$

On obtient ainsi les définitions suivantes :

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (\forall A > 0)\ (\exists \alpha > 0)\ (\forall x \epsilon D_f)\ : \\ |x - x_0| < \alpha \ \Rightarrow\ f(x) < -A \end{array} \right.$$

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists B > 0)\ (\forall x \epsilon D_f)\ : \\ x < -B \ \Rightarrow\ |f(x) - l| < \varepsilon \end{array} \right.$$

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (\forall A > 0)\ (\exists B > 0)\ (\forall x \epsilon D_f)\ : \\ x < -B \ \Rightarrow\ f(x) < -A \end{array} \right.$$

Outil N° 2 :

C'est la définition de la limite à droite ou à gauche d'une fonction au voisinage d'un point quelconque :

- $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \alpha > 0)\ (\forall x \epsilon D_f)\ : \\ 0 < x - x_0 < \alpha \ \Rightarrow\ |f(x) - l| < \varepsilon \end{array} \right.$$

- $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = l$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \alpha > 0)\ (\forall x \epsilon D_f)\ : \\ -\alpha < x - x_0 < 0 \ \Rightarrow\ |f(x) - l| < \varepsilon \end{array} \right.$$

- $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = +\infty$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (\forall A > 0)\ (\exists \alpha > 0)\ (\forall x \epsilon D_f)\ : \\ 0 < x - x_0 < \alpha \ \Rightarrow\ f(x) > A \end{array} \right.$$

- $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = +\infty$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (\forall A > 0)\ (\exists \alpha > 0)\ (\forall x \epsilon D_f)\ : \\ -\alpha < x - x_0 < 0 \ \Rightarrow\ f(x) > A \end{array} \right.$$

- $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = -\infty$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (\forall A > 0)\ (\exists \alpha > 0)\ (\forall x \epsilon D_f)\ : \\ 0 < x - x_0 < \alpha \ \Rightarrow\ f(x) < -A \end{array} \right.$$

- $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = -\infty$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (\forall A>0)\ (\exists \alpha>0)\ \left(\forall x \epsilon D_f\right) : \\ -\alpha < x - x_0 < 0 \ \Rightarrow \ f(x) < -A \end{array}\right.$$

Outil N° 3 :

Si la limite d'une fonction numérique existe en un point, alors elle est unique. C'est ce qu'on appelle l'unicité de la limite :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{t\to x_0} f(t)$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Outil N° 4 :

Voici les limites de quelques fonctions usuelles :

- $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0) \quad ; \quad P = polynôme$
- $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ Q(x_0)\neq 0}} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)} \ ; \ P,Q = polynômes$
- $\lim\limits_{x\to x_0} \sin(x) = \sin(x_0)$
- $\lim\limits_{x\to x_0} \cos(x) = \cos(x_0)$
- $\lim\limits_{x\to x_0} \tan(x) = \tan(x_0) \quad ; \quad x_0 \not\equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$
- $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0} \quad ; \quad x_0 \geq 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\tan x}{x}\right) = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Outil N° 5 :

Opérations sur les limites : on prenant en considération juste les formes déterminées :

- $\lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
- $\lim\limits_{x\to x_0} (f\times g)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \times \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
- $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0}$

Outil N° 6 :

Voici une liste de formes déterminées écrites sous cette forme juste pour simplifier la rédaction :

$l+\infty = +\infty$	$l-\infty = -\infty$
$+\infty+\infty = +\infty$	$-\infty-\infty = -\infty$
$nég \times (+\infty) = -\infty$	$nég \times (-\infty) = +\infty$
$posi \times (+\infty) = +\infty$	$posi \times (-\infty) = -\infty$
$(+\infty)(-\infty) = -\infty$	$(+\infty)(+\infty) = +\infty$
$\dfrac{1}{0^+} = +\infty$	$\dfrac{1}{0^-} = -\infty$
$\dfrac{1}{+\infty} = 0^+$	$\dfrac{1}{-\infty} = 0^-$
$(-\infty)(-\infty) = +\infty$	

Outil N° 7 :

Voici une liste des formes indéterminées :

$+\infty-\infty$	$0\times\infty$	$\dfrac{\infty}{\infty}$	$\dfrac{0}{0}$
1^{∞}	∞^0	0^0	

Remarque : la forme indéterminée fondamentale est zéro/zéro. Et toutes les autres formes indéterminées sont des variantes de cette forme là.

⇝ $exemple1 : \quad 0\times\infty = 0\times\dfrac{1}{0} = \dfrac{0}{0}$

⇝ $exemple2 : \quad \dfrac{\infty}{\infty} = \dfrac{1}{\infty}\times\infty = 0\times\infty = \dfrac{0}{0}$

Outil N° 8 :

C'est la règle de l'Hôpital : je suis sûr est certain que cette technique est hors programme mais vous devriez l'apprendre et à la maîtriser pour l'appliquer éventuellement dans le brouillon pour déterminer la valeur de la limite.

- $la\ forme\ \frac{0}{0} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Exemples :

- $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+tan^2(x)}{1}\right) = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\sin x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = 1$

- $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x-\sin x}{tanx - x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\tan x\cdot\left(1+tan^2(x)\right)}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{2\left(1+tan^2(x)\right)+2\left(tan^2(x)\right)\left(1+tan^2(x)\right)}$

$= \frac{\cos 0}{2\left(1+tan^2(0)\right)+2\left(tan^2(0)\right)\left(1+tan^2(0)\right)} = \frac{1}{2}$

- $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)-\tan(x)}{x^3}\right) = \frac{-1}{2}$
- $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{x-1}-1}{x^2-4}\right) = \frac{1}{8}$

Je vous laisse le soin de vérifier ces deux dernières limites.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Outil N° 9 :

L'utilisation de la calculatrice : cette technique est valable juste dans vos préparations chez-vous à la maison pour avoir une idée sur la valeur de la limite. Voici deux exemples à méditer :

- $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x-\sin x}{tanx - x}\right) = f(0{,}001)\ rad = 0{,}50003 = \frac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{\sqrt{x^4-x^3}} - x\right) = f(10^8)$

$= -0{,}24999 = \frac{-1}{4}$

Outil N° 10 :

La continuité en un point :

$$\boxed{f\ est\ continue\ en\ x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

Outil N° 11 :

La continuité en un point implique, et nécessite la continuité à droite et à gauche :

$$\boxed{f\ est\ cont\ en\ x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = f(x_0)}$$

Outil N° 12 :

Prolongement par continuité d'une fonction :

$\tilde{f}$ *est un prolongement par continuité de la fonction* f *en un* $x_0 \notin D_f$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x) \quad ; \quad x \in D_f \\ \tilde{f}(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Outil N° 13 :

La continuité sur un intervalle :

- f est continue sur l'intervalle $]a,b[$
  $\Leftrightarrow$ f est continue en x_0 ; $\forall x_0 \in]a,b[$

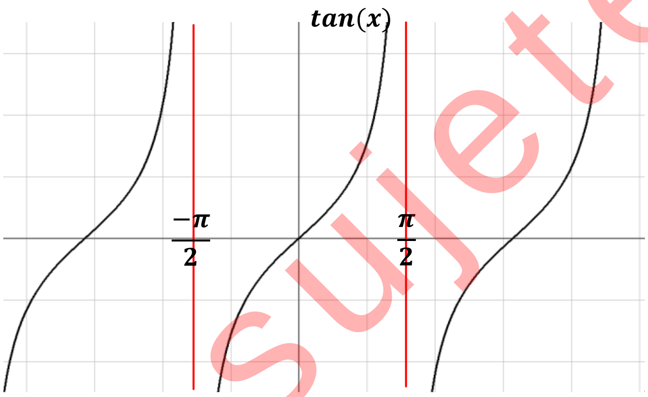
- f est continue sur l'intervalle $[a,b[$
  $\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ est continue sur }]a,b[\\ \text{et } f \text{ continue en } a^+ \end{cases}$

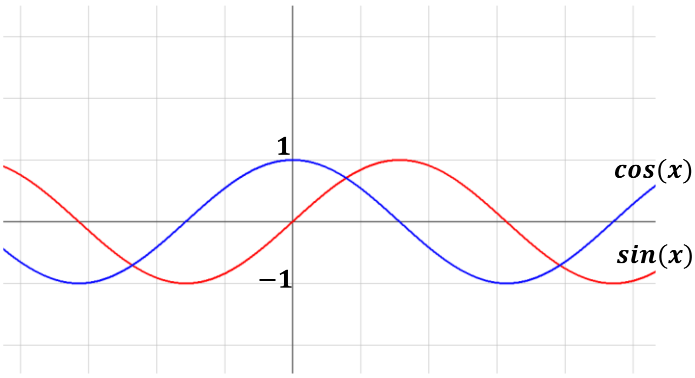
- f est continue sur l'intervalle $]a,b]$
  $\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ est continue sur }]a,b[\\ \text{et } f \text{ continue en } b^- \end{cases}$

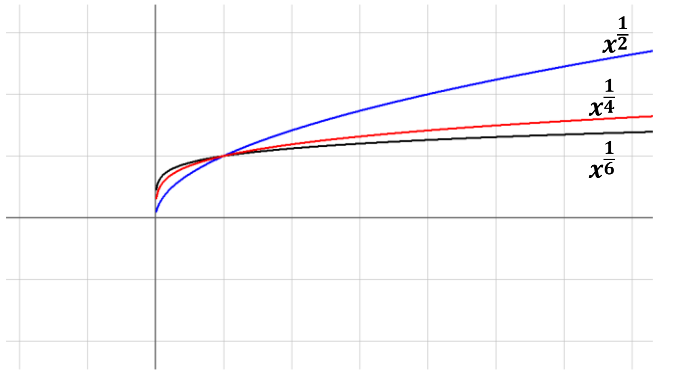
- f est continue sur l'intervalle $[a,b]$
  $\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ est continue sur }]a,b[\\ \text{et } f \text{ continue en } a^+ \text{ et } b^- \end{cases}$

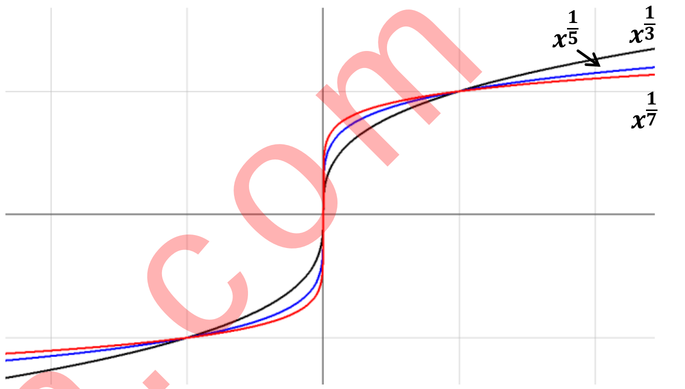
Outil N° 14 :

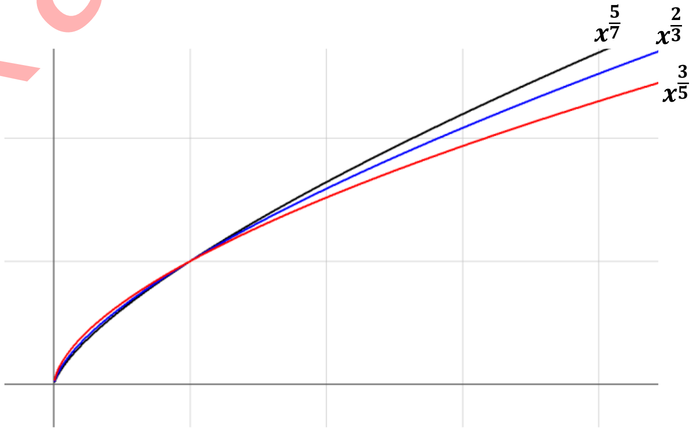
La mémorisation de l'allure de quelques fonctions usuelles vous permettriez d'en tirer les limites que vous en aurez besoin :

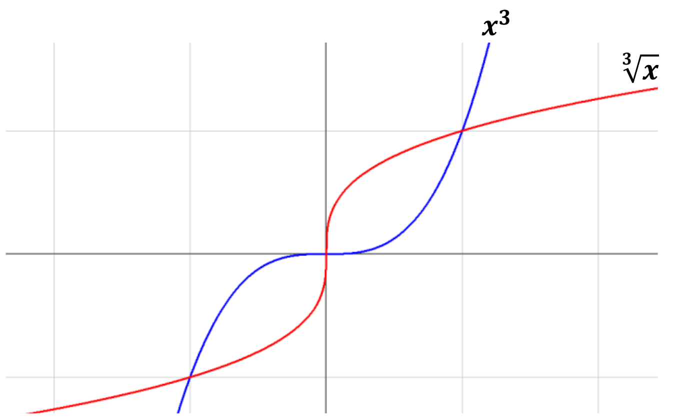






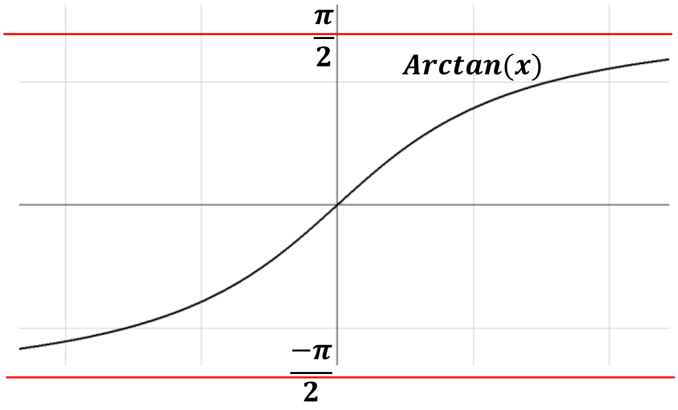


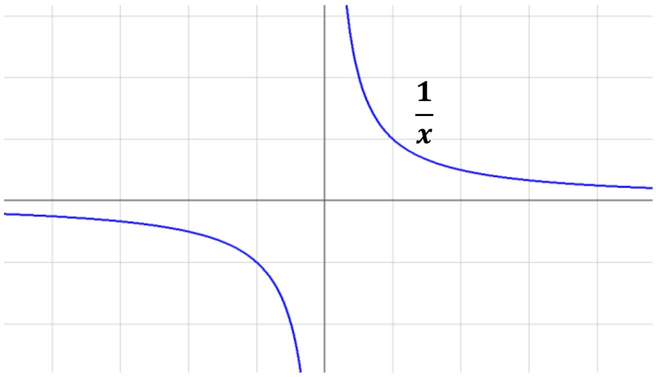


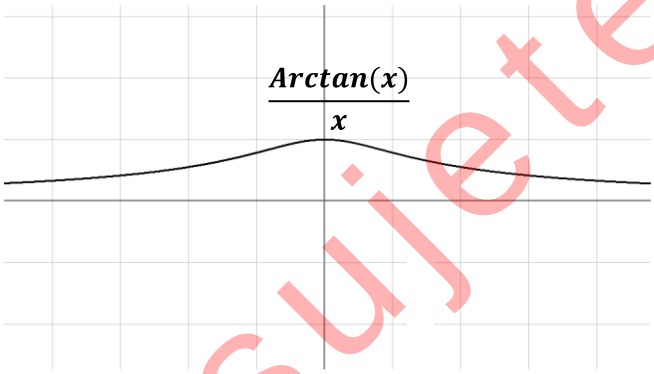


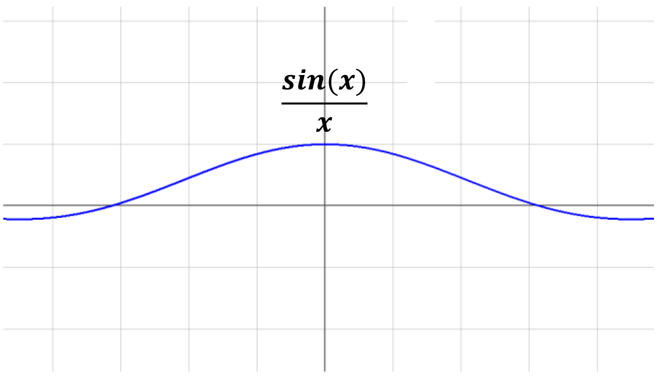
You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.









Outil N° 15 :

Opérations sur les fonctions continues : soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et soit $\lambda \in \mathbb{R}$ Alors :

- $f+g\ ;\ \lambda f\ ;\ f\times g$ *sont continues sur* I
- $f^n\ ;\ n\in\mathbb{N}^*$ *est continue sur* I
- $|f|$ *est continue sur* I
- $\sqrt{f}$ *continue sur* I *avec* $f\geq 0$
- f/g *est continue sur* I *avec* $g\neq 0$

Outil N° 16 :

La continuité d'une composition :

- $\left|\begin{array}{l} f\ \text{cont sur l'intervalle}\ I \\ g\ \text{cont sur l'intervalle}\ J \\ f(I)\subseteq J \end{array}\right.$

$$\Longrightarrow \quad gof\ \text{est continue sur}\ I$$

Outil N° 17 :

Comment intervertir les signes de limite et image. Autrement-dit, quand aurais-je le droit de dire que la limite de l'image est égale à l'image de la limite ?

- $\left|\begin{array}{l} f:\ I\ \longmapsto\ f(I)\ \text{continue sur}\ I \\ g:\ J\ \longmapsto\ g(J)\ \text{continue en}\ \ell \\ \ell=\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \end{array}\right.$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} g\big(f(x)\big)=g\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)$$

Outil N° 18 :

L'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par une fonction continue est un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $I\subseteq\mathbb{R}$.
On calcule l'image de I selon les cas suivants :

- $f([a,b]) = \begin{cases} [f(a), f(b)] & si \;\; f \;\; est \;\; \nearrow \;\; sur \; I \\ [f(b), f(a)] & si \;\; f \;\; est \;\; \searrow \;\; sur \; I \end{cases}$

- $f(]a,b[) = \begin{cases} \left]\lim\limits_{a^+} f(x), \lim\limits_{b^-} f(x)\right[& si \;\; f \;\; est \;\; \nearrow \; I \\ \left]\lim\limits_{b^-} f(x), \lim\limits_{a^+} f(x)\right[& si \;\; f \;\; est \;\; \searrow \; I \end{cases}$

- $f([a,b[) = \begin{cases} \left[f(a), \lim\limits_{b^-} f(x)\right[& si \;\; f \;\; est \;\; \nearrow \; I \\ \left]\lim\limits_{b^-} f(x), f(a)\right] & si \;\; f \;\; est \;\; \searrow \; I \end{cases}$

- $f(]-\infty, a]) = \begin{cases} \left]\lim\limits_{-\infty} f(x), f(a)\right] & si \;\; f \;\; est \;\; \nearrow \; I \\ \left[f(a), \lim\limits_{-\infty} f(x)\right[& si \;\; f \;\; est \;\; \searrow \; I \end{cases}$

- $f(]a, +\infty[) = \begin{cases} \left]\lim\limits_{a^+} f(x), \lim\limits_{+\infty} f(x)\right[& si \; f \; est \;\; \nearrow \; I \\ \left]\lim\limits_{+\infty} f(x), \lim\limits_{a^+} f(x)\right[& si \; f \; est \;\; \searrow \; I \end{cases}$

- $f(\mathbb{R}) = \begin{cases} \left]\lim\limits_{-\infty} f(x), \lim\limits_{+\infty} f(x)\right[& si \;\; f \;\; est \;\; \nearrow \; I \\ \left]\lim\limits_{+\infty} f(x), \lim\limits_{-\infty} f(x)\right[& si \;\; f \;\; est \;\; \searrow \; I \end{cases}$

Outil N° 19 :

Théorème des valeurs intermédiaires : Version générale, version monotone, version particulière :

- $\left| \begin{array}{l} f \; cont \; [a,b] \\ y \in f([a,b]) \end{array} \right. \Longrightarrow \exists \; x \in [a,b] \; ; \; f(x) = y$

- $\left| \begin{array}{l} f \; cont \; [a,b] \\ y \in f([a,b]) \\ f \; strict \; monot \end{array} \right. \Longrightarrow \exists! \; x \in [a,b] \; ; \; f(x) = y$

- $\left| \begin{array}{l} f \; cont \; [a,b] \\ f(a) \times f(b) < 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \exists \; x \in \,]a,b[\; ; \; f(x) = 0$

- $\left| \begin{array}{l} f \; cont \; [a,b] \\ f(a) \cdot f(b) < 0 \\ f \; strict \; monot \end{array} \right. \Longrightarrow \exists! \; x \in \,]a,b[\; ; \; f(x) = 0$

On dira que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution dans l'intervalle $]a,b[$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Outil N° 20 :

Théorème de la fonction réciproque :

- $\left| \begin{array}{l} f \; continue \;\; I \\ f \; strict \; monot \end{array} \right. \Longrightarrow f : \; I \longmapsto f(I) \;\; bjection$

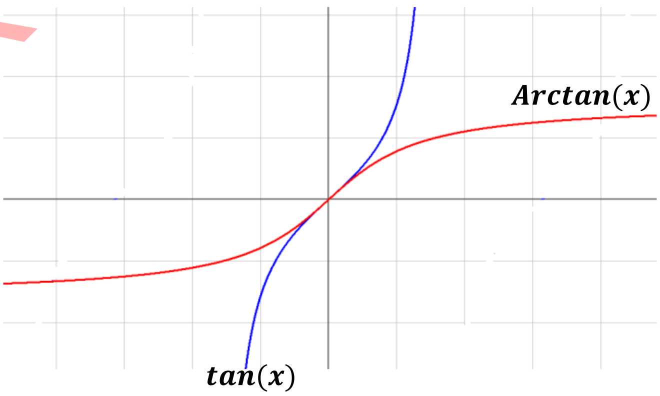
- $f : \; I \longmapsto f(I) \;\; bjection \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} f \;\; et \;\; f^{-1} \; ont \;\; les \\ même \;\; variations \end{array} \right.$

- $f : I \longmapsto f(I) \; bject \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} (\mathcal{C}_f) \;\; et \;\; (\mathcal{C}_{f^{-1}}) \; sont \\ symétriques \;\; par \\ rapport \;\; à \;\; (\Delta): y = x \end{array} \right.$

Outil N° 21 :

La fonction arc tangente :

- $$\begin{array}{rcl} Arctan \;\; : \;\; \mathbb{R} & \longmapsto & \left]\frac{-\pi}{2} \; ; \; \frac{\pi}{2}\right[\\ y & \longmapsto & Arctan(y) \\ \tan(x) & \longmapsto & x \end{array}$$



Voici quelques propriétés fondamentales de la fonction arc tangente :

- $(\forall x \in \mathbb{R}) \; \left(\forall y \in \left]\frac{-\pi}{2} \; ; \; \frac{\pi}{2}\right[\right) \;\; ;$

  $Arctan(x) = y \iff x = tan(y)$

- $(\forall x \in \mathbb{R}) \;\; ; \;\; tan(Arctan \; x) = x$

- $\left(\forall \; x \in \left]\frac{-\pi}{2} \; ; \; \frac{\pi}{2}\right[\right) \;\; ; \;\; Arctan(tan \; x) = x$

- $(\forall x \in \mathbb{R}) \;\; ; \;\; Arctan(-x) = -Arctan(x)$

- $\forall\, x \in (a,b) \in \mathbb{R}^2$:
$$\begin{cases} Arctan(a) = Arctan(b) & \Leftrightarrow \quad a = b \\ Arctan(a) < Arctan(b) & \Leftrightarrow \quad a < b \end{cases}$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} Arctan(x) = \dfrac{-\pi}{2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} Arctan(x) = \dfrac{\pi}{2}$

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{Arctan(x)}{x} = 0^+$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{Arctan(x)}{x} = 1$

- $(\forall x > 0)$; $Arctan(x) + Arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

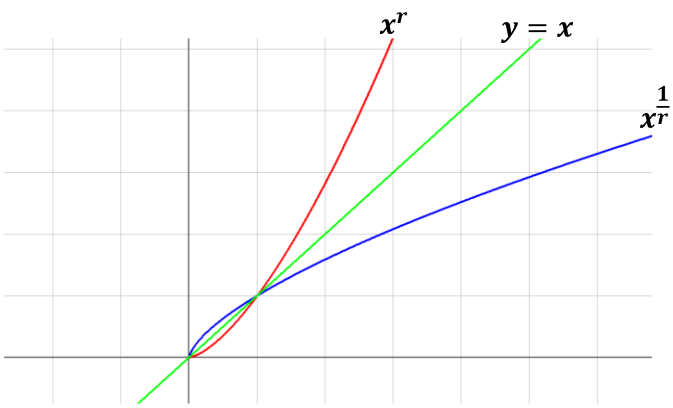
- $(\forall x < 0)$; $Arctan(x) + Arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{-\pi}{2}$

Outil N° 22 :

La fonction Racine $n^{ième}$; $n \in \mathbb{N}^*$

- $$\begin{array}{rccc} \sqrt[n]{\boxed{\cdot}} : & \mathbb{R}^+ & \longmapsto & \mathbb{R}^+ \\ & y & \longmapsto & \sqrt[n]{y} \\ & x^n & \longmapsto & x \end{array}$$

Remarque : si n est impair alors la fonction racine nième est définie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ Mais dans la majorité des cas on se restreint au cas de $\mathbb{R}^+$ pour qu'on puisse travailler dans un domaine positif et avoir la liberté en appliquant les règles de calcul comme $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 = (x^2)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{3}}$



You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Voici quelques propriétés da la fonction racine nième définie sur $\mathbb{R}^+$:

- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ (\forall y \in \mathbb{R}^+)$:
$$\sqrt[n]{x} = y \quad \Leftrightarrow \quad x = y^n$$

- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$: $\sqrt[n]{x^n} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$

- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ (\forall y \in \mathbb{R}^+)$:
$$\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \quad \Leftrightarrow \quad x = y$$

- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ (\forall y \in \mathbb{R}^+)$:
$$\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \quad \Leftrightarrow \quad x < y$$

Outil N° 23 :

Propriétés de la fonction racine nième :
Soient a et b deux nombres réels positifs et p et n deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2, On a :

- $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
- $\sqrt[n]{\dfrac{1}{a}} \times \dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}$; $a \neq 0$
- $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} \times \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; $b \neq 0$
- $\sqrt[np]{a^p} \times \sqrt[n]{a}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$

Outil N° 24 :

Passage aux limites dans des inégalités :

- $\underbrace{f(x)}_{tend\ vers\ l} > \underbrace{g(x)}_{tend\ ver\ l'} \quad \Rightarrow \quad l \geq l$

- $\underbrace{f(x)}_{tend\ vers\ l} < \underbrace{g(x)}_{tend\ ver\ l'} \quad \Rightarrow \quad l \leq l$

- $\underbrace{h(x)}_{tend\ vers\ l'} < \underbrace{f(x)}_{tend\ vers\ l} < \underbrace{g(x)}_{tend\ vers\ l''}$

$$\Longrightarrow \quad l' \leq l \leq l''$$

Outil N° 25 :

Puissances rationnelles d'un nombre strictement positif. Soient $a \in \mathbb{R}^+$ et $r = \frac{p}{q}$

Avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\boxed{a^r = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}}$$

Outil N° 26 :

Propriétés des puissances rationnelles :
Soient $r, r' \in Q$ et $a, b \in \mathbb{R}^+$ On a :

$a^r \times a^{r'} = a^{r+r'}$	$(ab)^r = a^r \times b^r$
$(a^r)^{r'} = a^{rr'}$	$a^{-r} = \frac{1}{a^r}$
$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$	$\frac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'}$

Outil N° 27 :

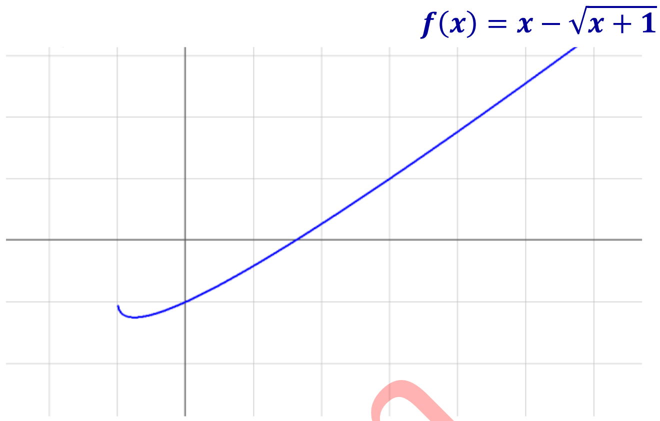
L'utilisation des inégalités pour déterminer des limites (critère de comparaison) :

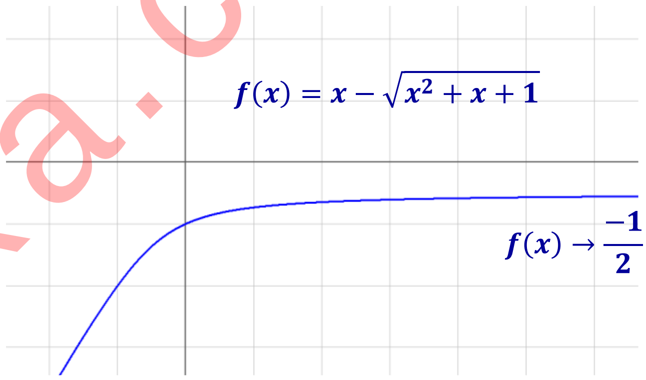
- $\underbrace{h(x)}_{\substack{tend\ vers\ l \\ x \to x_0}} \leq f(x) \leq \underbrace{g(x)}_{\substack{tend\ vers\ l \\ x \to x_0}} \Longrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$

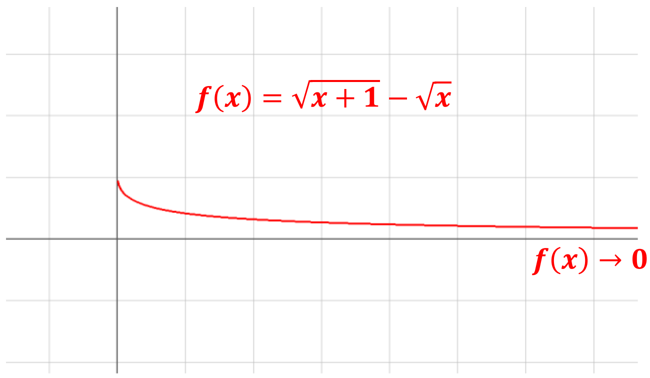
- $f(x) \leq \underbrace{g(x)}_{\substack{tend\ vers -\infty \\ x \to x_0}} \Longrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

- $\underbrace{h(x)}_{\substack{tend\ vers +\infty \\ x \to x_0}} \leq f(x) \Longrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

Annexe : quelques graphes







You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

4 : Série d'exercices

Exercice N° 1 :

Montrer, en utilisant la définition d'une limite d'une fonction numérique que :

1) $\lim_{x\to 0}(x^2+x)=0$

2) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{2x+1}\right)=0$

3) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{3x^2}{x^2+1}\right)=0$

4) $\lim_{x\to 0}(2x+x^2-x^3)=0$

Exercice N° 2 :

Démontrer les limites suivantes en utilisant la définition d'une limite d'une fonction :

1) $\lim_{x\to 1}(3x^2-5x+1)=-1$

2) $\lim_{x\to -1}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)=\frac{1}{2}$

3) $\lim_{x\to 2}\sqrt{4x+1}=3$

4) $\lim_{x\to +\infty}\left(-1+\frac{1}{3\sqrt{x}}\right)=-1$

Exercice N° 3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$$

1) *Montrer que* $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ :\ |f(x)-1|\leq(x-1)^2$

2) *En déduire que* $\lim_{x\to 1}f(x)=1$

Exercice N° 4 :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$g(x)=\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$$

1) *Mq* : $(\forall x\epsilon\mathbb{R}^+)\ ;\ \left|g(x)-\frac{1}{2}\right|\leq\frac{1}{2}|x-1|$

2) *Conclure que* : $\lim_{x\to 1}g(x)=\frac{1}{2}$

Exercice N° 5 :

Soit h la fonction définie ainsi :

$$h(x)=\frac{x-1}{2x+1}$$

1) *Trouver un réel* k *tel que* :

$\forall x\neq\frac{-1}{2}\ ;\ |x+1|\leq\frac{1}{3}\ \Rightarrow\ |h(x)-2|\leq k|x+1|$

2) *Montrer que* : $\lim_{x\to -1}h(x)=2$

Exercice N° 6 :

Soit : $f(x)=x^3-2x^2+2x+1$

1) *Trouver un* $\lambda\in\mathbb{R}$ *tel qu'on ait* :

$\forall x\epsilon\mathbb{R}\ ;\ |x|\leq 1\ \Rightarrow\ |f(x)-1|\leq\lambda|x|$

2) *Montrer que* : $\lim_{x\to 0}f(x)=1$

Exercice N° 7 :

Calculer chacune des limites suivantes :

1) $\lim_{x\to -\infty}\frac{5x^2+x}{(x-2)^2}$	2) $\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{2x}{3-x}\right)$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^{2018}}{x^{2019}+1}\right)$	4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3-\sqrt{x}}{x}\right)$
5) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x}{(1-x)^2}$	6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+\frac{1}{x}}{x^2+2}\right)$

Exercice N° 8 :

Calculer chacune des limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-x)$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2-x+x^3)$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}2x^3+(x^2-1)(1-3x)$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3(1-2x)^5$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^4-x^2+x+1)$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-2x^2)(1+3x)$

Exercice N° 9 :

Calculer chacune des limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin(\pi x)}{x}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1-\cos(2x)}{x^2}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin^2(x)}{3x^2}\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin(5x)}{\tan(3x)}\right)$

5) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin(7x)}{\sin x}\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sin x}\right)$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Exercice N° 10 :

Soit f la fonction définie ainsi :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sin(x-1)}{2(x^2-x)} & ; \quad x>1 \\ f(x)=\dfrac{x-1}{|2x-1|-1} & ; \quad x\leq 1 \end{cases}$$

La fonction f admet-elle une limite en 1 ?

Exercice N° 11 :

On considère la fonction f définie ainsi :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^5-x^4+x^3+3}{x+1} & ; \quad x\neq -1 \\ f(-1)=12 \end{cases}$$

Étudier la continuité de la fonction f en zéro

Exercice N° 12 :

Résoudre les équations suivantes :

1) ■ : $Arctan(3x)=\dfrac{\pi}{8}$

2) ■ : $Arctan(x^2+2)=Arctan(3x)$

3) ■ : $Arctan(x^2-x)=\dfrac{3\pi}{4}$

4) ■ : $Arctan(x)=\dfrac{\pi}{4}+2Arctan\left(\dfrac{1}{4}\right)$

5) ■ : $Arctan(x)+Arctan(2x)=\dfrac{\pi}{3}$

6) ■ : $Arctan(\sqrt{x})=\dfrac{-\pi}{4}$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Exercice N° 13 :

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de définition puis étudier la continuité sur chaque sous intervalle du domaine de définition :

$$f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2x-1}\right) \quad ; \quad g(x) = \sin\left(\cos\frac{\pi}{x}\right)$$

$$h(x) = \frac{x^2 - \sqrt{2-x}}{|x+1|-2} \quad ; \quad k(x) = \frac{1-\cos(2\pi x)}{x(x-1)}$$

$$\begin{cases} u(x) = \dfrac{1-\cos\sqrt{|x|}}{|x|} & ; \quad x \neq 0 \\ u(0) = \dfrac{1}{2} & \end{cases}$$

$$v(x) = \frac{x}{\tan(\pi x)}$$

Exercice N° 14 :

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to -2}(x^2 - 7x - 1) \quad ; \quad \lim_{x\to -1}(x^{2018} - x^{2017} + 2)$$

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{2x^3 - 3x - 9}{x-1}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to \frac{3}{2}}\left(\frac{x^2+x}{2x-1}\right)$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \sin x \quad ; \quad \lim_{x\to \frac{-\pi}{4}} \tan x$$

Exercice N° 15 :

Calculer chacune des limites suivantes :

$$\lim_{x\to 3}\frac{-x^2+x+6}{x^2-4x+3} \quad ; \quad \lim_{x\to 2}\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^5-32}$$

$$\lim_{x\to -1}\left(\frac{2-\sqrt{1-3x}}{x^2-1}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to 3^+}\left(\frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\sqrt{x^2-x}}{x}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{x-1}\right)$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Exercice N° 16 :

Soit f la fonction définie ainsi :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{2x^2-x+1}{x-2} & ; \quad x \geq 1 \\ f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2-1} & ; \quad x < 1 \end{cases}$$

Calculer les limites ainsi proposées :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$	$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$	$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$	$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

Exercice N° 17 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} f(x) = 2x - 3 & ; \quad x < 2 \\ f(x) = x^2 - 3 & ; \quad x \geq 2 \end{cases}$$

1) Justifier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
2) Déterminer : $f([-2,4])$ et $f(]-\infty,1])$

Exercice N° 18 :

Étudier la continuité en zéro des fonctions suivantes :

$$\begin{cases} f(x) = \left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{1+x^2}}{x+1}\right) & ; \quad x \geq 0 \\ f(x) = \left(\dfrac{\cos x - \sqrt{1+\sin x}}{x}\right) & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(x) = \left(\dfrac{\sin x - \tan x}{\sqrt{x}}\right) & ; \quad x > 0 \\ g(x) = \left(x \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) & ; \quad x < 0 \\ g(0) = 0 & \end{cases}$$

Exercice N° 19 :

On considère la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = \left(\dfrac{ax^2 - ax}{x^2 - 5x + 4}\right) & ; \quad x > 1 \\ g(x) = \left(\dfrac{x^3 - 1}{\sqrt[3]{x} + x - 2}\right) & ; \quad x < 1 \end{cases}$$

Déterminer la valeur de a pour que la fonction g soit prolongeable par continuité en 1.

Exercice N° 20 :

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \left(\dfrac{\sqrt{3 + \cos x} - 2}{x^2}\right) & ; \quad x \neq 0 \\ f(0) = \dfrac{-1}{8} \end{cases}$$

Étudier la continuité de f en zéro.

Exercice N° 21 :

Déterminer le réel a pour que la fonction proposée soit continue en zéro.

$$\begin{cases} f(x) = \left(\dfrac{cos^3(x) - 1}{sin^2(x)}\right) & ; \quad x \neq 0 \\ f(0) = a \end{cases}$$

Exercice N° 22 :

Déterminer le réel a pour que la fonction f définie ci-dessous, soit continue en $\pi/2$:

$$\begin{cases} f(x) = \left(\dfrac{\sqrt{\sin x} - 1}{x - \frac{\pi}{2}}\right) & ; \quad x \neq \dfrac{\pi}{2} \\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = a \end{cases}$$

Exercice N° 23 :

Soit a un réel strictement positif, on considère la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = \left(\dfrac{x^2 + \sqrt{x + a} - \sqrt{a}}{x}\right) & ; \quad \begin{vmatrix} x \neq 0 \\ x \geq -a \end{vmatrix} \\ g(0) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}} \end{cases}$$

Montrer que g est continue en 0 puis préciser la limite de la fonction g quand x tend vers plus l'infini.

Exercice N° 24 :

Soit g la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} g(x) = \left(\dfrac{x + \tan(2x)}{\sin(3x)}\right) & ; \quad x \neq 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

Étudier la continuité de la fonction g au point zéro.

Exercice N° 25 :

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = (3 - x^2) & ; \quad x \leq 0 \\ f(x) = \left(\dfrac{x^2 - 3}{2x - 1}\right) & ; \quad x > 0 \end{cases}$$

Étudier la continuité de la fonction f au point d'abscisse zéro.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Exercice N° 26 :

Soit g la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} g(x) = \left(\dfrac{x^2-1}{|x-1|}\right) & ; \quad x \neq 1 \\ g(1) = 2 \end{cases}$$

Étudier la continuité de la fonction g au point d'abscisse 1.

Exercice N° 27 :

Dans chacun des cas suivants, étudier la continuité de la fonction f au point a.

- $f(x) = \dfrac{|x^2-5|-4}{\sqrt{x}-1}$; $a = 1$
- $f(x) = \dfrac{|x^2-5|-4}{\sqrt{x}-1}$; $a = \sqrt{5}$
- $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^3-8}{\sqrt{x^2+5}-3} & ; \quad x \neq 2 \\ f(2) = 18 \end{cases}$; $a = 2$

Exercice N° 28 :

Dans chacun des cas suivants, étudier la continuité de la fonction g au points d'abscisse a.

$$\begin{cases} g(x) = (x^2-9)\sin\left(\dfrac{1}{x-3}\right) & ; \quad x \neq 3 \\ g(3) = 0 \end{cases} \quad ; \quad a = 3$$

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{(1-\tan x)^2}{1+\cos(4x)} & ; \quad x \neq \dfrac{\pi}{4} \\ g\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad ; \quad a = \dfrac{\pi}{4}$$

Exercice N° 29 :

Étudier la limite de la fonction f au point a dans les cas suivants :

1) $f(x) = \dfrac{|x-1| \cdot x}{x^2-1}$; $a = 1$

2) $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{|x^2-1|}$; $a = -1$

3) $\begin{cases} f(x) = \sin x & ; \quad x \geq \pi \\ f(x) = \cos x & ; \quad x < \pi \end{cases}$; $a = \pi$

4) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2-2x}{x+2} & ; \quad x \geq 0 \\ f(x) = E(x) & ; \quad x < 0 \end{cases}$; $a = 0$

Exercice N° 30 :

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\right)$

2) $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2+1}\right)$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x} + 2 + \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$

4) $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(\dfrac{\sqrt{1-x+x^2}}{x^3}\right)$

5) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1+x^2}{\sqrt{x}}\right)$

6) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{2}{x} - 1 + cos\left(\dfrac{2}{x}\right)\right)$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Exercice N° 31 :

Calculer chacune des limites suivante :

1) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3}{(x+1)^2}$

2) $\lim\limits_{x\to -1} \left(\dfrac{tan^2 x+1}{(x+1)^2}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^3-1}{(x-1)^3}$

4) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{x-2} - \left|\sin\left(\dfrac{2}{(x-2)^2}\right)\right|$

5) $\lim\limits_{x\to 1^-} \left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\dfrac{1}{(x-1)^{2009}}\right)$

6) $\lim\limits_{\substack{x\to -4 \\ x<-4}} \dfrac{E(x)}{(x+4)^3}$

Exercice N° 32 :

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(2-\dfrac{1}{x}\right)\left(\dfrac{3}{\sqrt{x}}-1\right)$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\cos x - 1}{x}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}\right)$

4) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2(2+\sin x)$

5) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{5x^2-1}{3x^2+4}\right)$

6) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x}-1+\cos x\right)$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Exercice N° 33 :

Calculer chacune des limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0} (x^2+x^4)\cdot\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{E(x)}{x}$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+1}{\sqrt{1+x^2}}$

4) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{|\sin x|}{\sqrt{1+x^2}}$

Exercice N° 34 :

Calculer chacune des limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{\cos x}{x^2+1}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x+\sin x}{x^2+\cos x}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{2x+\cos x}{3x+\sin x}\right)$

4) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{E(\sqrt{x})}{x}\right)$

5) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{\sin x}{x^2+1}\right)$

6) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{2-\cos x}{1+\sqrt{x}}\right)$

Exercice N° 35 :

Calculer chacune des limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0} \left(x^2+x+\dfrac{1}{x^2}\right)$

2) $\lim_{x\to1^+}\left(\frac{x^3+1}{(x-1)^3}\right)$

3) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+1}{(x-1)^3}\right)$

4) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}+x^2\right)$

5) $\lim_{x\to-\infty}\left(x^3-x^2+x+1\right)$

6) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{x^2+2}\right)$

Exercice N° 36 :

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to+\infty}\left(-3x^2+x+1\right)$

2) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x+5}{x^2+1}\right)$

3) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-4x}{2x^2+1}\right)$

4) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-7}{x^3+2x+1}\right)$

5) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3+x^2+x+1}{x^3+3}\right)$

6) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^4+x^2+1}{x-1}\right)$

Exercice N° 37 :

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to-\infty}\left(3x^2-x+4\right)$

2) $\lim_{x\to0^-}\sqrt{3-\frac{1}{x}}$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

3) $\lim_{x\to1}\left(\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x}-1}\right)$

4) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}}$

5) $\lim_{x\to1}\left(\frac{x^3+2x-3}{x^2+2x-3}\right)$

6) $\lim_{x\to9}\left(\frac{\sqrt{x+7}-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+16}-\sqrt{x}-2}\right)$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Exercice N° 38 :

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\left(\frac{x+1}{|2x+3|-1}\right)$

2) $\lim_{x\to2}\left(\frac{x^2-2x}{x-\sqrt{x+2}}\right)$

3) $\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\left(\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{1+2x}}{\sqrt{1-x}}\right)$

4) $\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\left(\frac{\sqrt{x^2+x}+3x+3}{x+1}\right)$

5) $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\frac{x+\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2+x+1}-1}\right)$

6) $\lim_{x\to3}\left(\frac{\sqrt{x+1}-x^2+x+4}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x+1}}\right)$

Exercice N° 39 :

Calculer chacune des limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2x-\sqrt{x}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{4x^2+3x-7}+2x+5\right)$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2-x-2}\right)$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{5x^2+x-1}-4x+3\right)$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

6) $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1}-x-3\right)$

Exercice N° 40 :

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^3+3x^2+4}-x^2+2\right)$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{3x^2-6x-1}+2x-5\right)$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1}+xm\right)$; $m\epsilon\mathbb{R}$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{1-x^3}+x-1\right)$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x+\sqrt{ax^2+bx+c}\right)$

Exercice N° 41 :

Calculer chacune des limites :

1) $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{\sin(2x)}{\sin(3x)}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \left(\dfrac{\sqrt{x}\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{6}}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{\sin(3x)}{\tan x}\right)$

4) $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{\sin(5x)}{\sin(4x)}\right)$

5) $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{\cos(\pi x)-1}{x}\right)$

6) $\lim\limits_{x\to1} \left(\dfrac{\tan(x-1)}{x^2-1}\right)$

Exercice N° 42 :

Calculer chacune des limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{1-\cos(6x)}{\sin(4x)\cdot\tan(3x)}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to1} \left(\dfrac{\tan(\pi x)}{x-1}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{sin^3(2x)}{x^3}\right)$

4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(\dfrac{\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}\right)$

5) $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{\sin(2x)}{x^3}\right)$

6) $\lim\limits_{x\to0^+} \left(\dfrac{\cos\sqrt{x}-1}{x}\right)$

Exercice N° 43 :

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \left(\dfrac{\sin x-\sqrt{3}\cos x}{x-\frac{\pi}{3}}\right)$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\cos x}{x^3}\right)$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\sin x}{x^2(2+\cos x)}\right)$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{x}{2+\sqrt{x^4+1}}\right)$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2\,E(x)+\left(x-E(x)\right)^2}{x^2}\right)$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Exercice N° 44 :

Calculer chacune des limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{2x}-2}{x^2+3x-10}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x^3+3x^2-4x-1}{x^3-1}\right)$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$

6) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}\right)$

Exercice N° 45 :

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-3x\right)$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{4x^2+x^3}}{|2x+x^3|}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}-\frac{x}{\sqrt{x-1}}\right)$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x+\sqrt{|x|}}{x-\sqrt{|x|}}\right)$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{\frac{x}{x-1}}-x-1\right)$

Exercice N° 46 :

Calculer les limites ainsi proposées :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\tan x}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x(1-\cos x)}{\sin(3x)-3\sin x}\right)$

4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}\right)$

Exercice N° 47 :

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to-2}\left(\frac{-1}{3}x^2-5x+7\right)$

2) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{(3-x)^2}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^3+x\right)$

4) $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\,x^3-3x^2-x\right)$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$

6) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

Exercice N° 48 :

Calculer chacune des limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^5+x^4+2}{x^2-1}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x-1}{x^2+x+5}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{(x+1)^2\cdot(2x-7)^2}{4x^3+x+5}$

4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1-3x}{4x+7}\right)$

5) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{-4x^3+5x+9}{7x^3-6}\right)$

6) $\lim\limits_{|x|\to +\infty}\dfrac{\sqrt{5}\,x^2\,(2-x^2)^3}{(x^4-1)^2}$

Exercice N° 49 :

Calculer chacune des limites suivantes :

1) $\lim\limits_{|x|\to +\infty}\left(\dfrac{3x-x^4+x(1-5x^2)}{(x^2+1)(2-3x^3)}\right)$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

2) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x-3}{x^2-2x-3}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2+x-2}{2x^2+x-3}\right)$

4) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{4x^3-5x-22}{x^2-x-2}\right)$

5) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2x^3-7x^2+4x+4}{x^3-x^2-8x+12}\right)$

6) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x^4+3x^3-7x^2-27x-18}{x^4-3x^3-7x^2+27x-18}\right)$

Exercice N° 50 :

Calculer chacune des limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to -\sqrt{3}}\left(\dfrac{x+\sqrt{3}}{3-x^2}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^3-8}{x^2-4}\right)$

4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{2x+9}$

5) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x-\sqrt{x}\right)$

6) $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{3-x}$

Exercice N° 51 :

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x-\sqrt{4x^2+1}\right)$

3) $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{4x^2+3x-1}}{x+5}\right)$

4) $\lim_{x\to0}\left(\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}\right)$

5) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

6) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$

Exercice N° 52 :

Soit g la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases}(x+\alpha)(x+2) & ; \quad x\le 1\\ (x+\alpha)(x+\beta) & ; \quad x>1\end{cases}$$

Trouver α *et* β pour que $\lim_{x\to1} g(x)=4$

Exercice N° 53 :

Soit $f(x)=\dfrac{2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$

1) *Montrer que* : $(\forall x\epsilon\mathbb{R}^*)$; $f(x)\ge\dfrac{1}{x^2}$

2) *Calculer* $\lim_{x\to0} f(x)$

Exercice N° 54 :

Soit $g(x)=\dfrac{\cos x}{x}$

1) *Montrer que* : $(\forall x\epsilon\mathbb{R}_+^*)$; $|g(x)|\le\dfrac{1}{x}$

2) *Déterminer la limite* $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

Exercice N° 55 :

Soit $h(x)=x^2\sin\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$

1) *Montrer que* : $(\forall x\epsilon\mathbb{R}^*)$; $|h(x)|\le x^2$

2) *Déterminer la limite* $\lim_{x\to0} h(x)$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Exercice N° 56 :

Soit $K(x)=x^2-3\sin x$

1) *Montrer que* : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})$; $K(x)\ge x^2-3$

2) *Déduire* $\lim_{x\to+\infty} K(x)$ *et* $\lim_{x\to-\infty} K(x)$

Exercice N° 57 :

Soit $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} & ; \quad x>0\\ \dfrac{\cos x-|x+1|}{x} & ; \quad x<0\end{cases}$

1) *Mq* : $\forall x\le-1$; $|f(x)-1|\le\dfrac{-2}{x}$

2) *En déduire la limite* $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

3) *Calculer la limite* $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

Exercice N° 58 :

Soit $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-1}{x}$

1) *Calculer la limite* $\lim_{x\to0} f(x)$

2) *Montrer que* : $\forall x\epsilon\mathbb{R}^*$; $|f(x)|\le\dfrac{1}{|x|}$

3) *Déduire* : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

Exercice N° 59 :

Soit $f(x)=E(x)+\sin x$

1) *Mq* : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})$: $x-2<f(x)\le x+1$

2) *En déduire les limites suivantes* :

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$; $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

3) *Etudier la limite de f en zéro*

Exercice N° 60 :

soit $f(x)=x^2\cdot E\left(\dfrac{1}{x}\right)$

1) *Montrer que* : $\forall x\epsilon\mathbb{R}^*$; $|f(x)-x|<x^2$

2) *En déduire la limite* $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

3) *Calculer* : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

Exercice N° 61 :

Calculer chacune des limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x\sqrt{x}-1}{x^2-1}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to -4}\left(\dfrac{x^3+64}{3x^2+14x+8}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{\sqrt{1-3x}-2}{x^2+4x+3}\right)$

4) $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\left(\dfrac{2x^2-2}{\sqrt{x+1}}\right)$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{x^4+1}-1}{x}\right)$

6) $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x-1}\right)$

Exercice N° 62 :

Calculer chacune des limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x^2-1}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{\sqrt{2x+3}-x}{x^2-3x}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x}-1}\right)$

4) $\lim\limits_{x\to 9}\left(\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x+7}-4}\right)$

5) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{2x^2-5}}\right)$

6) $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{\sqrt{x^2-x}-x}{\sqrt{x^2+x+1}-1}\right)$

Exercice N° 63 :

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-1}-1}{x-1}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sqrt{x}-3x+2}{x-1}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{\sqrt{x+1}-x^2+x+4}{x-3}\right)$

4) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2x+5}-3}\right)$

5) $\lim\limits_{x\to \frac{-1}{2}}\left(\dfrac{\sqrt{4x+6}+x^2-3x-3}{2x+1}\right)$

6) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}-3}{x-2}\right)$

Exercice N° 64 :

Calculer chacune des limites suivantes :

1) $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}}\left(\dfrac{\sqrt{\cos x-1+\sin x}}{\cos x-\cos(3x)}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{\cos x-\sin x}{1-\sqrt{2}\cos x}\right)$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

3) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\cos(3x)}{sin^2(5x)}\right)$

4) $\lim_{x\to\pm\infty}\left(x^2+2x\sin x\right)$

5) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1+\cos(2x)}{1-\sin x}\right)$

6) $\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$

Exercice N° 65 :

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{\cos x}-\cos x}{\sin(2x)\cdot\tan(3x)}\right)$

2) $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\left(\dfrac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{6x-\pi}\right)$

3) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{\tan x-1}{2\sin x-\sqrt{2}}\right)$

4) $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}\right)$

5) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\sqrt{\dfrac{\sin x}{1+\cos x}}-1}{x-\dfrac{\pi}{2}}\right)$

Exercice N° 66 :

Soit a et b deux réels tels que $0<a<b$

1) *Calculer* : $\lim_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{\cos(ax)-\cos(bx)}}{x}$

2) *Détermnier α et β pour qu'on ait* :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+1}-\alpha x-\beta\right)=0$$

Exercice N° 67 :

$$Soit\quad\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sin(2x)}{x}-2 & ;\quad x>0\\ f(x)=\dfrac{x(x+1)}{x^2-4} & ;\quad x\leq 0,\ x\neq -2\end{cases}$$

1) *Calculer la limite* $\lim_{x\to 0}f(x)$

2) *Calculer la limite* $\lim_{x\to-\infty}f(x)$

3) *Mq* : $\forall x>0\ ;\ \dfrac{-1}{x}-2\leq f(x)\leq\dfrac{1}{x}-2$

4) *Calculer la limite* $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

5) *Calculer* : $\lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}}f(x)$ *et* $\lim_{\substack{x\to-2\\x<-2}}f(x)$

Exercice N° 68 :

Calculer chacune des limites suivantes :

1) $\lim_{x\to-\infty}x\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

2) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}+4x^2-x+5\right)$

3) $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+2\sqrt{x}}{x-3}\right)$

4) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{x+5}{2x-4}}$

5) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-3x+5}$

6) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x+1}}$

Exercice N° 69 :

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}\right)$; 2) $\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x^2-2x}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x}+2x-5\right)$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x+2}}{x^2}\right)$; 5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{x^3+1}{2x+3}}$

6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+7+\sqrt{4-2x}\right)$

Exercice N° 70 :

Calculer chacune des limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\dfrac{x^4}{x^2-x}}+2x\right)$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+5x}}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{-2}{|\sqrt{x}-1|}\right)$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\sqrt{x^4-x^3}}-x\right)$

5) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\right)$

6) $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right)$

Exercice N° 71 :

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x^2+x+4}-2x+1\right)$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+4x}-3x+8\right)$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+5x}}\right)$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2-7x}{3x+5}\right)\sqrt{1-2x}$

5) $\lim\limits_{x\to4}\left(\dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+12}-\sqrt{x}-2}\right)$

Exercice N° 72 :

Calculer chacune des limites :

1) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\left|\dfrac{x^2-6x}{3x-1}\right|$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{-3}{2}\\ x>\frac{-3}{2}}}\left(\dfrac{3\,|x-5|+2}{4x^2-9}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x+5}{|x^2+4x|}$

4) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|}\right)$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-3}{|-5x+7|}$

6) $\lim\limits_{x\to4}\left(\dfrac{|x^2-2x|-8}{x^2-5x+4}\right)$

Exercice N° 73 :

Calculer chacune des limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to4^-}\left(\dfrac{x}{x-4}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to3^-}\left(\dfrac{2x^2-x+1}{(3-x)(-1-x)}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(x\sqrt{x}+2\right)$

4) $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{2-3x}{2-x}\right)$

5) $\lim\limits_{x\to 3^+}\left(\dfrac{-7}{\sqrt{x-3}}\right)$

6) $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{x^3-8}{x^2-4x+4}\right)$

Exercice N° 74 :

Calculer chacune des limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x-1)^2}{(x^2-1)^5}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{x^3-1}{x^2-x}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to 3^+}\left(\dfrac{\sqrt{x^2-9}+\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x-3}}\right)$

4) $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}}\left(\dfrac{4x^2-x+5}{x^2-4}\right)$

5) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x^3-1}\right)$

6) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{2-\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x}-\sqrt{2x^2}}\right)$

Exercice N° 75 :

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin(2x)-2\sin x}{x^3}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{\sin x}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\cos(4x)}{\tan(2x)\cdot\sin x}\right)$

4) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2\left(1-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2-\sqrt{x+4}}{\tan(5x)}\right)$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin(x)-\tan(x)}{x^3}\right)$

Exercice N° 76 :

Calculer chacune des limites :

1) $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+}\left(\dfrac{1+\sin x}{\cos x}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to\left(\frac{-\pi}{2}\right)^+}\tan x$; 4) $\lim\limits_{x\to\left(\frac{-\pi}{2}\right)^-}\tan x$

3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\cos x}{2x-\pi}\right)$; 5) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sin(\pi x)}{x-1}\right)$

Exercice N° 77 :

Pour chacun des cas suivants, montrer que la fonction f admet un prolongement par continuité au point x_0 puis donner ce prolongement :

1) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$; $x_0=1$

2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-1}{x}$; $x_0=0$

3) $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2+3x+6}{x+1}$; $x_0=-1$

4) $f(x)=\dfrac{x\cdot\sin x}{\cos x-1}$; $x_0=0$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Exercice N° 78 :

Pour chacun des cas suivants, montrer que la fonction f admet un prolongement par continuité au point x_0 puis donner ce prolongement :

1) $f(x) = \dfrac{|x^2 + 4x| - 3}{x + 3}$; $x_0 = -3$

2) $f(x) = \dfrac{x^3 - a^3}{x - a}$; $x_0 = a \in \mathbb{R}$

3) $f(x) = \dfrac{(x - 2)^2}{4x - x^3}$; $x_0 = 2$

4) $f(x) = (x - 1) \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x - 1}\right)$; $x_0 = 1$

Exercice N° 79 :

Dans chacun des cas suivants étudier la continuité de la fonction f sur D_f :

1) $f(x) = \sin\left(\dfrac{2x + 1}{x^2 - 1}\right)$

2) $f(x) = \cos\left(\sqrt{x^2 + 1}\right)$

3) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x - 3}{x + 2}}$

4) $f(x) = \sqrt{1 - \sin x}$

Exercice N° 80 :

Dans chacun des cas suivants étudier la continuité de la fonction f sur D_f .

1) $f(x) = \cos(2x^2 - 3x + 4)$

2) $f(x) = \tan\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$

3) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{1 + sin^2(x)}}$

4) $f(x) = \cos\left(tan^2(x)\right)$

Exercice N° 81 :

Calculer chacune des limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - 2\sqrt{x} + \dfrac{1}{x}\right)^3$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \tan\left(\dfrac{\pi \sin x}{3x}\right)$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} \cos\left(\dfrac{\pi x + 1}{x + 2}\right)$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos\left(\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos\left(\pi\sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 1}}\right)$

6) $\lim\limits_{x \to 0} \sin\left(\pi\left(\dfrac{1 - \cos x}{x^2}\right)\right)$

Exercice N° 82 :

Pour chacun des cas suivants, montrer que la fonction f est continue sur l'intervalle I. puis déterminer $f(I)$.

1) $f(x) = x^2 + 2$; $I = [-1,3]$

2) $f(x) = \dfrac{x - 4}{x - 2}$; $I = [5,8]$

3) $f(x) = 2x\sqrt{x + 1}$; $I = [3,5]$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

4) $f(x) = \tan x$; $I = \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

5) $\begin{cases} f(x) = x+3 \ ; \ x \leq 2 \\ f(x) = x^2+1 \ ; \ x > 2 \end{cases}$; $I = [-3,5]$

Exercice N° 83 :

Montrer que chacune des équations suivantes admet au moins une solution dans I :

1) $x^4 + x^2 + 4x - 1 = 0$; $I = [0,1]$

2) $2\cos x - x = 0$; $I = [0, \pi]$

3) $\tan x + x^2 = 2$; $I = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Exercice N° 84 :

Dans chacun des cas suivants, montrer que la fonction f réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer puis déterminer une expression de $f^{-1}(x) \ \ pour \ \ x \in J$:

1) $f(x) = x^2 - 2x + 5$; $I = [1, +\infty[$

2) $f(x) = 4x - x^2$; $I =]-\infty, 2[$

3) $f(x) = \sqrt{x^2 - x} - x$; $I =]-\infty, 0]$

4) $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$; $I = [0, \sqrt{2}]$

Exercice N° 85 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations ainsi proposées :

1) $(E) : \ Arctan(x) + Arctan(3x) = \frac{\pi}{3}$

2) $(E) : \ Arctan(2x) + Arctan(x-1) \leq 0$

3) $Arctan(x) = Arctan\left(\frac{1}{2}\right) + Arctan\left(\frac{1}{3}\right)$

4) $(E) : \ Arctan\, x + Arctan(2x) > \frac{\pi}{3}$

Exercice N° 86 :

Calculer chacune des limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to 0^+} (x+1)\, Arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

2) $\lim\limits_{x \to 0^-} (x+1)\, Arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} x\left(\frac{\pi}{2} + Arctan(x)\right)$

4) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{Arctan(x-2)}{x^2-4}\right)$

Exercice N° 87 :

1) Étudier la continuité des fonctions :

$f(x) = \sqrt[3]{Arctan(x)}$ $\quad et \quad$ $g(x) = \sqrt[4]{\frac{x}{x-1}}$

2) calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x-1}\right)$; $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{\sqrt[4]{x+1} - 1}\right)$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x} - x\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x^2+1}\right)$$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}=\sqrt[3]{4x}$$

Exercice N° 88 :

Simplifier les nombres suivants :

$$A=\frac{\sqrt[4]{32}\times\sqrt[6]{27}\times\sqrt[4]{108}}{\sqrt[4]{6}}$$

$$B=\frac{(125)^{\frac{2}{9}}\times(625)^{\frac{1}{4}}\times(25)^{\frac{5}{2}}}{(5)^{\frac{17}{3}}}$$

$$C=\frac{\left(7^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{1}{2}}\times\left(3^{\frac{-2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\times(21)^{\frac{3}{4}}}{\left(7^{\frac{-3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\times(243)^{\frac{2}{3}}\times(63^{-2})^{\frac{-1}{6}}}$$

Exercice N° 89 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

1) $(E):\ \sqrt[3]{3+x}-\sqrt[3]{3-x}=\sqrt[6]{4x^2}$

2) $(E):\ 2x\sqrt{x}-3x\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{x}}=20$

3) $(E):\ \sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x}=1$

4) $(E):\ Arctan(x)+Arctan(2x)=\frac{\pi}{4}$

Exercice N° 90 :

Calculer chacune des limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[4]{x}-1}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x\right)$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x}-\sqrt[6]{x+1}}\right)$

4) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}\left(Arctan\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{\pi}{2}\right)$

Exercice N° 91 :

Soit f une fonction numérique vérifiant :

$\forall x\epsilon\mathbb{R}\ ;\ 1+x-x^2\leq f(x)\leq1+x-x^2+x^4$

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+x^2\right)$

2) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{f(x)-1}{x}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{f(x)-1-x}{x^2}\right)$

Exercice N° 92 :

On considère la fonction numérique g définie par :

$$\begin{cases} g(x)=(2x+\pi)\tan x & ;\quad x\,\epsilon\,\left]-\pi,\frac{-\pi}{2}\right[\\ g(x)=\dfrac{1-cos^3x}{x\cdot\tan x\cdot cos^2x} & ;\quad x\,\epsilon\,\left]\frac{-\pi}{2},0\right[\\ g(x)=\dfrac{3\sqrt{1+x^4}-x}{2+x} & ;\quad x\,\epsilon\,[0,+\infty[\end{cases}$$

1) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)\quad;\quad\lim_{\left(\frac{-\pi}{2}\right)^+}g(x)\quad;\quad\lim_{\left(\frac{-\pi}{2}\right)^-}g(x)$$

2) Établir la continuité de g en zéro.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Exercice N° 93 :

Déterminer les deux réels a et b pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 + x - a}{x - 2} & ; \quad x > 2 \\ f(x) = \dfrac{2x + b}{3} & ; \quad x \leq 2 \end{cases}$$

Soit continue au point $x_0 = 2$.

Exercice N° 94 :

Déterminer les réels a et b et c pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{3x^2 - 2bx + 1}{2x^2 + ax - a - 2} & ; \quad x < 1 \\ f(x) = \dfrac{-2x^2 + 3x + 3}{x^2 + 1} & ; \quad x > 1 \\ f(1) = \dfrac{2 + c}{3} \end{cases}$$

Soit continue au point $x_0 = 1$.

Exercice N° 95 :

Déterminer les deux réels a et b pour que la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \begin{cases} f_n(x) = \dfrac{(3 - x)^n - a}{x - 2} & ; \quad x < 2 \\ f_n(x) = \dfrac{3x + b}{4} & ; \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Soit continue au point $x_0 = 2$

Exercice N° 96

$$Soit\ \forall x \in \mathbb{R} : \begin{cases} f(x) = \dfrac{ax^2 + bx - 1}{x^2 - 2} & ; \ x \geq 2 \\ f(x) = 3x + c & ; \quad x < 2 \end{cases}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Déterminer les réels a, b, c pour que les conditions soient vérifiées dans chacun des cas suivants :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} f(x)$
2) f $continue\ en$ $x_0 = 2.$

Exercice N° 97 :

Pour chacun des cas suivants, montrer que la fonction f admet un prolongement par continuité en x_0 puis donner ce prolongement :

1) $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x} - 1}{\sqrt{3x + 1} - \sqrt{x + 3}}$; $x_0 = 1$

2) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + 6} + \sqrt{2x + 5} - 3}{4 - x^2}$; $x_0 = -2$

3) $f(x) = \dfrac{\tan x - \sin x}{x + \sin x}$; $x_0 = 0$

4) $f(x) = \dfrac{\cos x - \sqrt{1 + \sin x}}{x}$; $x_0 = 0$

Exercice N° 98 :

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{(x - 1)^2}{\sqrt{x^2 - 1}} & ; \quad |x| > 1 \\ f(x) = x^2 - 3x + 2 & ; \quad |x| < 1 \end{cases}$$

1) *Calculer* : $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

2) f admet-elle un prolongement par Continuité en 1 ?
3) f admet-elle un prolongement par Continuité en -1 ?

Exercice N° 99 :

Soit f la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par :

$$f(x)=\frac{(1-\tan x)^2}{\cos(2x)}$$

Est-ce que la fonction f admet un prolongement par continuité en $\frac{\pi}{4}$.

Exercice N° 100 :

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{3x^2+6} & ; \quad x\geq 1 \\ f(x)=\dfrac{1}{x^2-x}\cdot\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) & ; \quad x<1 \end{cases}$$

1) Étudier la continuité de la fonction f au point d'abscisse 1.

2) f admet-elle un prolongement par continuité en zéro ?

Exercice N° 101 :

Montrer que chacune des équations suivantes admet au moins une solution dans l'intervalle I.

1) $x^3-3x^2+15x-7=0 \quad ; \quad I=]0,1[$

2) $1+\sin x-x^2=0 \quad ; \quad I=\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

3) $x^{17}=x^{11}+1 \quad ; \quad I=]1,2[$

4) $\sqrt{x^3+5x+4}=100 \quad ; \quad I=]21,22[$

5) $\cos x=\dfrac{2}{(x+1)^2} \quad ; \quad I=]0,1[$

6) $x^2\cos x+x\sin x+1=0 \quad ; \quad I=]0,\pi[$

Exercice N° 102 :

Résoudre chacune des équations :

1) $(E) \quad : \quad \sqrt[4]{\dfrac{2-x}{3+x}}+\sqrt[4]{\dfrac{3+x}{2-x}}=2$

2) $(E) \quad : \quad \dfrac{\sqrt[3]{x+3}}{3}+\sqrt[3]{\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{2}$

3) $(E) \quad : \quad 2\cdot\sqrt[3]{x^4}-\dfrac{3x}{\sqrt[3]{x}}=20$

4) $(E) \quad : \quad \sqrt[3]{x^3-3x^2+x+1}=x-1$

Exercice N° 103 :

Calculer chacune des limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}\right)$

2) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}-x}{x}\right)$

3) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}+1}\right)$

4) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-\sqrt[3]{x+6}}{3-\sqrt{2x+5}}\right)$

5) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x}-x\right)$

6) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left(x-\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}\right)$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Exercice N° 104 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

1) $x^8 - 25 = 0$
2) $x^7 = \sqrt{3}$
3) $x^4 = 16$
4) $x^3 + 8 = 0$
5) $\sqrt[3]{x} = \sqrt[6]{7}$
6) $(3x-4)^5 = 32$
7) $\sqrt[3]{x^2} - 5 \cdot \sqrt[3]{x} + 4 = 0$
8) $9x - 7 \cdot \sqrt[3]{x} - 2 = 0$
9) $x^4 - 5x^2 - 24 = 0$

Exercice N° 105 :

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{Arctan(3x)}{x}$

2) $\lim\limits_{|x|\to +\infty} Arctan(x^4 - x)$

3) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x \cdot Arctan(x) - \dfrac{\pi x}{2}\right)$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{Arctan(x^2+4x)}{x}$

5) $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^2+1)\, Arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$

6) $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{Arctan\left(\dfrac{1}{1-x^2}\right) + \dfrac{\pi}{2}}{x-1}\right)$

7) $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{x - 2\sqrt{Arctan(x) - \dfrac{\pi}{4}} - 1}{x-1}\right)$

8) $\lim\limits_{x\to 1^\pm} \left(\dfrac{Arctan\left(\sqrt[3]{x-1}\right)}{x-1}\right)$

Exercice N° 106 :

Simplifier les expressions suivantes :

1) $Arctan\left(\tan\left(\dfrac{41\pi}{17}\right)\right)$

2) $Arctan\left(\tan\left(5\left(Arctan\sqrt{3}\right)\right)\right)$

3) $\tan\left(Arctan(2016)\right)$

4) $\tan\left(-Arctan(5)\right)$

5) $Arctan\left(\tan\left(\dfrac{-79\pi}{3}\right)\right)$

6) $Arctan\left(\dfrac{1}{\tan\left(\dfrac{3\pi}{11}\right)}\right)$

7) $\tan\left(Arctan\left(\dfrac{2}{3}\right) - Arctan\left(\dfrac{3}{7}\right)\right)$

8) $\tan\left(2\,Arctan(3)\right)$

Exercice N° 107 :

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{\sqrt[3]{x+7} - 2}{\sqrt[4]{x} - 1}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1} - 2x\right)$

3) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^2-x} - x - 1\right)$

4) $\lim\limits_{x\to 4} \left(\dfrac{\sqrt[3]{5-x} - 1}{2 - \sqrt[3]{x+4}}\right)$

5) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1} - x\right)$

6) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt[3]{x^4+5} + 2x\right)$

Exercice N° 108 :

1) Résoudre les équations suivantes :

$$(E) : \sqrt[3]{x^2} - 3 \cdot \sqrt[3]{x(x-1)} + 2 \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2} = 0$$

$$(F) : \sqrt[3]{(1+x)^2} - 4 \cdot \sqrt[3]{(1-x)^2} = 4 \cdot \sqrt[3]{1-x^2}$$

2) Calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{3}{2}} \left(\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[4]{x-1} \right)$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt[4]{x^4 + x} - x - 2 \right)$

3) Étudier selon les valeurs du paramètre réel m la valeur de la limite :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} + mx \right)$$

Exercice N° 109 :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x} = 1$$

On pourra poser $t = \sqrt[3]{x}$

2) Soit h une fonction continue sur $[0,2]$ telle que $h(0) = h(2)$. Montrer que l'équation : $h(x+1) = h(x)$ admet au moins une solution dans $[0,1]$

3) Calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right)$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt[4]{x^4 + x^2 + 1} + x - 2 \right)$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Exercice N° 110 :

Calculer chacune des limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1 - \cos x}{tan^2(2x)} \right)$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{4x} \right)$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\cos x - \sqrt{1 + \sin x}}{x} \right)$

4) $\lim\limits_{x \to \frac{2}{\pi}} \left(\dfrac{\pi x - 2}{1 - \sin\left(\frac{1}{x}\right)} \right)$

5) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \left(\dfrac{1 - 2\cos x}{\pi - 3x} \right)$

6) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{2}{sin^2 x} - \dfrac{1}{1 - \cos x} \right)$

7) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{\sqrt{1 + \sin x} - \cos x}{\sqrt{x}(2x - \pi)} \right)$

8) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x + 2} + x + 1 \right)$

9) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{x^2 + x - 6}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} \right)$

10) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\sqrt{3x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + x}}{x} \right)$

11) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sqrt{x + 4} - 2}{x - x^2} \right)$

12) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{\dfrac{x^3}{x + 1}} - x \right)$

5 : Corrigés des Exercices

Solution N° 1 :

1) $Montrons\ que\ \lim_{x\to 0}(x^2+x)=0$

c-à-d on montre que :

$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists\alpha>0)\ (\forall x\epsilon\mathbb{R})\ :$

$$|x|<\alpha \quad\Longrightarrow\quad |f(x)|<\varepsilon$$

$Avec\ \ bien\ \ entendu\quad f(x)=x^2+x$

Autrement-dit : étant donnée un $\varepsilon>0$ existe-t-il un $\alpha>0$ tel que : si $|x|<\alpha$ alors on aurait $|f(x)|<\varepsilon$?

Soit $\varepsilon>0$; si $|x|<\alpha$ Alors $-\alpha<x<\alpha$

$$\Longrightarrow\quad 1-\alpha<x+1<\alpha+1$$
$$\Longrightarrow\quad -1-\alpha<1-\alpha<x+1<\alpha+1$$
$$\Longrightarrow\quad -(1+\alpha)<x+1<(\alpha+1)$$
$$\Longrightarrow\quad |x+1|<\alpha+1$$

Donc si $|x|<\alpha$ Alors $|x+1|<\alpha+1$

Ainsi $|x|\cdot|x+1|<\alpha(\alpha+1)$

$$\Longrightarrow\quad |f(x)|<(\alpha^2+\alpha)$$

On aimerait bien avoir $\alpha^2+\alpha=\varepsilon$

C-à-d $(\alpha^2-\alpha-\varepsilon)=0$

$$\Longrightarrow\quad \alpha=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\varepsilon}}{2}\quad ;\quad \Delta=(1+4\varepsilon)>0$$

$$On\ prend\ alors\ \ \alpha=\frac{-1+\sqrt{1+4\varepsilon}}{2}>0$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Voici une synthèse de notre travail :

$$|x|<\alpha\quad\Longrightarrow\quad |x|<\frac{-1+\sqrt{1+4\varepsilon}}{2}$$
$$\Longrightarrow\quad |x+1|<\frac{1+\sqrt{1+4\varepsilon}}{2}$$
$$\Longrightarrow\quad |x|\cdot|x+1|<\frac{\left(\sqrt{1+4\varepsilon}\right)^2-1^2}{4}$$
$$\Longrightarrow\quad |f(x)|<\varepsilon$$

$D'où\ \ (\forall\varepsilon>0)\ \left(\exists\alpha=\frac{-1+\sqrt{1+4\varepsilon}}{2}\right)$
$(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ :\quad |x|<\alpha\quad\Longrightarrow\quad |f(x)|<\varepsilon$

$D'où\quad \lim_{x\to 0}(x^2+x)=0$

2) $Montrons\ \ que\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{2x+1}\right)=0$

C-à-d on montre que :

$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists\alpha>0)\ \left(\forall x\epsilon\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{-1}{2}\right\}\right)\ :$

$$|x|<\alpha\quad\Longrightarrow\quad |f(x)|<\varepsilon$$

$Avec\ \ bien\ \ entendu\quad f(x)=\frac{x}{2x+1}$

Autrement-dit : étant donnée un $\varepsilon>0$ existe-t-il un $\alpha>0$ tel que : si $|x|<\alpha$ alors on aurait $|f(x)|<\varepsilon$?

Soit $\varepsilon>0$ c-à-d un réel qui ressemble à $0{,}000001>0\quad (infiniment\ \ petit)$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$On\ a\quad \frac{x}{2x+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}\right)$$

On commence par $|f(x)|<\varepsilon$

$$C-\grave{a}-d\qquad -\varepsilon<\frac{1}{2}\left(1-\frac{\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}\right)<\varepsilon$$

$$\Longrightarrow\quad -2\varepsilon<\left(1-\frac{\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}\right)<2\varepsilon$$

$$\Longrightarrow\quad -1-2\varepsilon<\left(\frac{-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}\right)<2\varepsilon-1$$

$$\Longrightarrow\quad -2(-1-2\varepsilon)<\left(\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right)<-2(2\varepsilon-1)$$

$$\Longrightarrow\quad \frac{1}{2(1+2\varepsilon)}<\left(x+\frac{1}{2}\right)<\frac{1}{2(1-2\varepsilon)}$$

$$\Longrightarrow\quad \frac{1}{2(1+2\varepsilon)}-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2(1-2\varepsilon)}-\frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow\quad \frac{1}{2(1+2\varepsilon)}-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}-\frac{1}{2(1+2\varepsilon)}$$

$$Car\quad \frac{1}{2(1-2\varepsilon)}-\frac{1}{2}<\frac{1}{2}-\frac{1}{2(1+2\varepsilon)}$$

$$\Longrightarrow\quad |x|<\frac{1}{2}-\frac{1}{2(1+2\varepsilon)}$$

$$On\ \ prend\ \ ainsi\quad \alpha=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(1+2\varepsilon)}>0$$

Récapitulation : pour $\alpha=\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}$ on ait :

$$|x|<\alpha\quad\Longrightarrow\quad |x|<\frac{1}{2}-\frac{1}{2(1+2\varepsilon)}$$

$$\Longrightarrow\quad \frac{1}{2(1+2\varepsilon)}-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}-\frac{1}{2(1+2\varepsilon)}$$

$$\Longrightarrow\quad \frac{1}{2(1+2\varepsilon)}<\left(x+\frac{1}{2}\right)<1-\frac{1}{2(1+2\varepsilon)}$$

$$\Longrightarrow\quad \frac{2(1+2\varepsilon)}{1+4\varepsilon}<\left(\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right)<2(2\varepsilon+1)$$

$$\Longrightarrow\quad -(1+2\varepsilon)<\left(\frac{-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}\right)<\frac{-1}{2}\left(\frac{2(1+2\varepsilon)}{1+4\varepsilon}\right)$$

$$\Longrightarrow\quad -2\varepsilon<\left(1-\frac{\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}\right)<1-\frac{1+2\varepsilon}{1+4\varepsilon}$$

$$\Longrightarrow\quad -\varepsilon<\frac{1}{2}\left(1-\frac{\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}\right)<\frac{2\varepsilon}{1+4\varepsilon}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow\quad -\varepsilon<\frac{1}{2}\left(1-\frac{\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}\right)<\frac{\varepsilon}{1+4\varepsilon}$$

$$\Longrightarrow\quad -\varepsilon<\frac{1}{2}\left(1-\frac{\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}\right)<\frac{\varepsilon}{1+4\varepsilon}<\varepsilon$$

$$\Longrightarrow\quad -\varepsilon<\frac{1}{2}\left(1-\frac{\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}\right)<\varepsilon$$

$$\Longrightarrow\quad -\varepsilon<f(x)<\varepsilon$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Longrightarrow \quad |f(x)| < \varepsilon$$

$$D'où \quad (\forall \varepsilon > 0) \left(\exists\ \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(1+2\varepsilon)} \right)$$

$$\forall\ x \in \mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{-1}{2} \right\} \ : \ |x| < \alpha \quad \Longrightarrow \quad |f(x)| < \varepsilon$$

$$C-à-d \qquad \lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{2x+1} \right) = 0$$

3) $Montrons \quad que \quad \lim_{x\to 0} \left(\frac{3x^2}{x^2+1} \right) = 0$

C-à-d on montre que :

$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \alpha > 0)\ (\forall x \in \mathbb{R})$:

$$|x| < \alpha \quad \Longrightarrow \quad |f(x)| < \varepsilon$$

$$Avec \quad bien \quad entendu \qquad f(x) = \frac{3x^2}{x^2+1}$$

Autrement-dit : étant donnée un $\varepsilon > 0$ existe-t-il un $\alpha > 0$ tel que : si $|x| < \alpha$ alors on aurait $|f(x)| < \varepsilon$?

Soit $\varepsilon > 0$ c-à-d un réel qui ressemble à $0{,}000001 > 0$ $(infiniment\ petit)$.

$$On \quad a \qquad \frac{3x^2}{x^2+1} = 3\left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)$$

On commence par $|f(x)| < \varepsilon$.

$$\Longrightarrow \quad -\varepsilon < 3\left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{-\varepsilon}{3} < \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{-\varepsilon}{3} - 1 < \left(\frac{-1}{x^2+1}\right) < \frac{\varepsilon}{3} - 1$$

$$\Longrightarrow \quad 1 - \frac{\varepsilon}{3} < \left(\frac{1}{x^2+1}\right) < 1 + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{3-\varepsilon}{3} < \left(\frac{1}{x^2+1}\right) < \frac{3+\varepsilon}{3}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{3}{3+\varepsilon} < x^2 + 1 < \frac{3}{3-\varepsilon}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{3}{3+\varepsilon} - 1 < x^2 < \frac{3}{3-\varepsilon} - 1$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{-\varepsilon}{3+\varepsilon} < x^2 < \frac{\varepsilon}{3-\varepsilon}$$

$$\Longrightarrow \quad 0 < x^2 < \frac{\varepsilon}{3-\varepsilon}$$

$$\Longrightarrow \quad 0 < x < \sqrt{\frac{\varepsilon}{3-\varepsilon}}$$

$$\Longrightarrow \quad -\sqrt{\frac{\varepsilon}{3-\varepsilon}} < x < \sqrt{\frac{\varepsilon}{3-\varepsilon}}$$

$$\Longrightarrow \quad |x| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{3-\varepsilon}}$$

$$On \quad prend \quad alors \quad \alpha = \sqrt{\frac{\varepsilon}{3-\varepsilon}} > 0$$

Récapitulatif :

$$|x| < \alpha \quad \Longrightarrow \quad |x| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{3-\varepsilon}}$$

$$\Longrightarrow \quad |x^2| < \frac{\varepsilon}{3-\varepsilon}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{-\varepsilon}{3-\varepsilon} < x^2 < \frac{\varepsilon}{3-\varepsilon}$$

$$\Longrightarrow \quad 1 - \frac{\varepsilon}{3-\varepsilon} < x^2 + 1 < 1 + \frac{\varepsilon}{3-\varepsilon}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{3-\varepsilon}{3} < \frac{1}{x^2+1} < \frac{3-\varepsilon}{3-2\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon-3}{3-2\varepsilon} < \frac{-1}{x^2+1} < \frac{\varepsilon-3}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{-\varepsilon}{3-2\varepsilon} < 1-\frac{1}{x^2+1} < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{-3\varepsilon}{3-2\varepsilon} < 3\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow -\varepsilon < \frac{-3\varepsilon}{3-2\varepsilon} < 3\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow -\varepsilon < 3\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow -\varepsilon < f(x) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$$

$$D'où \ (\forall\varepsilon>0)\left(\exists\,\alpha=\sqrt{\frac{\varepsilon}{3-\varepsilon}}\right)(\forall x\epsilon\mathbb{R}) \ :$$

$$|x|<\alpha \quad \Rightarrow \quad |f(x)|<\varepsilon$$

$$C-à-d \quad : \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{3x^2}{x^2+1}\right)=0$$

4) $Montrons \ que \quad \lim_{x\to 0}(2x+x^2-x^3)=0$

C-à-d on montre que :

$(\forall\varepsilon>0)\,(\exists\alpha>0)\,(\forall x\epsilon\mathbb{R})$:
$$|x|<\alpha \quad \Rightarrow \quad |f(x)|<\varepsilon$$

$Avec \ \ bien\,entendu \quad f(x)=2x+x^2-x^3$

Autrement-dit : étant donnée un $\varepsilon>0$ existe-t-il un $\alpha>0$ tel que : si $|x|<\alpha$ alors on aurait $|f(x)|<\varepsilon$?
Soit $\varepsilon>0$ c-à-d un réel qui ressemble à $0{,}0001>0$ $(infiniment \ petit)$.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$Si \quad |x|<\alpha \quad Alors \quad -\alpha<x<\alpha$
$$\Rightarrow \quad 1-\alpha<x+1<\alpha+1$$
$$\Rightarrow \quad -(\alpha+1)<1-\alpha<x+1<\alpha+1$$
$$\Rightarrow \quad -(\alpha+1)<x+1<(\alpha+1)$$
$$\Rightarrow \quad |x+1|<(\alpha+1) \ \rightsquigarrow (1)$$

Et on a aussi $-\alpha<x<\alpha$
$$\Rightarrow \quad -2-\alpha<x-2<\alpha-2$$
$$\Rightarrow \quad -(2+\alpha)<x-2<\alpha-2<(2+\alpha)$$
$$\Rightarrow \quad -(2+\alpha)<x-2<(2+\alpha)$$
$$\Rightarrow \quad |x-2|<(2+\alpha) \ \rightsquigarrow (2)$$

Et on a aussi $|x|<\alpha \rightsquigarrow (0)$

$(1)\times(2)\times(0) \Rightarrow$
$$|x|\cdot|x+1|\cdot|x-2|<\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)$$
$$\Rightarrow \quad |x(x+1)(x-2)|<\varphi(\alpha)$$
$$\Rightarrow \quad |-x(x+1)(x-2)|<\varphi(\alpha)$$
$$\Rightarrow \quad |f(x)|<\varphi(\alpha)$$

On aimerait bien en avoir $\varphi(\alpha)=\varepsilon$
C'est possible car :
$$\varphi(x)=x^3+3\alpha^2+2\alpha=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)$$
Cette fonction est continue et étant strictement croissante sur $[0,+\infty[$ donc c'est une bijection de $[0,+\infty[$ vers $[0,+\infty[$.

Donc : $(\forall y\geq 0)\,(\exists!\,x\geq 0) : \ \varphi(x)=y$
$(pour \ \ \varepsilon>0)(\exists!\,\alpha=\varphi^{-1}(\varepsilon)>0) : \ \varphi(\varepsilon)=\varepsilon$

Voici un récapitulatif :

$Soit \quad \varepsilon>0 \quad et \quad \alpha=\varphi^{-1}(\varepsilon)$

$$|x|<\alpha \quad \Rightarrow \quad |x|<\varphi^{-1}(\varepsilon) \ \rightsquigarrow (0)$$
$$\Rightarrow \quad |x+1|<\varphi^{-1}(\varepsilon)+1 \ \ selon \ (1)$$
$$\Rightarrow \quad |x+2|<\varphi^{-1}(\varepsilon)+2 \ \ selon \ (2)$$
$$\Rightarrow \quad |x(x+1)(x+2)|<\varphi\left(\varphi^{-1}(\varepsilon)\right)$$
$$\Rightarrow \quad |f(x)|<\varepsilon \qquad .$$

D'où finalement :
$(\forall\varepsilon>0)(\exists\alpha>0)(\forall x\epsilon\mathbb{R})$:
$$|x|<\alpha \quad \Rightarrow \quad |f(x)|<\varepsilon$$

Solution N° 2 :

1) $Montrons\ \ que\ \ \lim_{x\to 1}(3x^2-5x+1)=-1$

C-à-d on montre que :

$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists\alpha>0)\ (\forall x\epsilon\mathbb{R})$:
$$|x-1|<\alpha \quad\Longrightarrow\quad |f(x)|<\varepsilon$$

$Avec\ \ bien\ entendu\ \ \ f(x)=3x^2-5x+2$

Autrement-dit : étant donnée un $\varepsilon>0$ existe-t-il un $\alpha>0$ tel que :
Si $|x-1|<\alpha$ on aurait $|f(x)|<\varepsilon$?

Soit $\varepsilon>0$ c-à-d un réel qui ressemble à $0{,}00000001>0$ $(infiniment\ petit)$.

D'abord on a la chose suivante :
$$f(x)+1=3x^2-5x+2=3(x-1)\left(x-\frac{2}{3}\right)$$

$$Si\ \ |x-1|<\alpha\ \ Alors\ \ -\alpha<x-1<\alpha$$
$$\Longrightarrow\ 1-\alpha<x<\alpha+1$$
$$\Longrightarrow\ |x|<\alpha+1 \rightsquigarrow (1)$$

$$Si\ \ |x-1|<\alpha\ \ Alors\ \ -\alpha<x-1<\alpha$$
$$\Longrightarrow\ 1-\alpha<x<\alpha+1$$
$$\Longrightarrow\ 1-\alpha-\frac{2}{3}<x-\frac{2}{3}<\alpha+1-\frac{2}{3}$$
$$\Longrightarrow\ \left(\frac{1}{3}-\alpha\right)<\left(x-\frac{2}{3}\right)<\left(\alpha+\frac{1}{3}\right)$$
$$\Longrightarrow\ \left|x-\frac{2}{3}\right|<\alpha+\frac{1}{3} \rightsquigarrow (2)$$

Et on a $|x-1|<\alpha \rightsquigarrow (0)$

$$(0)\times(2)\Longrightarrow\left|3(x-1)\left(x-\frac{2}{3}\right)\right|<3\alpha\left(\alpha+\frac{1}{3}\right)$$
$$\Longrightarrow\quad |f(x)+1|<3\alpha\left(\alpha+\frac{1}{3}\right)$$

$$Soit\ \ \varphi(\alpha)=3\alpha\left(\alpha+\frac{1}{3}\right)$$
$$\varphi:\ ]0,+\infty[\ \longmapsto\ ]0,+\infty[\ \ est\ une\ bijection$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Car φ est continue et strictement $\nearrow$
$$Donc\ \ (\forall y>0)(\exists!\,x>0)\ :\ \varphi(x)=y$$
$$(pour\ \varepsilon>0)(\exists!\,\alpha=\varphi^{-1}(\varepsilon)>0):\ \varphi(\alpha)=\varepsilon$$

Voici un récapitulatif :

$$|x-1|<\alpha\ \Longrightarrow\ |x-1|<\varphi^{-1}(\varepsilon) \rightsquigarrow (0)$$
$$\Longrightarrow\ aussi\ \left|x-\frac{2}{3}\right|<\varphi^{-1}(\varepsilon)+\frac{1}{3} \rightsquigarrow (2)$$

$$\left|3(x-1)\left(x-\frac{2}{3}\right)\right|<3\varphi^{-1}(\varepsilon)\left(\varphi^{-1}(\varepsilon)+\frac{1}{3}\right)$$
$$\Longrightarrow\ |f(x)+1|<\varphi\big(\varphi^{-1}(\varepsilon)\big)$$
$$\Longrightarrow\ |f(x)+1|<\varepsilon$$

D'où : $(\forall\varepsilon>0)\ (\exists\alpha>0)\ (\forall x\epsilon\mathbb{R})$:
$$|x-1|<\alpha\ \Longrightarrow\ |f(x)+1|<\varepsilon$$

$$Donc\ \ Finalement\ \ \ \lim_{x\to 1}f(x)=-1$$

2) $Montrons\ \ que\ \ \lim_{x\to -1}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)=\frac{1}{2}$

C-à-d on montre que :

$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists\alpha>0)\ (\forall x\epsilon\mathbb{R}\backslash\{1\})$:
$$|x+1|<\alpha\ \Longrightarrow\ \left|f(x)-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$$

$Avec\ \ bien\ entendu\ \ \ f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$

Autrement-dit : étant donnée un $\varepsilon>0$ existe-t-il un $\alpha>0$ tel que :
Si $|x+1|<\alpha$ on aurait $\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$?

Soit $\varepsilon>0$ c-à-d un réel qui ressemble à $0{,}001>0$ $(infiniment\ petit)$.

$$Soit\ \ \ \varphi(x)=f(x)-\frac{1}{2}\ \ \ ;\ \ \ \forall\,x\neq 1$$

$$\varphi(x)=f(x)-\frac{1}{2}=\frac{4x+2-x+1}{2(x-1)}$$

$$=\frac{3x+3}{2(x-1)}=\frac{3}{2}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\frac{3}{2}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)$$

La fonction φ réalise une bijection de l'intervalle $]-\infty,1[$ vers l'intervalle $\left]-\infty,\frac{3}{2}\right[$ car continue et étant strictement $\searrow$.

Donc $\varphi^{-1}:\left]-\infty,\frac{3}{2}\right[\mapsto\ ]-\infty,1[$ *existe et étant continue et décroissante aussi*

Soit $1>\varepsilon>0$

Si $\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$ *Alors* $|\varphi(x)|<\varepsilon$

$$\Rightarrow\ -\varepsilon<\varphi(x)<\varepsilon$$
$$\Rightarrow\ \varphi^{-1}(\varepsilon)<x<\varphi^{-1}(-\varepsilon)\ \text{car}\ \varphi\searrow$$
$$\Rightarrow\ \underbrace{\varphi^{-1}(\varepsilon)+1}_{\text{négatif}}<x+1<\underbrace{\varphi^{-1}(-\varepsilon)+1}_{\text{positif}}$$

Soit $\alpha=min(-\varphi^{-1}(\varepsilon)-1\ ;\ \varphi^{-1}(-\varepsilon)+1)$

Voici un récapitulatif : *soit* $0<\varepsilon<1$

Si $-\varphi^{-1}(\varepsilon)-1<\varphi^{-1}(-\varepsilon)+1 \rightsquigarrow (*)$

Alors $|x+1|<\alpha\ \Rightarrow |x+1|<-\varphi^{-1}(\varepsilon)-1$

$$\Rightarrow\ \varphi^{-1}(\varepsilon)+1<x+1<-\varphi^{-1}(-\varepsilon)-1$$
$$\Rightarrow\ \varphi^{-1}(\varepsilon)+1<x+1<\varphi^{-1}(-\varepsilon)+1\ (*)$$

$$\Rightarrow\ \varphi^{-1}(\varepsilon)<x<\varphi^{-1}(-\varepsilon)$$

$$\Rightarrow\ \varphi\left(\varphi^{-1}(-\varepsilon)\right)<\varphi(x)<\varphi\left(\varphi^{-1}(\varepsilon)\right)\ ;\ \varphi\searrow$$

$$\Rightarrow\ -\varepsilon<\varphi(x)<\varepsilon$$

$$\Rightarrow\ |\varphi(x)|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow\ \left|f(x)-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$$

Si $-\varphi^{-1}(\varepsilon)-1>\varphi^{-1}(-\varepsilon)+1 \rightsquigarrow (**)$

Alors $|x+1|<\alpha\ \Rightarrow |x+1|<\varphi^{-1}(-\varepsilon)+1$

$$\Rightarrow\ -\varphi^{-1}(-\varepsilon)-1<x+1<\varphi^{-1}(-\varepsilon)+1$$
$$\Rightarrow\ \varphi^{-1}(\varepsilon)+1<x+1<\varphi^{-1}(-\varepsilon)+1\ (**)$$

$$\Rightarrow\ \varphi^{-1}(\varepsilon)<x<\varphi^{-1}(-\varepsilon)$$

$$\Rightarrow\ \varphi\left(\varphi^{-1}(-\varepsilon)\right)<\varphi(x)<\varphi\left(\varphi^{-1}(\varepsilon)\right)\ ;\ \varphi\searrow$$

$$\Rightarrow\ -\varepsilon<\varphi(x)<\varepsilon$$

$$\Rightarrow\ |\varphi(x)|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow\ \left|f(x)-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$$

D'où finalement : $(\forall\varepsilon>0)$:
$(\exists\alpha=min(-\varphi^{-1}(\varepsilon)-1\ ;\ \varphi^{-1}(-\varepsilon)+1))$
$(\forall x<1)$; $|x+1|<\alpha\ \Rightarrow\ \left|f(x)-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$

$$C-\text{à}-d\qquad \lim_{x\to-1}f(x)=\frac{1}{2}$$

3) *Montrons que* $\lim_{x\to2}\sqrt{4x+1}=3$

C-à-d on montre que :

$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists\alpha>0)\ \left(\forall x\geq\frac{-1}{4}\right)$:
$$|x-2|<\alpha\ \Rightarrow\ \left|\sqrt{4x+1}-3\right|<\varepsilon$$

Avec bien entendu $f(x)=\sqrt{4x+1}$

Autrement-dit : étant donnée un $\varepsilon>0$ existe-t-il un $\alpha>0$ tel que :
Si $|x-2|<\alpha$ on aurait $|f(x)-3|<\varepsilon$?

Soit $\varphi(x)=f(x)-3=\sqrt{4x+1}-3$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Il est très facile de montrer que φ est une fonction continue et étant strictement croissante Donc c'est une bijection de $\left]\frac{-1}{4},+\infty\right[$ vers $]-3,+\infty[$.

$Si \quad |f(x)-3|<\varepsilon \quad Alors \quad |\varphi(x)|<\varepsilon$

$$\Rightarrow \quad -\varepsilon<\varphi(x)<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \varphi^{-1}(-\varepsilon)<\varphi^{-1}(\varphi(x))<\varphi^{-1}(\varepsilon) \ ; \ \varphi \nearrow$$

$$\Rightarrow \quad \varphi^{-1}(-\varepsilon)<x<\varphi^{-1}(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\varphi^{-1}(-\varepsilon)-2}_{négatif}<x-2<\underbrace{\varphi^{-1}(\varepsilon)-2}_{positif}$$

Il suffit de prendre alors :

$$\alpha=min\left(\varphi^{-1}(\varepsilon)-2 \ ; \ 2-\varphi^{-1}(-\varepsilon)\right)$$

Récapitulons : $soit \quad 1>\varepsilon>0$

$Si \quad \varphi^{-1}(\varepsilon)-2<2-\varphi^{-1}(-\varepsilon)$
$Alors \quad 2-\varphi^{-1}(\varepsilon)>\varphi^{-1}(-\varepsilon)-2 \quad \rightsquigarrow \quad (*)$
$On \ a \ donc \quad \alpha=\varphi^{-1}(\varepsilon)-2$

$$|x-2|<\alpha \quad \Rightarrow \quad |x-2|<\varphi^{-1}(\varepsilon)-2$$

$$\Rightarrow \quad 2-\varphi^{-1}(\varepsilon)<x-2<\varphi^{-1}(\varepsilon)-2$$

$$\Rightarrow \quad \varphi^{-1}(-\varepsilon)-2<x-2<\varphi^{-1}(\varepsilon)-2 \ *$$

$$\Rightarrow \quad \varphi^{-1}(-\varepsilon)<x<\varphi^{-1}(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \quad \varphi\left(\varphi^{-1}(-\varepsilon)\right)<\varphi(x)<\varphi\left(\varphi^{-1}(\varepsilon)\right) ; \ \varphi \nearrow$$

$$\Rightarrow \quad -\varepsilon<\varphi(x)<\varepsilon$$
$$\Rightarrow \quad |\varphi(x)|<\varepsilon$$
$$\Rightarrow \quad |f(x)-3|<\varepsilon$$
$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 2} f(x)=3$$

$Si \quad \varphi^{-1}(\varepsilon)-2>2-\varphi^{-1}(-\varepsilon) \quad \rightsquigarrow \quad (**)$
$On \ a \ donc \quad \alpha=2-\varphi^{-1}(-\varepsilon)$

$$|x-2|<\alpha \quad \Rightarrow \quad |x-2|<2-\varphi^{-1}(-\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \quad \varphi^{-1}(-\varepsilon)-2<x-2<2-\varphi^{-1}(-\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \quad \varphi^{-1}(-\varepsilon)<x<\varphi^{-1}(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \quad \varphi\left(\varphi^{-1}(-\varepsilon)\right)<\varphi(x)<\varphi\left(\varphi^{-1}(\varepsilon)\right) ; \ \varphi \nearrow$$

$$\Rightarrow \quad -\varepsilon<\varphi(x)<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad |\varphi(x)|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad |f(x)-3|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 2} f(x)=3$$

4) $Montrons \ que \quad \lim_{x\to 2}\left(-1+\frac{1}{3\sqrt{x}}\right)=-1$

C-à-d on montre que :

$(\forall\varepsilon>0) \ (\exists B>0) \ (\forall \ x \in \mathbb{R}_+^*)$:
$$x>B \quad \Rightarrow \quad |f(x)+1|<\varepsilon$$

$Avec \ bien \ entendu \quad f(x)=-1+\frac{1}{3\sqrt{x}}$

Autrement-dit : étant donnée un $\varepsilon>0$ existe-t-il un $B>0$ tel que :
Si $x>B$ on aurait $|f(x)+1|<\varepsilon$?

$Si \quad |f(x)+1|<\varepsilon \quad Alors \quad \left|\frac{1}{3\sqrt{x}}\right|<\varepsilon$

$$\Rightarrow \quad 3|\sqrt{x}|>\frac{1}{\varepsilon} \qquad \Rightarrow \quad |\sqrt{x}|>\frac{1}{3\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \quad x>\frac{1}{9\varepsilon^2}$$

On prend alors $B = \frac{1}{9\varepsilon^2}$

Voici un récapitulatif : $soit \quad (\varepsilon > 0)$

$$x > B \implies x > \frac{1}{9\varepsilon^2} \implies \sqrt{x} > \frac{1}{3\varepsilon}$$

$$\implies \frac{1}{\sqrt{x}} < 3\varepsilon \implies \frac{1}{3\sqrt{x}} < \varepsilon$$

$$\implies 0 < \frac{1}{3\sqrt{x}} < \varepsilon \implies -\varepsilon < \frac{1}{3\sqrt{x}} < \varepsilon$$

$$\implies \left|\frac{1}{3\sqrt{x}}\right| < \varepsilon \implies \left|-1 + \frac{1}{3\sqrt{x}} + 1\right| < \varepsilon$$

$$\implies |f(x) + 1| < \varepsilon$$

$$\implies \lim_{x \to +\infty} f(x) = -1$$

Solution N° 3 :

1) $on\ montre\ que\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}\ \ on\ ait\ :$

$$|f(x) - 1| \leq (x-1)^2$$

$$On\ a\quad f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$$

$$D'abord\quad |f(x) - 1| = \left|\frac{2x - 1 - x^2}{x^2 + 1}\right|$$

$$= \left|\frac{-(x-1)^2}{x^2+1}\right| = \left|\frac{(x-1)^2}{x^2+1}\right| = \left|\frac{1}{x^2+1}\right| \cdot (x-1)^2$$

$$Or,\quad on\ a\quad x^2 + 1 \geq 1 \implies \frac{1}{x^2+1} \leq 1$$

$$\implies 0 < \frac{1}{x^2+1} \leq 1$$

$$\implies \left|\frac{1}{x^2+1}\right| \leq 1$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\implies \left|\frac{1}{x^2+1}\right| \cdot (x-1)^2 \leq (x-1)^2$$

$$\implies |f(x) - 1| \leq (x-1)^2$$

2) $Montrons\ que\quad \lim_{x \to 1} f(x) = 1$

$Soit\ \ \varepsilon > 0\ ;\quad pour\ que\ \ |f(x) - 1| \leq \varepsilon$

On pourrait choisir le cas où $(x-1)^2 \leq \varepsilon$

$Ainsi\ :\quad |f(x) - 1| \leq (x-1)^2 < \varepsilon$

$$\implies \sqrt{(x-1)^2} \leq \sqrt{\varepsilon} \implies |x - 1| \leq \sqrt{\varepsilon}$$

On peut prendre alors $\alpha = \sqrt{\varepsilon} > 0$

Et voici un récapitulatif : $soit \quad \varepsilon > 0$

$$|x - 1| \leq \alpha \implies |x - 1| \leq \sqrt{\varepsilon}$$

$$\implies (x-1)^2 < \varepsilon$$

$$\implies |f(x) - 1| \leq (x-1)^2 < \varepsilon$$

$$\implies |f(x) - 1| < \varepsilon$$

Ainsi : $(\forall \varepsilon > 0)\ \left(\exists \alpha = \sqrt{\varepsilon}\right)\ (\forall x \epsilon \mathbb{R})$:

$$|x - 1| < \alpha \implies |f(x) - 1| < \varepsilon$$

$$D'où\ \ finalement\quad \lim_{x \to} f(x) = 1$$

Solution N° 4 :

1) $Montrons\ \ que\ \ (\forall x \epsilon \mathbb{R}^+)\ \ \ on\ \ ait\ \ :$

$$\left|g(x) - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}|x - 1|$$

$$D'abord\ on\ \ a : \left|g(x) - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{2}\right|$$

$$= \left|\frac{2\sqrt{x}-\sqrt{x}-1}{2(\sqrt{x}+1)}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right|$$

$On\ a \quad \sqrt{x} \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{x}+1 \geq 1$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{x}+1} \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 < \frac{1}{\sqrt{x}+1} \leq 1$$

$$\Longrightarrow \quad \left|\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right| \leq 1$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{2}\cdot\left|\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right|\cdot|\sqrt{x}-1| \leq \frac{1}{2}|\sqrt{x}-1|$$

$$\Longrightarrow \quad \left|g(x)-\frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}|\sqrt{x}-1| \rightsquigarrow (*)$$

$Or\ ; \quad x \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{x} \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad x \geq \sqrt{x}$

$$\Longrightarrow \quad x-1 \geq \sqrt{x}-1 \geq 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{2}|x-1| \geq \frac{1}{2}|\sqrt{x}-1|$$

$On\ a\ aussi \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{x} \leq 1$

$$\Longrightarrow \quad x \leq \sqrt{x}$$

$$\Longrightarrow \quad x-1 \leq \sqrt{x}-1 \leq 0$$

$$\Longrightarrow \quad |x-1| \leq |\sqrt{x}-1|$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{2}|x-1| \leq \frac{1}{2}|\sqrt{x}-1|$$

D'où l'on tire la chose suivante :

$$(\forall x\epsilon\mathbb{R}^+)\ ; \quad \frac{1}{2}|\sqrt{x}-1| \leq \frac{1}{2}|x-1| \rightsquigarrow (**)$$

Et d'après les résultats $(*)$ et $(**)$:

$$(\forall x\epsilon\mathbb{R}^+)\ ; \quad \left|g(x)-\frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}|x-1|$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$2) \quad Montrons\ que \quad : \quad \lim_{x\to 1} g(x) = \frac{1}{2}$

$Soient \quad (\varepsilon > 0) \quad et \quad x\ \epsilon\ \mathbb{R}^+ \ :$

$pour\ que \quad \left|g(x)-\frac{1}{2}\right| < \varepsilon$

$on\ peut\ choisir\ le\ cas \quad \frac{1}{2}|x-1| < \varepsilon$

$C-à-d \quad |x-1| < 2\varepsilon$

$On\ prend\ ainsi \quad \alpha = 2\varepsilon$

Et voici un récapitulatif : $soit\ \varepsilon > 0$

$|x-1| < \alpha \quad \Longrightarrow \quad |x-1| < 2\varepsilon$

$$\Longrightarrow \quad \left|g(x)-\frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}|x-1| \leq \frac{1}{2}\cdot 2\varepsilon$$

$$\Longrightarrow \quad \left|g(x)-\frac{1}{2}\right| \leq \varepsilon$$

$Donc \quad (\forall\varepsilon > 0)\ (\exists\alpha = 2\varepsilon > 0)\ (\forall x\epsilon\mathbb{R}^+) :$

$$|x-1| < \alpha \quad \Longrightarrow \quad \left|f(x)-\frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$

Solution N° 5 :

$$1)\ on\ a \quad \left(\frac{h(x)-2}{x+1}\right) = \frac{1}{x+1}\left(\frac{x-1}{2x+1} - \frac{2(2x+1)}{2x+1}\right)$$

$$= \frac{1}{x+1}\left(\frac{-3x-3}{2x+1}\right)$$

$$= -3\left(\frac{1}{x+1}\right)\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)$$

$$= \frac{-3}{2x+1}$$

$$pour\ que \quad |x+1| < \frac{1}{3} \quad On\ aurait\ :$$

$$\frac{-1}{3} < x+1 < \frac{1}{3}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{-4}{3} < x < \frac{-2}{3}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{-8}{3} < 2x < \frac{-4}{3}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{-5}{3} < 2x+1 < \frac{-1}{3}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{3} < -(2x+1) < \frac{5}{3}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{3}{5} < \frac{-1}{2x+1} < 3$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{9}{5} < \frac{-3}{2x+1} < 9$$

$$\Longrightarrow \quad \left|\frac{-3}{2x+1}\right| < 9$$

$$\Longrightarrow \quad \left|\frac{h(x)-2}{x+1}\right| = \left|\frac{-3}{2x+1}\right| < 9$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{|h(x)-2|}{|x+1|} < 9$$

$$\Longrightarrow \quad |h(x)-2| \leq 9\,|x+1|$$

2) $Soient \quad \varepsilon > 0 \quad et \quad x \neq \dfrac{-1}{2}$

$Soit \quad \alpha = \dfrac{\varepsilon}{9} > 0 \quad ; \quad On\ a \quad |x+1| \leq \dfrac{\varepsilon}{9}$

$$\Longrightarrow \quad |h(x)-2| \leq 9\,|x+1| \leq \frac{9\varepsilon}{9}$$

$$\Longrightarrow \quad |h(x)-2| \leq \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x\to -1} h(x) = 2$$

Solution N° 6 :

1) $On\ a \ : \quad \left(\dfrac{f(x)-1}{x}\right) = x^2 - 2x + 2$

$pour\ que \quad -1 \leq x \leq 1 \quad on\ aurait\ :$

$$\begin{cases} 0 \leq x^2 \leq 1 \\ -2 \leq -2x \leq 2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad 0 \leq x^2 - 2x + 2 \leq 5$$

$$\Longrightarrow \quad 0 \leq \frac{f(x)-1}{x} \leq 5$$

$$\Longrightarrow \quad \left|\frac{f(x)-1}{x}\right| \leq 5$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{|f(x)-1|}{|x|} \leq 5$$

$$\Longrightarrow \quad |f(x)-1| \leq 5\,|x|$$

2) $soient \quad \varepsilon > 0 \quad et \quad |x| \leq 1 \quad et \quad \alpha = \frac{\varepsilon}{5} > 0$

$$|x| < \alpha \quad \Longrightarrow \quad |x| < \frac{\varepsilon}{5} \quad \Longrightarrow \quad 5\,|x| < \frac{5\varepsilon}{5}$$

$$\Longrightarrow \quad |f(x)-1| \leq 5\,|x| < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \quad |f(x)-1| < \varepsilon$$

$$D'où \ (\forall \varepsilon > 0)\ \left(\exists \alpha = \frac{\varepsilon}{5} > 0\right)\ (\forall\, |x| \leq 1) :$$

$$|x| < \alpha \quad \Longrightarrow \quad |f(x)-1| < \varepsilon$$

Donc on a pu montrer la limite suivante

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Solution N° 7 :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{5x^2+x}{(x-2)^2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{5x^2}{x^2}\right)=5$

2) $\lim\limits_{x\to3^+}\left(\frac{2x}{3-x}\right)=\left(\frac{6}{0^-}\right)=-\infty$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^{2018}}{x^{2019}+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^{2018}}{x^{2019}}\right)$

$$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0^+=0$$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3-\sqrt{x}}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)\left(\frac{\frac{3}{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}\right)$

$$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{3}{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}\right)=\left(\frac{-1}{+\infty}\right)=0^-=0$$

5) $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)=\frac{1}{(0^-)^2}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{x^2+2}\right)=\left(\frac{1+0^+}{+\infty}\right)=0^+=0$

Solution N° 8 :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2-x+x^3)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^3+(x^2-1)(1-3x)\right)$

$$=\lim\limits_{x\to-\infty}-x^3=(-1)(-\infty)=+\infty$$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3(1-2x)^5=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3)(-2x)^5$

$$=\lim\limits_{x\to-\infty}(-32)(x^8)=(-32)(x^8)=-\infty$$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^4-x^2+x+1)=\lim\limits_{x\to-\infty}-2x^4$

$$=(-2)(+\infty)=-\infty$$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-2x^2)(1+3x)=\lim\limits_{x\to-\infty}-6x^3$

$$=(-6)(+\infty)=-\infty$$

Solution N° 9 :

1) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin(\pi x)}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)\left(\frac{\pi}{1}\right)=\pi$

2) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1-\cos(2x)}{x^2}\right)=\lim\limits_{\substack{t\to0\\t=2x}}\left(\frac{1-\cos t}{\left(\frac{t}{2}\right)^2}\right)$

$$=\lim\limits_{t\to0}4\left(\frac{1-\cos t}{t^2}\right)=4\times\frac{1}{2}=2$$

3) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{sin^2(x)}{3x^2}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=\frac{1}{3}$

4) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin(5x)}{\tan(3x)}\right)$

$$=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin(5x)}{5x}\right)\left(\frac{1}{\frac{\tan(3x)}{3x}}\right)\left(\frac{5x}{3x}\right)=\frac{5}{3}$$

5) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin(5x)}{\tan(3x)}\right)$

$$=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin(7x)}{7x}\right)\left(\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}\right)\left(\frac{7x}{x}\right)=7$$

6) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sin x}\right)$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\right)\left(\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}\right)\left(\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}\right)\left(\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}\right)\left(\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}\right) = \frac{1}{2}$$

Solution N° 10 :

■ $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(\dfrac{\sin(x-1)}{2(x^2-x)}\right)$

$$= \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{\sin(x-1)}{x-1}\right)\left(\frac{1}{2x}\right)$$

$$= \lim_{\substack{t\to 0^+\\ t=x-1}}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)\left(\frac{1}{2(t+1)}\right) = \frac{1}{2}$$

■ $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(\dfrac{x-1}{|2x-1|-1}\right) = \dfrac{1}{2}$

$$car \quad : \quad \left(\frac{x-1}{|2x-1|-1}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2} & ; \ x \geq \frac{1}{2} \\ \frac{1-x}{2x} & ; \ x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$quand \quad x \to 1^- \quad Alors \quad x \geq \frac{1}{2}$$

Donc f est bien continue en 1

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Solution N° 11 :

■ $\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1}\left(\dfrac{x^5-x^4+x^3+3}{x+1}\right)$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x^4-2x^3+3x^2-3x+3)}{(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to -1} (x^4-2x^3+3x^2-3x+3) = 12$$

Donc f est continue en -1 .

Solution N° 12 :

1) $Arctan(3x) = \dfrac{\pi}{8}$

$$\Leftrightarrow \quad tan\big(Arctan(3x)\big) = tan\left(\frac{\pi}{8}\right) \ ; \ \frac{\pi}{8} \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x = \sqrt{2}-1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\sqrt{2}-1}{3}$$

pour calculer $tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ remarquer que :

$$1 = tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = tan\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{8}\right) = \frac{tan\left(\frac{\pi}{8}\right)+tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}{1-tan^2\left(\frac{\pi}{8}\right)}$$

2) $Arctan(x^2+2) = Arctan(3x)$

$$\Leftrightarrow \quad tan\big(Arctan(x^2+2)\big) = tan\big(Arctan(3x)\big)$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2+2 = 3x$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2-3x+2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in \{1 ; 2\}$$

3) $Arctan(x^2-x) = \dfrac{3\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \quad tan\big(Arctan(x^2-x)\big) = tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2-x = tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = tan\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - x = -\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \left(\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right) \epsilon\, \mathbb{C}$$

$\Leftrightarrow$ *Elle n'admet aucune solution dans* $\mathbb{R}$

4) $Arctan(x) = \frac{\pi}{4} + 2\, Arctan\left(\frac{1}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow \quad tan(arctan(x)) = tan\left(\frac{\pi}{4} + 2\, Arctan\left(\frac{1}{4}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + tan\left(2\, Arctan\left(\frac{1}{4}\right)\right)}{1 - tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot tan\left(2\, Arctan\left(\frac{1}{4}\right)\right)}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{1 + tan\left(2\, Arctan\left(\frac{1}{4}\right)\right)}{1 - tan\left(2\, Arctan\left(\frac{1}{4}\right)\right)}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{1 + \frac{8}{15}}{1 - \frac{8}{15}} = \frac{23}{7}$$

$$Car \quad tan\left(2\, Arctan\left(\frac{1}{4}\right)\right) = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}} = \frac{8}{15}$$

5) $Arctan(x) + Arctan(2x) = \frac{\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x + 2x}{1 - x \cdot 2x} = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{3}\,(1 - 2x^2) = 3x$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^2 + \sqrt{3}\,x - 1 = 0$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{11}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{11}}{4} \quad ; \; car \;\; x \geq 0$$

Sinon on aurait : $Arctan(x) + Arctan(2x) \leq 0$

6) $Arctan(\sqrt{x}) = \frac{-\pi}{4}$

On a : $\sqrt{x} \geq 0$ *Alors* $Arctan(\sqrt{x}) \geq 0$

Ainsi : $\frac{-\pi}{4} \geq 0$ *(Absurde)*

D'où l'équation n'admet aucune solution

Solution N° 13 :

■ $f(x) = tan\left(\frac{\pi}{2x - 1}\right)$

$$D_f = \left\{ x\epsilon\mathbb{R} \; ; \; 2x - 1 \neq 0 \;\; et \;\; \frac{\pi}{2x - 1} \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \right\}$$

$$= \left\{ x\epsilon\mathbb{R} \; ; \; x \neq \frac{1}{2} \;\; et \;\; x \neq \frac{2k + 3}{2(2k + 1)} \; ; \; k\epsilon\mathbb{Z} \right\}$$

$$= \mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{1}{2} \; ; \; \frac{2k + 3}{2(2k + 1)} \; ; \; k\epsilon\mathbb{Z} \right\}$$

La fonction f est bien évidemment continue sur chaque intervalle de l'ensemble D_f car c'est une composition bien définie de deux fonctions continues. Étudions maintenant la continuité en ½ et en c.

$$Soit \quad c = \frac{2k + 3}{2(2k + 1)}$$

$$\lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^{\pm}} f(x) = \lim_{t \to \pm\infty} tan(t) = n'existe\ pas$$

$On\ a \quad \lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{t \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} tan(t) = +\infty$

$Et\ On\ a \quad \lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{t \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} tan(t) = -\infty$

Donc les points où la fonction présente des discontinuités sont ½ et les points c

■ $g(x) = \sin\left(\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)$

$D_g = \{ x \epsilon \mathbb{R} \ ; \quad x \neq 0 \} = \mathbb{R}^*$

La fonction g est bien évidemment continue sur chacun des intervalles $]0, +\infty[\ et\ ]-\infty, 0[$ de l'ensemble D_g car c'est une composition bien définie de trois fonctions continues. Étudions maintenant la continuité en 0

$\lim_{x \to 0^{\pm}} g(x) = \lim_{t \to \pm\infty} \sin(\cos t) = n'existe\ pas$

Donc g n'est pas continue en 0.

■ $h(x) = \dfrac{x^2 - \sqrt{2-x}}{|x+1| - 2}$

$$D_h = \{ x \epsilon \mathbb{R} \ ; \ 2 - x \geq 0 \ \ et \ \ |x+1| - 2 \neq 0 \}$$

$$= \{ x \epsilon \mathbb{R} \ ; \ x \leq 2 \ \ et \ \ x + 1 \neq \pm 2 \}$$

$$= \{ x \epsilon \mathbb{R} \ ; \ x \leq 2 \ \ et \ \ x \neq 1 \ \ et \ \ x - 3 \}$$

$$=]-\infty, -3[\ \cup \ ]-3,1[\ \cup \ ]1,2]$$

$$On\ a \ : \ h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - \sqrt{2-x}}{x-1} \ ; & \left| \begin{array}{l} x > -1 \\ x \neq 1 \end{array} \right. \\ \dfrac{x^2 - \sqrt{2-x}}{-x-3} \ ; & \left| \begin{array}{l} x < -1 \\ x \neq -3 \end{array} \right. \end{cases}$$

D'abord la continuité sur les intervalles : $]-\infty, -3[\quad et \quad]-3,1[\quad et \quad]1,2]$

La fonction h est trivialement continue sur chacun de ces intervalles comme étant quotient de deux fonctions toutes continues et bien définies ($dénomin \neq 0$). Etudions maintenant la continuité aux bornes de ces intervalles :

$$\lim_{x \to (-3)^+} h(x) = \lim_{x \to (-3)^+} \left(\frac{x^2 - \sqrt{2-x}}{-x-3} \right)$$

$$= \lim_{x \to (-3)^+} \left(\frac{-1}{x+3} \right) \left(\frac{x^2 - \sqrt{2-x}}{1} \right)$$

$$= \left(\frac{-1}{0^-} \right) \left(\frac{9 - \sqrt{5}}{1} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to (-3)^-} h(x) = \lim_{x \to (-3)^-} \left(\frac{x^2 - \sqrt{2-x}}{-x-3} \right)$$

$$= \lim_{x \to (-3)^-} \left(\frac{-1}{x+3} \right) \left(\frac{x^2 - \sqrt{2-x}}{1} \right)$$

$$= \left(\frac{-1}{0^+} \right) \left(\frac{9 - \sqrt{5}}{1} \right) = -\infty$$

Donc h est discontinue en -3 .

$$\lim_{x \to 1^{\pm}} h(x) = \lim_{x \to 1^+} \left(\frac{x^2 - \sqrt{2-x}}{x-1} \right)$$

$$= \lim_{x \to 1^{\pm}} \left(\frac{x^2 - \sqrt{2-x}}{x-1} \right) \left(\frac{x^2 + \sqrt{2-x}}{x^2 + \sqrt{2-x}} \right)$$

$$= \lim_{x \to 1^{\pm}} \left(\frac{x^4 - 2 + x}{x-1} \right) \left(\frac{1}{x^2 + \sqrt{2-x}} \right)$$

$$= \lim_{x \to 1^{\pm}} \frac{(x-1)(x^3 + x^2 + x + 2)}{(x-1)} \left(\frac{1}{x^2 + \sqrt{2-x}} \right)$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= \lim_{x\to 1^{\pm}} \left(\frac{x^3+x^2+x+2}{x^2+\sqrt{2-x}}\right) = \frac{5}{2}$$

$$Alors \quad : \quad h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-\sqrt{2-x}}{x-1} & ; \quad \left| \begin{matrix} x > -1 \\ x \neq 1 \end{matrix} \right. \\ \dfrac{x^2-\sqrt{2-x}}{-x-3} & ; \quad \left| \begin{matrix} x < -1 \\ x \neq -3 \end{matrix} \right. \\ \dfrac{5}{2} & ; \quad x = 1 \end{cases}$$

$$ou \quad : \quad h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-\sqrt{2-x}}{-x-3} & ; \quad \left| \begin{matrix} x < -1 \\ x \neq -3 \end{matrix} \right. \\ \dfrac{x^2-\sqrt{2-x}}{x-1} & ; \quad \left| \begin{matrix} -1 < x < 2 \\ x \neq 1 \end{matrix} \right. \\ \dfrac{5}{2} & ; \quad x = 1 \end{cases}$$

■ $k(x) = \dfrac{1-\cos(2\pi x)}{x(x-1)}$

$D_k = \{\, x\epsilon\mathbb{R} \;\; ; \;\; x(x-1) \neq 0 \,\}$
$= \{\, x\epsilon\mathbb{R} \;\; ; \;\; x \neq 0 \;\; et \;\; x \neq 1 \,\}$
$= \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$
$=]-\infty, 0[\; \cup \;]0,1[\; \cup \;]1, +\infty[$

Sur chacun de ces intervalles, la fonction k est continue comme étant quotient de deux fonctions continues et bien définies ($dénominateur\ est\ non\ nul$)

Étudions la continuité de f en 0 et 1 :

$$\lim_{x\to 0^{\pm}} k(x) = \lim_{x\to 0^{\pm}} \left(\frac{1-\cos(2\pi x)}{x(x-1)}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^{\pm}} \left(\frac{1-\cos(2\pi x)}{(2\pi x)^2}\right)\left(\frac{(2\pi x)^2}{x(x-1)}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^{\pm}} \left(\frac{1-\cos(2\pi x)}{(2\pi x)^2}\right)\left(\frac{x^2}{x^2}\right)\left(\frac{4\pi^2}{1-\frac{1}{x}}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^{\pm}} \left(\frac{1-\cos(2\pi x)}{(2\pi x)^2}\right)\left(\frac{4\pi^2}{1-\frac{1}{x}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4\pi^2}{1-(\pm\infty)}\right) = 0^{\pm} = 0$$

Donc la fonction f est continue en zéro.

$$\lim_{x\to 1^{\pm}} k(x) = \lim_{x\to 1^{\pm}} \left(\frac{1-\cos(2\pi x)}{x(x-1)}\right)$$

$$= \lim_{\substack{t\to 0^{\pm} \\ t=x-1}} \left(\frac{1-\cos(2\pi t+2\pi)}{t(t+1)}\right)$$

$$= \lim_{t\to 0^{\pm}} \left(\frac{1-\cos(2\pi t)}{t(t+1)}\right)$$

$$= \lim_{t\to 0^{\pm}} \left(\frac{1-\cos(2\pi t)}{(2\pi t)^2}\right)\left(\frac{(2\pi t)^2}{t(t+1)}\right)$$

$$= \lim_{t\to 0^{\pm}} \left(\frac{1-\cos(2\pi t)}{(2\pi t)^2}\right)\left(\frac{4\pi^2}{1+\frac{1}{t}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4\pi^2}{1+(\pm\infty)}\right) = 0^{\pm} = 0$$

Donc la fonction k est continue en 1.

$$Alors \quad : \quad k(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(2\pi x)}{x(x-1)} & ; \quad \left| \begin{matrix} x \neq 0 \\ x \neq 1 \end{matrix} \right. \\ 0 & ; \quad \left| oubien \quad \begin{matrix} x = 0 \\ x = 1 \end{matrix} \right. \end{cases}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

■ $u(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{|x|}}{|x|} & ;\ x\neq 0\\ \dfrac{1}{2} & ;\ x=0\end{cases}\quad ;\ D_u=\mathbb{R}$

La fonction u est continue sur chacun des intervalles de $\mathbb{R}^*$ puisque c'est un quotient de deux fonctions toutes continues et bien définies .
Étudions maintenant la continuité en 0 :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos\sqrt{|x|}}{|x|}\right)=\lim_{\substack{t\to 0\\ t=\sqrt{|x|}}}\left(\frac{1-\cos t}{t^2}\right)=\frac{1}{2}$$

Donc la fonction u est continue sur l'ensemble $\mathbb{R}$ tout entier.

■ $v(x)=\dfrac{x}{tan(\pi x)}$

$$\begin{aligned}D_v&=\left\{x\epsilon\mathbb{R}\ ;\ tan(\pi x)\neq 0\ et\ \pi x\not\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]\right\}\\&=\left\{x\epsilon\mathbb{R}\ ;\ \pi x\equiv 0[\pi]\quad et\quad \pi x\not\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]\right\}\\&=\left\{x\epsilon\mathbb{R}\ ;\ x\neq k\ et\ x\neq k+\frac{1}{2}\ ;\ k\epsilon\mathbb{Z}\right\}\\&=\mathbb{R}\backslash\left\{k\ ;\ k+\frac{1}{2}\ ;\ k\epsilon\mathbb{Z}\right\}\end{aligned}$$

La fonction v est continue sur cet ensemble car v est un quotient de deux fonctions continues et bien définies.
Étudions maintenant la continuité en chaque k et en chaque point $\left(k+\frac{1}{2}\right)$:

$$\lim_{\substack{x\to k\\ k\epsilon\mathbb{Z}}}v(x)=\lim_{x\to k}\left(\frac{x}{tan(\pi x)}\right)=\frac{k}{tan(k\pi)}=\pm\infty$$

Ainsi la fonction v est clairement discontinue en chaque point k de $\mathbb{Z}^*$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\lim_{x\to 0}v(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{tan(\pi x)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\frac{tan(\pi x)}{\pi x}}\right)\left(\frac{1}{\pi}\right)$$
$$=\frac{1}{1}\times\frac{1}{\pi}=\frac{1}{\pi}$$

Ainsi la fonction v est continue en 0.

$$\lim_{\substack{x\to\left(\frac{1}{2}+k\right)^{\pm}\\ k\epsilon\mathbb{Z}}}v(x)=\lim_{x\to k}\left(\frac{x}{tan(\pi x)}\right)$$
$$=\lim_{x\to k}\left(\frac{\frac{1}{2}+k}{tan\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)}\right)=\left(\frac{\frac{1}{2}+k}{\pm\infty}\right)=0$$

Donc la fonction v est continue en chaque point (k+1/2). Et on redéfinie la fonction v ainsi :

$$\forall x\epsilon\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}\ ;\ v(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{tan(\pi x)} & ;\ x\neq\left(\dfrac{1}{2}+k\right)\\ 0 & ;\ x=\left(\dfrac{1}{2}+k\right)\\ \dfrac{1}{\pi} & ;\ x=0\end{cases}$$

Solution N° 14 :

■ $\lim\limits_{x\to -2}(x^2-7x-1)=17$

■ $\lim\limits_{x\to -1}(x^{2018}-x^{2017}+2)=4$

■ $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{2x^3-3x-9}{x-1}\right)=18$

■ $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}}\left(\dfrac{x^2+x}{2x-1}\right)=\dfrac{15}{8}$

■ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

■ $\lim\limits_{x\to\frac{-\pi}{4}}\tan x=-1$

Solution N° 15 :

■ $$\lim_{x\to 3}\left(\frac{-x^2+x+6}{x^2-4x+3}\right)$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(-x-2)}{(x-3)(x-1)}=\lim_{x\to 3}\left(\frac{-x-2}{x-1}\right)=\frac{-5}{2}$$

■ $$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^5-32}\right)$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2-4x+3)}{(x-2)(x^4+2x^3+4x^2+8x+16)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4x+3}{x^4+2x^3+4x^2+8x+16}\right)=\frac{-1}{80}$$

■ $$\lim_{x\to -1}\left(\frac{2-\sqrt{1-3x}}{x^2-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to -1}\left(\frac{2-\sqrt{1-3x}}{x^2-1}\right)\left(\frac{2+\sqrt{1-3x}}{2+\sqrt{1-3x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to -1}\left(\frac{4-(1-3x)}{x^2-1}\right)\left(\frac{1}{2+\sqrt{1-3x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to -1}\left(\frac{x+1}{(x-1)(x+1)}\right)\left(\frac{3}{2+\sqrt{1-3x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to -1}\left(\frac{1}{x-1}\right)\left(\frac{3}{2+\sqrt{1-3x}}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{-1-1}\right)\left(\frac{3}{2+\sqrt{1+3}}\right)=\frac{-3}{8}$$

■ $$\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}\right)=\lim_{x\to 3^+}\frac{\left(\sqrt{x-3}\right)\left(\sqrt{x+3}\right)}{\left(\sqrt{x-3}\right)\left(\sqrt{x-3}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 3^+}\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}=\sqrt{\frac{6}{0^+}}=+\infty$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

■ $$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\sqrt{x^2-x}}{x}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\sqrt{x^2}\times\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{|x|\times\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{x}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{-x\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\left(-\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)=-\sqrt{1-\frac{1}{0^-}}=-\infty$$

■ $$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1^-}\frac{-\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{-\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{1-\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{1-\sqrt{x}}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\left(\sqrt{\frac{1}{1-\sqrt{x}}}\right)\left(\frac{-1}{1+\sqrt{x}}\right)$$

$$=\left(\sqrt{\frac{1}{1-1^-}}\right)\left(\frac{-1}{1+\sqrt{1}}\right)$$

$$=\left(\sqrt{\frac{1}{0^+}}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)=-\infty$$

Solution N° 16 :

■ $$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2-x+1}{x-2}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}(2x)=+\infty$$

■ $$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

■ $$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}\left(\frac{2x^2-x+1}{x-2}\right) = -2$$

■ $$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-}\left(\frac{x^3-1}{x^2-1}\right)$$

$$= \lim_{x\to1^-}\left(\frac{x-1}{x-1}\right)\left(\frac{x^2+x+1}{x+1}\right)$$

$$= \lim_{x\to1^-}\left(\frac{x^2+x+1}{x+1}\right) = \frac{3}{2}$$

■ $$\lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2^+}\left(\frac{2x^2-x+1}{x-2}\right) = \frac{7}{0^+}$$

$$= +\infty$$

■ $$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-}\left(\frac{2x^2-x+1}{x-2}\right) = \frac{7}{0^-}$$

$$= -\infty$$

Solution N° 17 :

■ $$f(x) = \begin{cases} 2x-3 \ ; & x<2 \\ x^2-3 \ ; & x\geq 2 \end{cases}$$

Sur chacun des intervalles $]-\infty,2[$ et $[2,+\infty[$ la fonction f est continue car c'est un polynôme. Etudions la continuité de la fonction f en 2 :

$$\lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2^+}(x^2-3) = 1$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-}(2x-3) = 1$$

Donc la fonction f est continue en 2. Finalement on conclut que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

$$f(\,[-2{,}4]\,) = [f(-2)\,;f(4)] = [-7\,;13]$$
$$f(\,]-\infty,1]\,) = \left]\lim_{x\to-\infty} f(x)\,;f(1)\right] =]-\infty,1]$$

Solution N° 18 :

■ $$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{1+x^2}}{x+1}\right) = -1$$

■ $$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-}\left(\frac{\cos x-\sqrt{1+\sin x}}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to0^-}\left(\frac{\cos x-\sqrt{1+\sin x}}{x}\right)\left(\frac{\cos x+\sqrt{1+\sin x}}{\cos x+\sqrt{1+\sin x}}\right)$$

$$= \lim_{x\to0^-}\left(\frac{cos^2(x)-(1+\sin x)}{x}\right)\left(\frac{1}{\cos x+\sqrt{1+\sin x}}\right)$$

$$= \lim_{x\to0^-}\left(\frac{1-sin^2x-(1+\sin x)}{x}\right)\left(\frac{1}{\cos x+\sqrt{1+\sin x}}\right)$$

$$= \lim_{x\to0^-}\left(\frac{-sin^2x-\sin x}{x}\right)\left(\frac{1}{\cos x+\sqrt{1+\sin x}}\right)$$

$$= \lim_{x\to0^-}\left(\frac{sin^2x}{x}+\frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{-1}{\cos x+\sqrt{1+\sin x}}\right)$$

$$= \lim_{x\to0^-}\left(\sin x\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)+\frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{-1}{\cos x+\sqrt{1+\sin x}}\right)$$

$$(\sin 0\times(1)+1)\left(\frac{-1}{\cos 0+\sqrt{1+\sin 0}}\right) = \frac{-1}{2}$$

Donc on en déduit que la fonction f n'est pas du tout continue en zéro.

■ $$\lim_{x\to0^+} g(x) = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{\sin x-\tan x}{\sqrt{x}}\right)$$

$$= \lim_{x\to0^+}\left(\sqrt{x}\left(\frac{\sin x}{x}\right)-\sqrt{x}\left(\frac{\tan x}{x}\right)\right)$$

$$= \left(\sqrt{0}\times1-\sqrt{0}\times1\right) = 0$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

■ $$\lim_{x\to0^-} g(x) = \lim_{x\to0^+}\left(x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{\substack{t\to-\infty\\ t=\frac{1}{x}}} \frac{\sin t}{t}$$

$$= 0 \;\; ; \;\; car \quad \left|\frac{\sin t}{t}\right| \leq \frac{1}{t} \to 0$$

Donc on en déduit que la fonction f est continue en zéro.

Solution N° 19 :

■ $$\lim_{x\to1^-} g(x) = \lim_{x\to1^-}\left(\frac{x^3-1}{\sqrt[3]{x}+x-2}\right)$$

$$= \lim_{x\to1^-}\left(\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}+x-2}\right)\left(\frac{x^2+x+1}{1}\right)$$

$$= \lim_{x\to1^-}\left(\frac{x-1}{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)+(x-1)}\right)\left(\frac{x^2+x+1}{1}\right)$$

$$= \lim_{x\to1^-}\left(\frac{(x-1)}{(x-1)\left(\left(\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}\right)+1\right)}\right)\left(\frac{x^2+x+1}{1}\right)$$

$$= \lim_{x\to1^-}\left(\frac{1}{\left(\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}\right)+1}\right)\left(\frac{x^2+x+1}{1}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\frac{1}{3}+1}\right)\left(\frac{1^2+1+1}{1}\right) = \frac{9}{4}$$

$$Car \;\; : \;\; \lim_{x\to1^+}\left(\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}\right)\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}\right)$$

$$= \lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to1^+}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt[3]{1^2}+\sqrt[3]{1}+1}\right) = \frac{1}{3}$$

$$Ou \;\; Encore : \quad \lim_{x\to1^+}\left(\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}\right) = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)'_{/x=1} = \frac{1}{3}$$

■ $$\lim_{x\to1^+} g(x) = \lim_{x\to1^+}\left(\frac{ax^2-ax}{x^2-5x+4}\right)$$

$$= \lim_{x\to1^+}\frac{(ax)(x-1)}{(x-1)(x-4)} = \lim_{x\to1^+}\left(\frac{ax}{x-4}\right) = \frac{-a}{3}$$

Pour que la fonction f soit continue en 1, il suffirait de vérifier la condition :

$$\lim_{x\to1^-} g(x) = \lim_{x\to1^+} g(x)$$

$$C-\text{à}-d \quad \frac{9}{4} = \frac{-a}{3} \quad donc \quad a = \frac{-27}{4}$$

Solution N° 20 :

■ $$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0}\left(\frac{\sqrt{3+\cos x}-2}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to0}\left(\frac{\sqrt{3+\cos x}-2}{x^2}\right)\left(\frac{\sqrt{3+\cos x}+2}{\sqrt{3+\cos x}+2}\right)$$

$$= \lim_{x\to0}\left(\frac{3+\cos x-4}{x^2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3+\cos x}+2}\right)$$

$$= \lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{3+\cos x}+2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{3+\cos 0}+2}\right) = \frac{-1}{8} = f(0)$$

Donc la fonction f est continue en zéro

Solution N° 21 :

■ $$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0}\left(\frac{cos^3x-1}{sin^2x}\right)$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{(\cos x-1)(cos^2x+\cos x+1)}{1-cos^2x}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{(\cos x-1)(cos^2x+\cos x+1)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to0}\left(\frac{cos^2x+\cos x+1}{1+\cos x}\right) = \frac{-3}{2}$$

Donc pour que la fonction f soit continue en zéro, il suffirait de prendre.

$$a = \frac{-3}{2}$$

Solution N° 22 :

■ $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sqrt{\sin x}-1}{x-\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sqrt{\sin x}-1}{x-\frac{\pi}{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{\sin x}+1}{\sqrt{\sin x}+1}\right)$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x-1}{x-\frac{\pi}{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\sin x}+1}\right)$$

$$= \lim_{\substack{t\to0\\ t=x-\frac{\pi}{2}}}\left(\frac{\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)-1}{t}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)+1}}\right)$$

$$= \lim_{t\to0}\left(\frac{\cos t-1}{t}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\cos t}+1}\right)$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= \lim_{t\to0}\left(\frac{\cos t-1}{t}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\cos t}+1}\right)\left(\frac{t}{t}\right)$$

$$= \lim_{t\to0}\left(\frac{1-\cos t}{t^2}\right)\left(\frac{-t}{\sqrt{\cos t}+1}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-0}{\sqrt{\cos 0}+1}\right) = 0$$

Donc pour que la fonction f soit continue en zéro, il suffirait de prendre pour a la valeur 0.

Solution N° 23 :

■ $$\lim_{x\to0} g(x) = \lim_{x\to0}\left(\frac{x^2+\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to0}\left(x+\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to0}\left(\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to0}\left(\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}{x}\right)\left(\frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{a}}\right)$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{x+a-a}{\sqrt{x+a}+\sqrt{a}}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{a}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{0+a}+\sqrt{a}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{a}} = f(0)$$

On peut suivre une deuxième méthode pour le calcul de cette limite en utilisant la technique du nombre dérivé.

■ $$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{\frac{x+a}{x^2}}-\sqrt{\frac{a}{x^2}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}}-\sqrt{\frac{a}{x^2}}\right)$$

$$= \left(+\infty+\sqrt{0^+ + 0^+}-\sqrt{0^+}\right) = +\infty$$

Solution N° 24 :

■ $\lim_{x\to0} g(x) = \lim_{x\to0}\left(\frac{x+\tan(2x)}{\sin(3x)}\right)$

$$= \lim_{x\to0}\left(\frac{x}{3x}\right)\left(\frac{1+\frac{2\tan(2x)}{2x}}{\frac{\sin(3x)}{3x}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1+2\times1}{1}\right) = 1 = f(0)$$

Donc g est bien continue en zéro.

Solution N° 25 :

■ $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{x^2-3}{2x-1}\right) = 3$

■ $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-}(3-x^2) = 3$

Donc f est continue en zéro.

Solution N° 26 :

■ $\lim_{x\to1^\pm} g(x) = \lim_{x\to1^\pm}\left(\frac{x^2-1}{|x-1|}\right)$

$$= \lim_{x\to1^\pm}\frac{(x-1)(x+1)}{|x-1|} = \lim_{x\to1^\pm} \pm(x+1) = \pm2$$

Ainsi la fonction g n'est pas continue en 1 car les limites à droite et à gauche en 1 sont différentes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Solution N° 27 :

■ $f(x) = \frac{|x^2-5|-4}{\sqrt{x}-1}$; $a = \sqrt{5}$

On peut réécrire la fonction f ainsi :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{\sqrt{x}-1} & ; \quad x \geq \sqrt{5} \\ \frac{-x^2+1}{\sqrt{x}-1} & ; \quad x \leq \sqrt{5} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}\left(\frac{-x^2+1}{\sqrt{x}-1}\right)$$

$$= \lim_{x\to1^+}\frac{-(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)} = -2$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-}\left(\frac{-x^2+1}{\sqrt{x}-1}\right) = -2$$

Ainsi la fonction f est continue en $a = 1$

■ $f(x) = \frac{|x^2-5|-4}{\sqrt{x}-1}$; $a = \sqrt{5}$

On peut réécrire la fonction f ainsi :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{\sqrt{x}-1} & ; \quad x \geq \sqrt{5} \\ \frac{-x^2+1}{\sqrt{x}-1} & ; \quad x \leq \sqrt{5} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\sqrt{5}^+} f(x) = \lim_{x\to\sqrt{5}^+}\left(\frac{x^2-9}{\sqrt{x}-1}\right) = \frac{-4}{\sqrt{5}-1}$$

$$\lim_{x\to\sqrt{5}^-} f(x) = \lim_{x\to\sqrt{5}^-}\left(\frac{-x^2+1}{\sqrt{x}-1}\right) = \frac{-4}{\sqrt{5}-1}$$

Remarque : On peut utiliser l'expression de f sans distinguer les cas à droite ou à gauche :

$$\lim_{x\to\sqrt{5}} f(x) = \lim_{x\to\sqrt{5}} \left(\frac{|x^2-5|-4}{\sqrt{5}-1}\right) = \frac{-4}{\sqrt{5}-1}$$

D'où f est continue en $\sqrt{5}$.

■ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x^2-5|-4}{\sqrt{x}-1} & ; \quad x \neq 2 \\ 18 & ; \quad x = 2 \end{cases}$; $a = 2$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\left(\frac{x^3-8}{\sqrt{x^2+5}-3}\right)$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x^3-8)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{\left(\sqrt{x^2+5}-3\right)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x^3-8)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{(x^2+5)-9}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x^3-8)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{x^2-4}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x^2+2x+4)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{(x+2)}$$

$$= \frac{(2^2+4+4)\left(\sqrt{2^2+5}+3\right)}{(2+2)} = 18 = f(2)$$

Ainsi la fonction f est continue en $a = 2$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Solution N° 28 :

■ $g(x) = \begin{cases} (x^2-9)\cdot \sin\left(\dfrac{1}{x-3}\right) & ; \quad x \neq 3 \\ 0 & ; \quad x = 3 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 3^{\pm}} g(x) = \lim_{x\to 3^{\pm}} \left((x^2-9)\cdot \sin\left(\frac{1}{x-3}\right)\right)$$

$$= \lim_{x\to 3^{\pm}} \left(\frac{\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)}{\left(\frac{1}{x-3}\right)\left(\frac{1}{x-3}\right)}\right)$$

$$= \lim_{\substack{t\to 0^{\pm} \\ t=\frac{1}{x-1}}} \left(\frac{\sin t}{t}\right) \times t = 1 \times 0 = 0 = g(3)$$

Donc la fonction g est continue en $a = 3$

■ $g(x) = \begin{cases} \dfrac{(1-\tan x)^2}{1+\cos(4x)} & ; \quad x \neq \dfrac{\pi}{4} \\ \dfrac{1}{2} & ; \quad x = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} g(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(\frac{(1-\tan x)^2}{1+\cos(4x)}\right)$$

$$= \lim_{\substack{t\to 0 \\ t=\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}} \left(\frac{\left(1-\tan\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right)^2}{1+\cos(4t+\pi)}\right)$$

$$= \lim_{t\to 0} \left(\frac{\left(1-\frac{1+\tan t}{1-\tan t}\right)^2}{1-\cos(4t)}\right)$$

$$= \lim_{t\to 0} \left(\frac{-2\tan t}{1-\tan t}\right)^2 \left(\frac{1}{1-\cos(4t)}\right)$$

$$= \lim_{t\to 0} \left(\frac{-2\tan t}{1-\tan t}\right)^2 \left(\frac{1}{1-\cos(4t)}\right)\left(\frac{16t^2}{16t^2}\right)$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{1-\tan t}\right)^2\left(\frac{1}{\left(\frac{1-\cos(4t)}{(4t)^2}\right)}\right)\frac{1}{4}\left(\frac{\tan t}{t}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{1-\tan 0}\right)^2 \times \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)}\right) \times \frac{1}{4} \times (1)^2 = \frac{1}{2} = g\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Donc la fonction g est continue en $\frac{\pi}{4}$

Solution N° 29 :

1) $$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{|x-1|x}{x^2-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{(x-1)x}{x^2-1}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{|x-1|x}{x^2-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{-(x-1)x}{x^2-1}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \left(\frac{-x}{x+1}\right) = \frac{-1}{2}$$

$$Donc \quad \lim_{x\to 1} \frac{|x-1|x}{x^2-1} = n'existe\ pas$$

C'est-à-dire que la fonction n'est pas continue en 1.

2) On remplace directement x par -1 parce que l'image de -1 est bien définie

$$\lim_{x\to -1} \frac{(x+1)^2}{|x^2-1|} = \frac{(-1+1)^2}{|(-1)^2-1|} = 0$$

Donc f est continue en -1

3) $$\lim_{\substack{x\to \pi\\ x>\pi}} f(x) = \lim_{\substack{x\to \pi\\ x>\pi}} \sin x = 0$$

$$Et \quad \lim_{\substack{x\to \pi\\ x<\pi}} f(x) = \lim_{\substack{x\to \pi\\ x<\pi}} \cos x = -1$$

$$Comme \quad \lim_{x\to \pi^+} f(x) \neq \lim_{x\to \pi^-} f(x)$$

Alors f n'est pas continue en π

4) $$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\frac{x^2-2x}{x+2}\right) = 0$$

$$Et \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} E(x) = 0$$

$$Comme \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 = f(0)$$

Donc f est bien continue en 0

Solution N° 30 :

1) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x^2}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{-1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = +\infty$$

2) $$\lim_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+1}\right) = \frac{1}{0^-} - 1 = -\infty$$

3) $$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{x} + 2 + \sin\frac{1}{x}\right) = 0 + 2 + \sin 0 = 2$$

4) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{1-x+x^2}}{x^3}$

$$= \lim_{x\to 0^-} \sqrt{1-x+x^2} \times \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$= 1 \times \left(\frac{1}{0^-}\right)^3 = 1\times(-\infty) = -\infty$$

5) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x}}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x^2+1) \times \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$$= 1 \times \frac{1}{\sqrt{0^+}} = 1\times(+\infty) = +\infty$$

6) $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\dfrac{2}{x} - 1 + \cos\left(\dfrac{2}{x}\right)\right)$

$$\left|\cos\left(\frac{2}{x}\right)\right| < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < \cos\left(\frac{2}{x}\right) < 1$$

$$\Rightarrow \quad -2 < \cos\left(\frac{2}{x}\right) - 1 < 0$$

$$\Rightarrow \quad -1 + \cos\left(\frac{2}{x}\right) < 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{2}{x} - 1 + \cos\left(\frac{2}{x}\right)\right) < \frac{2}{x} \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} -\infty$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{2}{x} - 1 + \cos\left(\frac{2}{x}\right)\right) = -\infty$$

Solution N° 31 :

1) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3}{(x+1)^2} = \lim\limits_{\substack{t\to 0^\pm \\ t=x+1}} \left(\dfrac{3}{t^2}\right) = \dfrac{3}{(0^\pm)^2} = +\infty$

2) $\lim\limits_{x\to -1} \left(\dfrac{tan^2 x + 1}{(x+1)^2}\right) = \lim\limits_{\substack{t\to 0 \\ t=x+1}} \dfrac{tan^2(t-1)+1}{t^2}$

$$= \left(tan^2(-1)\right) \times \frac{1}{(0^\pm)^2} = positif \times (+\infty)$$

$$= +\infty$$

3) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^3-1}{(x-1)^3} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)^3}$

$$= \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1^+} (x^2+x+1) \times \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$= 3 \times \lim_{\substack{t\to 0^- \\ t=x-1}} \left(\frac{1}{t^2}\right)$$

$$= 3 \times \left(\frac{1}{0^-}\right)^2 = 3\times(+\infty) = +\infty$$

4) $\lim\limits_{x\to 2^-} \left(\dfrac{1}{x-2} - \left|\sin\left(\dfrac{2}{(x-2)^2}\right)\right|\right)$

$$= \lim_{\substack{t\to 0^- \\ t=x-2}} \left(\frac{1}{t} - \left|\sin\left(\frac{2}{t^2}\right)\right|\right)$$

$On\ \ a \quad -\left|\sin\left(\dfrac{2}{t^2}\right)\right| < 0$

$Alors \quad \dfrac{1}{t} - \left|\sin\left(\dfrac{2}{t^2}\right)\right| < \dfrac{1}{t} \underset{t\to 0^-}{\longrightarrow} -\infty$

$D'où \quad \lim\limits_{t\to 0^-} \left(\dfrac{1}{t} - \left|\sin\left(\dfrac{2}{t^2}\right)\right|\right) = -\infty$

5) $\lim\limits_{x\to 1^-} \left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\dfrac{1}{(x-1)^{2019}}\right)$

$$= \lim_{x\to 1^-} \left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \times \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(x-1)^{2019}}$$

$$= 2 \times \lim_{\substack{t\to 0^- \\ t=x-1}} \frac{1}{t^{2019}} = 2\times(-\infty) = -\infty$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

6) $\lim\limits_{x\to(-4)^-} \dfrac{E(x)}{(x+4)^3} = \lim\limits_{\substack{t\to 0^- \\ t=x+4}} \dfrac{E(t-4)}{t^3}$

$$= \frac{-4}{0^-} = +\infty$$

Solution N° 32 :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2-\dfrac{1}{x}\right)\left(\dfrac{3}{\sqrt{x}}-1\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)\times\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{\sqrt{x}}-1\right) = 2(-1) = -2$$

2) Première méthode : l'utilisation du nombre dérivé.

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos x - 1}{x}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{\cos x - \cos 0}{x-0}\right)$$

$$= (\cos x)'_{/x=0} = (-\sin x)_{/x=0} = 0$$

Deuxième Méthode :

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos x}{x}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos x}{x}\right)\times\frac{x}{x}$$

$$= \lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)\times\left(\frac{x}{1}\right) = \frac{1}{2}\times 0 = 0$$

3) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x})^2-1^2}$

$$= \lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2(2+\sin x) = +\infty$

Car on a : $-1 \le \sin x \le 1$

$$\Rightarrow x^2 \le x^2(2+\sin x) \le 3x^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{x^2}_{\substack{tend\ vers\ +\infty \\ quand\ x\to-\infty}} \le x^2(2+\sin x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} x^2(2+\sin x) = +\infty$$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x^2-1}{3x^2+4}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x^2}{3x^2}\right) = \dfrac{5}{3}$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-1+\cos x\right) = +\infty$

car on a : $-1 \le \cos x \le 1$

$$\Rightarrow \sqrt{x}-2 \le (\sqrt{x}-1+\cos x) \le \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sqrt{x}-2}_{\substack{tend\ vers\ +\infty \\ quand\ x\to+\infty}} \le (\sqrt{x}-1+\cos x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x}-1+\cos x) = +\infty$$

Solution N° 33 :

1) *On a* : $-1 \le \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \le 1$; $\forall x \ne 0$

$$\Rightarrow -\underbrace{(x^2+x^4)}_{\to0} \le (x^2+x^4)\sin\left(\frac{1}{x}\right) \le \underbrace{(x^2+x^4)}_{\to0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to0}(x^2+x^4)\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

2) *On a* : $x \le E(x) < x+1$

$$\Rightarrow 1 \le \frac{E(x)}{x} \le 1+\frac{1}{x} \ ; \ \forall x > 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{E(x)}{x} = 1$$

3) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \frac{(1+0^+)}{\sqrt{1+0^+}} = 1^+ = 1$$

4) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{|\sin x|}{\sqrt{1+x^2}} = 0$$

$car \quad on \quad a \quad : \quad |\sin x| \leq 1$

$$\Rightarrow \frac{|\sin x|}{\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{0}_{\substack{tend\ vers\ 0\\ quand\ x\to+\infty}} \leq \frac{|\sin x|}{\sqrt{1+x^2}} \leq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}_{\substack{tend\ vers\ 0\\ quand\ x\to+\infty}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{|\sin x|}{\sqrt{1+x^2}} = 0$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Solution N° 34 :

1) $On \quad a \quad : \quad -1 \leq \cos x \leq 1$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{-1}{x^2+1}}_{\substack{tend\ vers\ 0\\ quand\ x\to+\infty}} \leq \frac{\cos x}{x^2+1} \leq \underbrace{\frac{1}{x^2+1}}_{\substack{tend\ vers\ 0\\ quand\ x\to+\infty}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\cos x}{x^2+1}\right) = 0$$

2) $$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+\sin x}{x^2+\cos x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{\sin x}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{\cos x}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\frac{1}{x}+\frac{\sin x}{x^2}}{1+\frac{\cos x}{x^2}}\right) = \frac{0^+ + 0}{1+0} = 0^+ = 0$$

$$pourquoi \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x^2} = 0 \quad ?$$

$Car \quad -1 \leq \sin x \leq 1 \quad et \quad -1 \leq \cos x \leq 1$

$$\Rightarrow \frac{-1}{x^2} \leq \frac{\sin x}{x^2} \leq \frac{-1}{x^2} \quad et \quad \frac{-1}{x^2} \leq \frac{\cos x}{x^2} \leq \frac{-1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\sin x}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\cos x}{x^2}\right) = 0$$

3) $$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x+\cos x}{3x+\sin x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(2+\frac{\cos x}{x}\right)}{x\left(2+\frac{\sin x}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2+\frac{\cos x}{x}}{2+\frac{\sin x}{x}}\right) = \frac{2+0}{3+0} = \frac{2}{3}$$

$$Pourquoi \quad \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\cos x}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right) = 0$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$car \; : \; \left| \begin{array}{l} \underbrace{\frac{-1}{x}}_{\substack{tend\ \ vers\ 0 \\ quand\ \ x\to+\infty}} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \underbrace{\frac{1}{x}}_{\substack{tend\ \ vers\ 0 \\ quand\ \ x\to+\infty}} \\ \underbrace{\frac{-1}{x}}_{\substack{tend\ \ vers\ 0 \\ quand\ \ x\to+\infty}} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \underbrace{\frac{1}{x}}_{\substack{tend\ \ vers\ 0 \\ quand\ \ x\to+\infty}} \end{array} \right.$$

4) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{E(\sqrt{x})}{x} = 0^+$

$$Car \;:\; \sqrt{x} \leq E(\sqrt{x}) < \sqrt{x}+1$$

$$Ainsi \;:\; \frac{\sqrt{x}}{x} \leq \frac{E(\sqrt{x})}{x} < \frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{1}{x}$$

$$c-\text{à}-d \quad \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{\substack{tend\ \ vers\ 0^+ \\ quand\ \ x\to+\infty}} \leq \frac{E(\sqrt{x})}{x} < \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}}_{\substack{tend\ \ vers\ 0^+ \\ quand\ \ x\to+\infty}}$$

5) $\displaystyle \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{\sin x}{x^2+1}\right) = 0$

$$Car\ On\ a \;:\; -1 \leq \sin x \leq 1$$

$$Alors \;:\; \underbrace{\frac{-1}{x^2+1}}_{\substack{tend\ \ vers\ 0 \\ quand\ \ x\to-\infty}} \leq \frac{\sin x}{x^2+1} \leq \underbrace{\frac{1}{x^2+1}}_{\substack{tend\ \ vers\ 0 \\ quand\ \ x\to-\infty}}$$

6) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2-\cos x}{1+\sqrt{x}}\right) = 0$

$$Car\ On\ a \;:\; -1 \leq \cos x \leq 1$$

$$\Longrightarrow\ 1 \leq 2-\cos x \leq 3$$

$$C-\text{à}-d \quad \underbrace{\frac{1}{1+\sqrt{x}}}_{\substack{tend\ \ vers\ 0^+ \\ quand\ \ x\to+\infty}} \leq \frac{2-\cos x}{1+\sqrt{x}} \leq \underbrace{\frac{3}{1+\sqrt{x}}}_{\substack{tend\ \ vers\ 0^+ \\ quand\ \ x\to+\infty}}$$

Solution N° 35 :

1) $\displaystyle \lim_{x\to0}\left(x^2+x+\frac{1}{x^2}\right) = 0+0+\frac{1}{(0^{\pm})^2} = \frac{1}{0^+}$

$$= +\infty$$

2) $\displaystyle \lim_{x\to1^+} \frac{x^3+1}{(x-1)^3} = \lim_{\substack{t\to0^+ \\ t=x-1}} \frac{(t+1)^3+1}{t^3}$

$$= \lim_{t\to0^+} \left(\left(\frac{t+1}{t}\right)^3 + \left(\frac{1}{t}\right)^3\right)$$

$$= \lim_{t\to0^+} \left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^3 + \left(\frac{1}{t}\right)^3\right)$$

$$= \lim_{\substack{u\to+\infty \\ u=\frac{1}{t}}} \left((1+u)^3+u^3\right) = +\infty$$

3) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+1}{(x-1)^3} = \lim_{\substack{t\to+\infty \\ t=x-1}} \frac{(t+1)^3+1}{t^3}$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left(\left(\frac{t+1}{t}\right)^3 + \left(\frac{1}{t}\right)^3\right)$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^3 + \left(\frac{1}{t}\right)^3\right)$$

$$= \lim_{\substack{u\to0^+ \\ u=\frac{1}{t}}} \left((1+u)^3+u^3\right) = 1$$

4) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x}+x^2\right) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1+\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right) = (+\infty)(1+0) = +\infty$$

5) $\displaystyle \lim_{x\to-\infty} \left(x^3-x^2+x+1\right)$

$$= \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)$$

$$= (-\infty)(1 - 0 + 0 + 0) = -\infty$$

On a souvent l'habitude d'écrire :

$$\lim_{x\to-\infty} (x^3 - x^2 + x + 1) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

6) $$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1 + \frac{1}{x}}{x^2 + 2}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x^2 + 2}\right)\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{+\infty}\right)\left(1 + \frac{1}{+\infty}\right) = 0(1 + 0) = 0$$

Solution N° 36 :

1) $$\lim_{x\to+\infty} (-3x^2 + x + 1)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} (-3x^2)\left(1 - \frac{1}{3x} - \frac{1}{3x^2}\right)$$

$$= (-\infty)(1 - 0 - 0) = -\infty$$

On a souvent l'habitude d'écrire :

$$\lim_{x\to+\infty} (-3x^2 + x + 1) = \lim_{x\to+\infty} -3x^2 = -\infty$$

2) $$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{3x + 5}{x^2 + 1}\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{3x}{x^2}\right)\left(\frac{1 + \frac{5}{3x}}{1 + \frac{1}{x^2}}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{3}{x}\right)\left(\frac{1 + \frac{5}{3x}}{1 + \frac{1}{x^2}}\right) = (0^-)\left(\frac{1 + 0}{1 + 0}\right) = 0$$

On peut écrire directement :

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{3x + 5}{x^2 + 1}\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{3x}{x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{3}{x}\right) = 0$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

3) $$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2 - 4x}{2x^2 + 1}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{2x^2}\right) = \frac{1}{2}$$

4) $$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2 - 7}{x^3 + 2x + 1}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{x^3}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

5) $$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^3 + 3}\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^3}{x^3}\right) = 1$$

6) $$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^4 + x^2 + 1}{x - 1}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^4}{x}\right) = +\infty$$

Solution N° 37 :

1) $$\lim_{x\to-\infty} (3x^2 - x + 4)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} (3x^2)\left(1 - \frac{1}{3x} + \frac{4}{x^2}\right)$$

$$= (+\infty)(1 - 0 + 0) = +\infty$$

On peut écrire directement :

$$\lim_{x\to-\infty} (3x^2 - x + 4) = \lim_{x\to-\infty} (3x^2) = +\infty$$

1) $$\lim_{x\to0^-} \sqrt{3 - \frac{1}{x}} = \sqrt{3 - \frac{1}{0^-}} = \sqrt{3 + \infty} = +\infty$$

3) $$\lim_{x\to1} \left(\frac{\sqrt{2x - 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}}{\sqrt{x} - 1}\right)$$

$$= \lim_{x\to1} \left(\frac{\sqrt{2x - 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}}{\sqrt{x} - 1}\right)$$

$$\times \frac{\left(\sqrt{2x - 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}\right)}{\left(\sqrt{2x - 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}\right)}$$

$$= \lim_{x\to1}\left(\frac{\left(\sqrt{2x-1}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-x+1}\right)^2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)\right)}\right)$$

$$= \lim_{x\to1}\left(\frac{(2x-1)-(x^2-x+1)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)\right)}\right)$$

$$= \lim_{x\to1}\left(\frac{-x^2+3x-2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)\right)}\right)$$

$$= \lim_{x\to1}\frac{(-x^2+3x-2)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to1}\frac{(-x^2+3x-2)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)\right)(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to1}\left(\frac{-x^2+3x-2}{x-1}\right)\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2-x+1}}\right)$$

$$= \lim_{x\to1}(-x+2)\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2-x+1}}\right)$$

$$= (-1+2)\left(\frac{\sqrt{1}+1}{\sqrt{2-1}+\sqrt{1-1+1}}\right) = 1$$

4) $$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2}{x}\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right)} = (+\infty)\sqrt{\frac{1+0}{1-0}} = +\infty$$

5) $$\lim_{x\to1}\left(\frac{x^3+2x-3}{x^2+2x-3}\right)$$

$$= \lim_{x\to1}\left(x-2+\frac{9(x-1)}{x^2+2x-3}\right)$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= \lim_{x\to1}\left(x-2+\frac{9(x-1)}{(x+3)(x-1)}\right)$$

$$= \lim_{x\to1}\left(x-2+\frac{9}{(x+3)}\right) = \frac{5}{4}$$

6) $$\lim_{x\to9}\left(\frac{\sqrt{x+7}-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+16}-\sqrt{x}-2}\right)$$

$$= \lim_{x\to9}\left(\frac{\sqrt{x+7}-\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x+16}-\left(\sqrt{x}+2\right)}\right)\left(\frac{\sqrt{x+7}+\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x+7}+\left(\sqrt{x}+1\right)}\right)$$

$$= \lim_{x\to9}\left(\frac{\left(\sqrt{x+7}\right)^2-\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\left(\sqrt{x+16}-\left(\sqrt{x}+2\right)\right)\left(\sqrt{x+7}+\left(\sqrt{x}+1\right)\right)}\right)$$

$$= \lim_{x\to9}\left(\frac{(x+7)-\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\left(\sqrt{x+16}-\left(\sqrt{x}+2\right)\right)\left(\sqrt{x+7}+\left(\sqrt{x}+1\right)\right)}\right)$$

$$= \lim_{x\to9}\left(\frac{6-2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x+16}-\left(\sqrt{x}+2\right)\right)\left(\sqrt{x+7}+\left(\sqrt{x}+1\right)\right)}\right)$$

$$= \lim_{x\to9}\left(\frac{\left(6-2\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+16}+\left(\sqrt{x}+2\right)\right)}{\left(\sqrt{x+16}-\left(\sqrt{x}+2\right)\right)\left(\sqrt{x+7}+\left(\sqrt{x}+1\right)\right)}\right) \times \frac{1}{\sqrt{x+16}-\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$= \lim_{x\to9}\frac{\left(6-2\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+16}+\left(\sqrt{x}+2\right)\right)}{\left(\left(\sqrt{x+16}\right)^2-\left(\sqrt{x}+2\right)^2\right)\left(\sqrt{x+7}+\left(\sqrt{x}+1\right)\right)}$$

$$= \lim_{x\to9}\frac{\left(6-2\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+16}+\left(\sqrt{x}+2\right)\right)}{\left(12-4\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+7}+\left(\sqrt{x}+1\right)\right)}$$

$$= \lim_{x\to9}\frac{2\left(3-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+16}+\left(\sqrt{x}+2\right)\right)}{4\left(3-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+7}+\left(\sqrt{x}+1\right)\right)}$$

$$= \lim_{x\to 9} \frac{2\left(\sqrt{x+16}+\left(\sqrt{x}+2\right)\right)}{4\left(\sqrt{x+7}+\left(\sqrt{x}+1\right)\right)}$$

$$= \frac{2\left(\sqrt{9+16}+\left(\sqrt{9}+2\right)\right)}{4\left(\sqrt{9+7}+\left(\sqrt{9}+1\right)\right)} = \frac{5}{8}$$

Solution N° 38 :

1) $$\lim_{x\to(-1)^+}\left(\frac{x+1}{|2x+3|-1}\right)$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0^+\\ t=x+1}}\left(\frac{t}{|2t+1|-1}\right)$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{t}{2t+1-1}\right) = \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

2) $$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-2x}{x-\sqrt{x+2}}\right) = \lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)\left(x+\sqrt{x+2}\right)}{x^2-(x+2)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)\left(x+\sqrt{x+2}\right)}{(x+1)(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{x\left(x+\sqrt{x+2}\right)}{(x+1)}$$

$$= \frac{2\left(2+\sqrt{2+2}\right)}{(2+1)} = \frac{8}{3}$$

3) $$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{1+2x}}{\sqrt{1-x}}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1^-}\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{1+2x}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{1+2x}\right)}{\left(\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{1+2x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1^-}\frac{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-\left(\sqrt{1+2x}\right)^2}{\left(\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{1+2x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1^-}\frac{(x+2)-(1+2x)}{\left(\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{1+2x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1^-}\frac{1-x}{\left(\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{1+2x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1^-}\frac{\left(\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1-x}\right)}{\left(\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{1+2x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{1-x}}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{1+2x}\right)} = \frac{0}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} = 0$$

4) $$\lim_{x\to(-1)^-}\left(\frac{\sqrt{x^2+x}+3x+3}{x+1}\right)$$

$$= \lim_{\substack{t\to 0^-\\ t=x+1}}\frac{\sqrt{(t-1)^2+(t-1)}+3(t-1)+3}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0^-}\frac{\sqrt{t^2-t}+3t}{t} = \lim_{t\to 0^-}\frac{\sqrt{t^2\left(1-\frac{1}{t}\right)}}{t}+3$$

$$= \lim_{t\to 0^-}\frac{\sqrt{t^2}\times\sqrt{\left(1-\frac{1}{t}\right)}}{t}+3$$

$$= \lim_{t\to 0^-}\frac{|t|\times\sqrt{\left(1-\frac{1}{t}\right)}}{t}+3$$

$$= \lim_{t\to 0^-}\frac{-t\times\sqrt{\left(1-\frac{1}{t}\right)}}{t}+3$$

$$= \lim_{t\to 0^-} -\sqrt{\left(1-\frac{1}{t}\right)}+3$$

$$= -\sqrt{\left(1-\frac{1}{0^-}\right)}+3 = -\infty$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

5) $$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x+\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2+x+1}-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(x+\sqrt{x^2+x}\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x^2+x+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(x+\sqrt{x^2+x}\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2-1^2}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(x+\sqrt{x^2+x}\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}{x^2+x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x+\sqrt{x^2+x}}{x^2+x}\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+x}}\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)$$

$$=\left(\frac{1}{0+1}+\frac{1}{0^+}\right)\left(\sqrt{0^2+0+1}+1\right)$$

$$=(+\infty)\times 2=+\infty$$

6) $$\lim_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt{x+1}-x^2+x+4}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x}+1}\right)$$

D'abord pour en avoir une idée sur la valeur de cette limite, On applique dans le brouillon la règle de l'Hôpital juste pour avoir la valeur numérique de la limite en question. En suite d'essayer de la rechercher par une méthode reconnue par le programme officiel pour rédiger la réponse.

La substitution directe donne la forme indéterminée zéro/zéro Donc on peut appliquer la règle de l'hôpital :

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt{x+1}-x^2+x+4}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x}+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to 3}\left(\frac{\frac{1}{2}(x+1)^{\frac{-1}{2}}-2x+1}{\frac{1}{2}(x+1)^{\frac{-1}{2}}-\frac{1}{2}(3x)^{\frac{-1}{2}}\cdot 3}\right)$$

$$=\left(\frac{\frac{1}{2}(3+1)^{\frac{-1}{2}}-6+1}{\frac{1}{2}(3+1)^{\frac{-1}{2}}-\frac{1}{2}(9)^{\frac{-1}{2}}\cdot 3}\right)$$

$$=\left(\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}-6+1}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times 3}\right)=19$$

Cherchons maintenant une méthode légale pour retrouver 19 . Et pour ce faire on adoptera la technique de multiplication par la quantité conjuguée :

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt{x+1}-x^2+x+4}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x}+1}\right)$$

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt{x+1}-(x^2-x-4)}{\sqrt{x+1}-\left(\sqrt{3x}-1\right)}\right)$$

$$\times\left(\frac{\sqrt{x+1}+\left(\sqrt{3x}-1\right)}{\sqrt{x+1}+\left(\sqrt{3x}-1\right)}\right)$$

$$\times\left(\frac{\sqrt{x+1}+(x^2-x-4)}{\sqrt{x+1}+(x^2-x-4)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\left((x+1)-(x^2-x-4)^2\right)\left(\sqrt{x+1}+\left(\sqrt{3x}-1\right)\right)}{\left((x+1)-\left(\sqrt{3x}-1\right)^2\right)\left(\sqrt{x+1}+x^2-x-4\right)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{1}{2}\left(\frac{-7x-15-x^4+2x^3+7x^2}{\sqrt{3x}-x}\right)\left(\frac{\sqrt{x+1}+\left(\sqrt{3x}-1\right)}{\sqrt{x+1}+x^2-x-4}\right)$$

On multiplie le numérateur et le dénominateur par la quantité $\left(\sqrt{3x}+x\right)$ On obtient :

$$= \lim_{x\to 3}\frac{1}{2}\left(\frac{-x^4+2x^3+7x^2-7x-15}{-x^2+3x}\right)$$

$$\times\left(\frac{\sqrt{x+1}+\left(\sqrt{3x}-1\right)}{\sqrt{x+1}+x^2-x-4}\right)\left(\frac{\sqrt{3x}+x}{1}\right)$$

On effectue ensuite la division euclidienne du polynôme du numérateur par celle du dénominateur on trouve :

$$= \lim_{x\to 3}\frac{1}{2}\left(x^2+x-4-\frac{5}{x}\right)$$

$$\times\left(\frac{\sqrt{x+1}+\left(\sqrt{3x}-1\right)}{\sqrt{x+1}+x^2-x-4}\right)\left(\frac{\sqrt{3x}+x}{1}\right)$$

On remplace x par 3 on obtient :

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{19}{3}\right)\left(\frac{4}{4}\right)\left(\frac{6}{1}\right)=19$$

Retenez que si vous avez une fonction fraction rationnelle P(x)/Q(x) on pense directement à effectuer éventuellement la division euclidienne.

Solution N° 39 :

1) $$\lim_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(2-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$=(+\infty)(2-0)=+\infty$$

2) $$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x-7}+2x+5\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(4+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}\right)}+2x+5\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{4+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}}+2x+5\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(|x|\cdot\sqrt{4+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}}+2x+5\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\cdot\sqrt{4+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}}+2x+5\right)$$

$$=5+\lim_{x\to-\infty}\left(2x-x\sqrt{4+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}}\right)$$

$$=5+\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(2-\sqrt{4+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}}\right)\left(2+\sqrt{4+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}}\right)}{\left(2+\sqrt{4+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}}\right)}$$

$$=5+\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(4-\left(4+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}\right)\right)}{\left(2+\sqrt{4+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}}\right)}$$

$$=5+\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(-\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}{\left(2+\sqrt{4+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}}\right)}$$

$$=5+\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(-3+\frac{7}{x}\right)}{\left(2+\sqrt{4+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}}\right)}$$

$$=5+\left(\frac{(-3+0)}{\left(2+\sqrt{4+0-0}\right)}\right)=5-\frac{3}{4}=\frac{17}{4}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2-x-2}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2-x-2}\right)\times\frac{\left(\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{x^2-x-2}\right)}{\left(\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{x^2-x-2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{2x^2+1}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-x-2}\right)^2}{\sqrt{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x^2+1)-(x^2-x-2)}{\sqrt{x^2}\times\left(\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+3}{|x|\times\left(\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\left(x+1+\frac{3}{x}\right)}{x\cdot\left(\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1+\frac{3}{x}}{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}}\right)$$

$$\frac{+\infty+1+0}{\sqrt{2+0}+\sqrt{1-0-0}}=+\infty$$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{5x^2+x-1}-4x+3\right)$

$$=3+\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{5x^2+x-1}-4x\right)\times\frac{\left(\sqrt{5x^2+x-1}+4x\right)}{\left(\sqrt{5x^2+x-1}+4x\right)}$$

$$=3+\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{5x^2+x-1}\right)^2-(4x)^2}{\left(\sqrt{5x^2+x-1}+4x\right)}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$=3+\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2+x-1-16x^2}{\left(\sqrt{x^2\left(5+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}+4x\right)}$$

$$=3+\lim_{x\to+\infty}\frac{-11x^2+x-1}{\left(\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{\left(5+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}+4x\right)}$$

$$=3+\lim_{x\to+\infty}\frac{-11x^2+x-1}{\left(|x|\cdot\sqrt{\left(5+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}+4x\right)}$$

$$=3+\lim_{x\to+\infty}\frac{-11x^2+x-1}{\left(x\cdot\sqrt{\left(5+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}+4x\right)}$$

$$=3+\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\left(-11x+1-\frac{1}{x}\right)}{x\cdot\left(\sqrt{\left(5+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}+4\right)}$$

$$=3+\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-11x+1-\frac{1}{x}}{\sqrt{5+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+4}\right)$$

$$=3+\left(\frac{-\infty+1-0}{\sqrt{5+0-0}+4}\right)=-\infty$$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(x+|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(x - x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1^2-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}^{\,2}\right)}{\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1-\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(\frac{-1}{x^2}\right)}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\frac{-1}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right)$$

$$= \left(\frac{-0^-}{1+\sqrt{1+0^+}}\right) = 0^+ = 0$$

6) *Soit* $\quad l = \lim_{|x|\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x-3\right)$

On pose $|x| = t \iff x = \pm t \iff t = \pm x$

Si $x = +t$ *Alors* :

$$l = \lim_{t\to+\infty}\left(\sqrt{t^2+t+1}-t-3\right)$$

$$= -3 + \lim_{t\to+\infty}\left(\sqrt{t^2+t+1}-t\right)$$

$$= -3 + \lim_{t\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{t^2+t+1}-t\right)\left(\sqrt{t^2+t+1}+t\right)}{\left(\sqrt{t^2+t+1}+t\right)}$$

$$= -3 + \lim_{t\to+\infty}\frac{t^2+t+1-t^2}{\left(\sqrt{t^2+t+1}+t\right)}$$

$$= -3 + \lim_{t\to+\infty}\frac{t+1}{\left(\sqrt{t^2\left(1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)}+t\right)}$$

$$= -3 + \lim_{t\to+\infty}\frac{t\left(1+\frac{1}{t}\right)}{\left(\sqrt{t^2}\sqrt{\left(1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)}+t\right)}$$

$$= -3 + \lim_{t\to+\infty}\frac{t\left(1+\frac{1}{t}\right)}{\left(|t|\sqrt{\left(1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)}+t\right)}$$

$$= -3 + \lim_{t\to+\infty}\frac{t\left(1+\frac{1}{t}\right)}{\left(t\sqrt{\left(1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)}+t\right)}$$

$$= -3 + \lim_{t\to+\infty}\frac{t\left(1+\frac{1}{t}\right)}{t\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)}+1\right)}$$

$$= -3 + \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{t}}{\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}+1}\right)$$

$$-3 + \left(\frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+1}\right) = \frac{-5}{2}$$

Ça c'est pour le cas où $x = +t$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Si maintenant on ait $x = t$ Alors :

$$l = \lim_{t \to +\infty} \left(\sqrt{t^2 - t + 1} + t - 3 \right)$$

$$= \sqrt{+\infty} + \infty - 3 = +\infty$$

Donc l n'existe pas car la limite si elle existe elle est unique.

Solution N° 40 :

1) $$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^3 + 3x^2 + 4} - x^2 + 2 \right) \times \frac{\left(\sqrt{x^3 + 3x^2 + 4} + (x^2 - 2) \right)}{\left(\sqrt{x^3 + 3x^2 + 4} + (x^2 - 2) \right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\left(\sqrt{x^3 + 3x^2 + 4} \right)^2 \right) - (x^2 - 2)^2}{\sqrt{x^3 + 3x^2 + 4} + (x^2 - 2)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 4 - (x^2 - 2)^2}{\sqrt{x^3 + 3x^2 + 4} + (x^2 - 2)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^4 + x^3 + 7x^2}{\sqrt{x^4 \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^4} \right)} + (x^2 - 2)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^4 + x^3 + 7x^2}{x^2 \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^4}} + x^2 - 2}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{-x^2 + x + 7}{\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^4}} + 1 - \frac{2}{x^2}} \right)$$

$$= \left(\frac{-\infty}{\sqrt{0 + 0 + 0} + 1 - 0} \right) = -\infty$$

2) $$\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{3x^2 - 6x - 1} + 2x - 5 \right)$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{3x^2 - 6x - 1} + 2x - 5 \right) \times \frac{\left(\sqrt{3x^2 - 6x - 1} - (2x - 5) \right)}{\left(\sqrt{3x^2 - 6x - 1} - (2x - 5) \right)}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{(3x^2 - 6x - 1) - (2x - 5)^2}{\sqrt{3x^2 - 6x - 1} - (2x - 5)}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-x^2 + 14x - 26}{\sqrt{x^2 \left(3 - \frac{6}{x} - \frac{1}{x^2} \right)} - 2x + 5}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-x^2 + 14x - 26}{\sqrt{x^2} \sqrt{3 - \frac{6}{x} - \frac{1}{x^2}} - 2x + 5}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-x^2 + 14x - 26}{|x| \sqrt{3 - \frac{6}{x} - \frac{1}{x^2}} - 2x + 5}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-x^2 + 14x - 26}{-x \sqrt{3 - \frac{6}{x} - \frac{1}{x^2}} - 2x + 5}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-x \left(x - 14 + \frac{26}{x} \right)}{-x \left(\sqrt{3 - \frac{6}{x} - \frac{1}{x^2}} + 2 - \frac{5}{x} \right)}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x - 14 + \frac{26}{x}}{\sqrt{3 - \frac{6}{x} - \frac{1}{x^2}} + 2 - \frac{5}{x}} \right)$$

$$= \left(\frac{-\infty - 14 + 0}{\sqrt{3 - 0 - 0} + 2 - 0} \right) = -\infty$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

3) $Soit\ l = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+xm\right)\ ; m\epsilon\mathbb{R}$

$Si\ \ m=0\ \ ;\ \ l=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+xm\right)$

$$=\sqrt{+\infty}+0=+\infty$$

$Si\ \ m>0\ ;\ l=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+xm\right)$

$$=\sqrt{+\infty}+0=+\infty$$

$Si\ \ m<0\ ;\ l=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+xm\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+xm\right)\times\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-xm\right)}{\left(\sqrt{x^2+x+1}-xm\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+x+1)-x^2m^2}{\left(\sqrt{x^2+x+1}-xm\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-m^2)x^2+x+1}{\left(\sqrt{x^2+x+1}-xm\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-m^2)x^2+x+1}{\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}-xm\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-m^2)x^2+x+1}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-xm}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-m^2)x^2+x+1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-xm}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-m^2)x^2+x+1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-xm}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left((1-m^2)x+1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-m\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(1-m^2)x+1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-m}\right)$$

$Si\ \ (1-m^2)<0\ \ \ et\ \ \ m<0$
$C-\grave{a}-d\ \ \ m<-1$ Alors :

$$l=\left(\frac{(1-m^2)(+\infty)+1+0}{\sqrt{1+0+0}-m}\right)=\frac{-\infty}{1-m}=-\infty$$

$Si\ \ (1-m^2)>0\ \ \ et\ \ \ m<0$
$C-\grave{a}-d\ \ \ -1<m<0$ Alors :

$$l=\left(\frac{(1-m^2)(+\infty)+1+0}{\sqrt{1+0+0}-m}\right)=\frac{+\infty}{1-m}=+\infty$$

$Si\ \ m=-1\ \ \ Alors\ \ :$

$$l=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}\right)$$

$$=\left(\frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+1}\right)=\frac{1}{2}$$

D'après cette analyse de limites on peut finalement résumer notre travail dans le système suivant :

$$l=\begin{cases}-\infty & si\quad m<-1\\ \frac{1}{2} & si\quad m=-1\\ +\infty & si\quad m>-1\end{cases}$$

4) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1-x^3}+x-1\right)$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{(1-x)(1+x+x^2)}-(1-x)\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}(1-x)\left(\frac{\sqrt{(1-x)(1+x+x^2)}}{(1-x)}-1\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}(1-x)\left(\frac{\sqrt{(1-x)(1+x+x^2)}}{(1-x)^2}-1\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}(1-x)\left(\sqrt{\frac{1+x+x^2}{1-x}}-1\right)$$

$$= (1+\infty)\left(\sqrt{-(-\infty)}-1\right) = +\infty$$

5) $Soit \quad l = \lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{ax^2+bx+c}\right)$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{ax^2+bx+c}\right) \times \frac{\left(x-\sqrt{ax^2+bx+c}\right)}{\left(x-\sqrt{ax^2+bx+c}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-(ax^2+bx+c)}{x-\sqrt{ax^2+bx+c}}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{(1-a)x^2-bx-c}{x-\sqrt{x^2\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)}}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{(1-a)x^2-bx-c}{x-\sqrt{x^2}\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{(1-a)x^2-bx-c}{x-|x|\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}}\right)$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{(1-a)x^2-bx-c}{x+x\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left((1-a)x-b-\frac{c}{x}\right)}{x\left(1+\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{(1-a)x-b-\frac{c}{x}}{1+\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}}\right)$$

$$= \left(\frac{(1-a)(-\infty)-b-0}{1+\sqrt{a+0+0}}\right) = \frac{(1-a)(-\infty)}{1+\sqrt{a}}$$

$Si \quad a<0 \quad Alors \quad l \quad n'existe\ pas$

$Si \quad a=0 \quad Alors \quad l=-\infty$

$Si \quad 0<a<1 \quad Alors \quad l=-\infty$

$Si \quad a=1 \quad Alors \quad l=\frac{-b}{1+\sqrt{a}}=\frac{-b}{2}$

$Si \quad a>1 \quad Alors \quad l=+\infty$

Voici un résumé de cette limite :

$$l = \begin{cases} n'existe\ pas & si \quad a<0 \\ -\infty & si \quad 0\le a<1 \\ +\infty & si \quad a>1 \\ \frac{-b}{2} & si \quad a=1 \end{cases}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Solution N° 41 :

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(2x)}{2x}\right) \times \frac{1}{\left(\frac{\sin(3x)}{3x}\right)} \times \left(\frac{2x}{3x}\right)$$

$$= (1) \times \frac{1}{(1)} \times \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \left(\dfrac{\sqrt{3}\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{6}}\right) = l$

Première méthode : il suffit de remarquer que :

$$\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x\right)$$

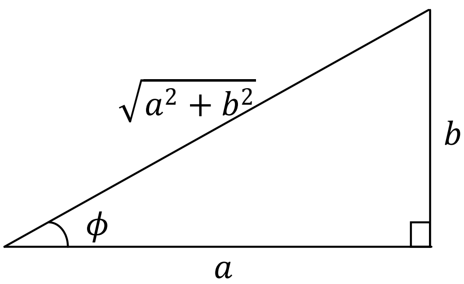
$$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos x\right)$$

$$= 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$l = \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{x - \frac{\pi}{6}} = 2 \lim_{\substack{t\to 0 \\ t = x - \frac{\pi}{6}}} \left(\frac{\sin t}{t}\right) = 2$$

La deuxième méthode consiste à appliquer la transformation trigonométrique suivante :

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\phi)$$

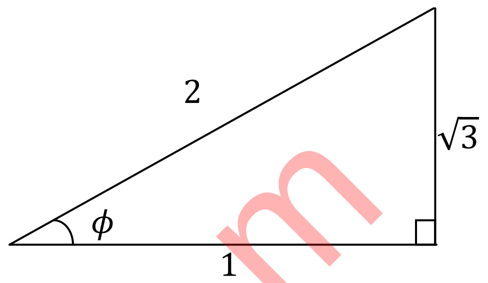


Donc $\sqrt{3}\sin x - \cos x$

$$= \sqrt{3}\sin(\pi - x) + \cos(\pi - x)$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2}\,\cos(\pi - x - \phi)$$

$$= 2\cos(\pi - x - \phi)$$



$$\cos\phi = \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \phi \equiv \pm\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$$

On retient la valeur $\phi = \dfrac{\pi}{3}$

D'où : $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2\cos\left(\pi - x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

$$= 2\cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} + x\right)$$

$$= 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{\tan x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{3x}\cdot\dfrac{1}{\left(\frac{\tan x}{x}\right)}\cdot\dfrac{3x}{x}$

$$= 1 \times \frac{1}{1} \times 3 = 3$$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(5x)}{\sin(4x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(5x)}{5x}\cdot\dfrac{1}{\left(\frac{\sin 4x}{4x}\right)}\cdot\dfrac{5x}{4x}$

$$= 1 \times \frac{1}{1} \times \frac{5}{4} = \frac{5}{4}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

5) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(\pi x)-1}{x}\right)=\lim_{\substack{t\to 0\\ t=\pi x}}\left(\frac{\cos t-1}{\frac{t}{\pi}}\right)$$

$$=\pi\lim_{t\to 0}\left(\frac{\cos t-1}{t}\right)\times\frac{1}{t}$$

$$=-\pi\lim_{t\to 0}\left(\frac{1-\cos t}{t^2}\right)\times t$$

$$=-\pi\times\frac{1}{2}\times 0=0$$

6) $$\lim_{x\to 1}\frac{\tan(x-1)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\tan(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\tan(x-1)}{(x-1)}\times\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

$$=\lim_{\substack{t\to 0\\ t=x-1}}\left(\frac{\tan t}{t}\right)\times\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

$$=1\times\left(\frac{1}{1+1}\right)=\frac{1}{2}$$

Solution N° 42 :

1) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(6x)}{\sin(4x)\cdot\tan(3x)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{(6x)^2}\cdot\frac{1}{\frac{\sin 4x}{4x}}\cdot\frac{1}{\frac{\tan 3x}{3x}}\cdot\frac{(6x)^2}{(4x)(3x)}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1}\times\frac{1}{1}\times\frac{36}{12}=\frac{3}{2}$$

2) $$Soit\ \ l=\lim_{x\to 1}\frac{\tan(\pi x)}{x-1}=\lim_{\substack{t\to 0\\ t=x-1}}\frac{\tan(\pi t+\pi)}{t}$$

$$Dabord\ :\ \tan(\pi t+\pi)=\frac{\tan\pi t+\tan\pi}{1-\tan\pi t\cdot \tan\pi}$$

$$=\frac{\tan(\pi t)+0}{1-\tan(\pi t)\cdot 0}=\tan(\pi t)$$

Voici une autre manière pour ce faire :

$$\tan(\pi t+\pi)=\frac{\sin(\pi t+\pi)}{\cos(\pi t+\pi)}=\frac{-\sin(\pi t)}{-\cos(\pi t)}$$

$$=\tan(\pi t)$$

Revenons à nouveau à la limite l :

$$l=\lim_{t\to 0}\frac{\tan(\pi t+\pi)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\tan(\pi t)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\tan(\pi t)}{\pi t}\times\pi=1\times\pi=\pi$$

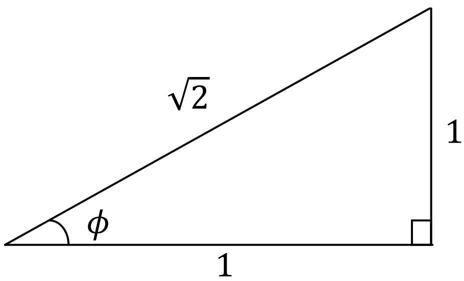
3) $$\lim_{x\to 0}\frac{sin^3(2x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^3\times 8=8$$

4) $$Soit\ \ l=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$=1\cdot\sin(\pi-x)+1\cdot\cos(\pi-x)$$

$$=\sqrt{1^2+1^2}\cdot\cos(\pi-x-\phi)$$

$$=\sqrt{2}\cos(\pi-x-\phi)$$



$$\cos\phi=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Longrightarrow\quad \phi\equiv\pm\frac{\pi}{4}[2\pi]$$

$$On\ retiendra\ la\ valeur\ \phi = \frac{\pi}{4}$$

$$D'où\ \ \sin x - \cos x = \sqrt{2}\cos\left(\pi - x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - x\right)$$

$$= -\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

$$= \sqrt{2}\ \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$Ainsi\ \ :\ \ l = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}}$$

$$= \sqrt{2}\ \lim_{\substack{t\to 0 \\ t = x - \frac{\pi}{4}}} \frac{\sin t}{t} = \sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2}$$

5) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{2x} \cdot \frac{2x}{x^3} = 1 \cdot \frac{2}{0^+}$$
$$= +\infty$$

6) $$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\cos\sqrt{x} - 1}{x}\right) = \lim_{\substack{t\to 0^+ \\ t = \sqrt{x}}} \left(\frac{\cos t - 1}{t^2}\right) = \frac{-1}{2}$$

Solution N° 43 :

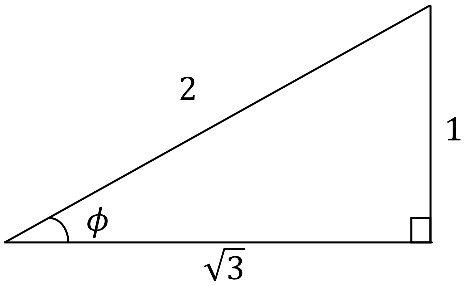
1) $$Soit\ \ l = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\sin x - \sqrt{3}\cos x}{x - \frac{\pi}{3}}\right)$$

$$On\ a\ \ :\ \ \sin x - \sqrt{3}\cos x$$
$$= \sin(\pi - x) - \sqrt{3}\cos(\pi - x)$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2}\ \cos(\pi - x - \phi)$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= 2\cos(\pi - x - \phi)$$



$$\cos\phi = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Longrightarrow\ \ \phi \equiv \pm\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$$

$$On\ retiendra\ la\ valeur\ \phi = \frac{\pi}{6}$$

$$D'où\ \ \sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\cos\left(\pi - x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 2\cos\left(\frac{5\pi}{6} - x\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{6} + x\right)$$

$$= 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$D'où\ \ \ l = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}$$

$$= 2\ \lim_{\substack{t\to 0 \\ t = x - \frac{\pi}{3}}} \frac{\sin t}{t} = 2 \times 1 = 2$$

On peut éventuellement s'assurer des résultats obtenus en appliquant la règle de l'Hôpital dans le brouillon puisque c'est valable et ça donne zéro/zéro :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\left(\sin x - \sqrt{3}\cos x\right)}{\left(x - \frac{\pi}{3}\right)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\left(\sin x - \sqrt{3}\cos x\right)'}{\left(x - \frac{\pi}{3}\right)'}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\cos x + \sqrt{3}\sin x}{1} = \frac{\left(\frac{1}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1} = 2$$

2) *Soit* $l = \lim_{x \to +\infty} \left(x^2 - \sin \frac{1}{x}\right)$

$$On\ a \quad \forall t > 0 \quad ; \quad \sin t < 0$$

$$Si \quad x \to +\infty \quad Alors \quad \frac{1}{x} > 0$$

$$D'où \quad \sin\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

$$\Longrightarrow \quad x^2 - \sin \frac{1}{x} > \underbrace{\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)}_{\substack{tend\ vers\ +\infty \\ quand\ x \to +\infty}}$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x \to +\infty} \left(x^2 - \sin \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

3) *On a* $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad ; \quad -1 \leq \cos x \leq 1$

$$\Longrightarrow \quad \frac{-1}{x^3} \leq \frac{\cos x}{x^3} \leq \frac{1}{x^3}$$

La quantité $\frac{1}{x^3}$ *est positive car* $x \to +\infty$

$$D'où \quad \underbrace{\frac{-1}{x^3}}_{\substack{tend\ vers\ 0 \\ quand\ x \to +\infty}} \leq \frac{\cos x}{x^3} \leq \underbrace{\frac{1}{x^3}}_{\substack{tend\ vers\ 0 \\ quand\ x \to +\infty}}$$

$$Donc \quad \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\cos x}{x^3}\right) = 0$$

4) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \sin x}{x^2(2 + \cos x)}$

$$On\ a \quad : \quad 0 \leq \sin x \leq x \quad ; \quad \forall x \geq 0$$

$$Donc \quad : \quad 1 \leq \sin x + 1 \leq x + 1 \rightsquigarrow (1)$$

$$On\ a\ aussi \quad \forall x \in \mathbb{R} \ ; \ -1 \leq \cos x \leq 1$$

$$Donc \quad : \quad 1 \leq \cos x + 2 \leq 3$$

$$Ainsi \quad : \quad \frac{1}{3} \leq \frac{1}{\cos x + 2} \leq 1$$

$$D'où \quad \frac{1}{3x^2} \leq \frac{1}{x^2(\cos x + 2)} \leq \frac{1}{x^2} \rightsquigarrow (2)$$

$$(1) \times (2) \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{3x^2} \leq \frac{\sin x + 1}{x^2(2 + \cos x)} \leq \frac{x + 1}{x^2}$$

$$D'où \quad : \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x + 1}{x^2(2 + \cos x)} = 0$$

5) *Soit* $l = \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{x}{2 + \sqrt{x^4 + 1}}\right)$

$$= 1 + \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x}{2 + \sqrt{x^4 + 1}}\right)$$

$$= 1 + \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x}{2 + \sqrt{x^4\left(1 + \frac{1}{x^4}\right)}}\right)$$

$$= 1 + \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x}{2 + x^2\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}}\right)$$

$$= 1 + \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(\frac{2}{x^2} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\right)}$$

$$= 1 + \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{2}{x^2} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}}\right)$$

$$= 1 + \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{2}{x^2}+\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}\right)$$

$$= 1 + \frac{0}{0+\sqrt{1+0}} = 1$$

6) $Soit \quad l = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2\,E(x)+(x-E(x))^2}{x^2}\right)$

$On\ a \quad : \quad x \leq E(x) < x+1 \quad ; \quad \forall x\epsilon\mathbb{R}$

$\Longrightarrow \quad 2x \leq 2\,E(x) \leq 2(x+1) \quad \rightsquigarrow (1)$

$Or, \quad on\ a \quad -x-1 < -E(x) \leq -x$

$D'où \quad : \quad -1 < x - E(x) \leq 0$

$C-à-d \quad 0 \leq (x-E(x))^2 < 1 \quad \rightsquigarrow (2)$

$(1)+(2) \quad \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \quad 2x \leq 2\,E(x)+(x-E(x))^2 \leq 2x+3$

$$\Longrightarrow \quad \frac{2x}{x^2} \leq \frac{2\,E(x)+(x-E(x))^2}{x^2} \leq \frac{2x+3}{x^2}$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2\,E(x)+(x-E(x))^2}{x^2}\right) = 0$$

$$Car \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+3}{x^2}\right) = 0$$

Solution N° 44 :

1) On effectue la division euclidienne de $(x^2+3x-10)$ par $(x-2)$ car 2 est une racine simple et on obtient ainsi :

$$\lim_{x\to2}\left(\frac{\sqrt{2x}-2}{x^2+3x-10}\right) = \lim_{x\to2}\left(\frac{\sqrt{2x}-2}{(x-2)(x+5)}\right)$$

$$= \lim_{x\to2}\frac{\sqrt{2}(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{\left((\sqrt{x})^2-(\sqrt{2})^2\right)(x+5)}$$

$$= \lim_{x\to2}\frac{\sqrt{2}(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})(x+5)}$$

$$= \lim_{x\to2}\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{x}+\sqrt{2})(x+5)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}+\sqrt{2})(2+5)} = \frac{1}{14}$$

2) $\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{(x+\sqrt{x^2+1})(x-\sqrt{x^2+1})}{(x-\sqrt{x^2+1})}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-(x^2+1)}{x-\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= \left(\frac{-1}{-\infty-\sqrt{+\infty}}\right) = 0^+ = 0$$

3) $\lim_{x\to1}\left(\frac{2x^3+3x^2-4x-1}{x^3-1}\right)$

On remarque que 1 est une racine simple de chacun des polynômes du numérateur et du dénominateur donc on peut effectuer la division euclidienne de ces deux polynômes par $(x-1)$ on obtient :

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x^3+3x^2-4x-1}{x^3-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(2x^2+5x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x^2+5x+1}{x^2+x+1}\right)$$

$$=\left(\frac{2+5+1}{1+1+1}\right)=\frac{8}{3}$$

4) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right)=\frac{1}{+\infty}=0^+=0$$

5) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+x)-x^2}{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|\cdot\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\cdot\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(1+0)}+1}=\frac{1}{2}$$

6) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}\right)$

On multiplie par les conjugués de chacun des termes en numérateur et en dénominateur on obtient :

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-2^2}{\left(\sqrt{2x+5}\right)^2-3^2}\right)\times\left(\frac{\sqrt{2x+5}+3}{\sqrt{x+2}+2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{2x-4}\right)\times\left(\frac{\sqrt{2x+5}+3}{\sqrt{x+2}+2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{2x+5}+3}{\sqrt{x+2}+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{4+5}+3}{\sqrt{2+2}+2}\right)=\frac{3}{4}$$

Solution N° 45 :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-3x\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-3x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+3x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+3x\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-3x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+3x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+3x\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+1)-(3x)^2}{\sqrt{x^2+1}+3x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-8x^2+1}{\sqrt{x^2+1}+3x}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-8x^2+1}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+3x}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-8x^2+1}{|x|\cdot\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+3x}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-8x^2+1}{x\cdot\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+3x}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\left(-8x+\frac{1}{x}\right)}{x\cdot\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-8x+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+3}\right)=\frac{-\infty+0}{\sqrt{1+0}+3}=-\infty$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{4x^2+x^3}}{|2x+x^3|}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2(4+x)}}{|x(2+x^2)|}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{x+4}}{|x|\cdot|2+x^2|}=\lim_{x\to0}\frac{|x|}{|x|}\cdot\frac{\sqrt{x+4}}{|2+x|}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}}{|2+x|}=\frac{\sqrt{4+0}}{|2+0|}=1$$

3) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$

$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{x+1}{x^2-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x+1}\right)=\frac{1}{2}$$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}-\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}\right)$

$$=\lim_{x\to+}\left(\frac{x\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}}-\frac{x\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^3-x^2}}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{\sqrt{x^3+x^2}}{\sqrt{x^2-1}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{\sqrt{x^3-x^2}}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{\sqrt{x^3+x^2}}{\sqrt{x^2-1}}\right)\left(\frac{\sqrt{x^3-x^2}}{\sqrt{x^2-1}}+\frac{\sqrt{x^3+x^2}}{\sqrt{x^2-1}}\right)}{\left(\frac{\sqrt{x^3-x^2}}{\sqrt{x^2-1}}+\frac{\sqrt{x^3+x^2}}{\sqrt{x^2-1}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(\frac{\sqrt{x^3-x^2}}{\sqrt{x^2-1}}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{x^3+x^2}}{\sqrt{x^2-1}}\right)^2}{\frac{\sqrt{x^3-x^2}}{\sqrt{x^2-1}}+\frac{\sqrt{x^3+x^2}}{\sqrt{x^2-1}}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(\frac{x^3-x^2}{x^2-1}\right)-\left(\frac{x^3+x^2}{x^2-1}\right)}{\sqrt{\frac{x^3-x^2}{x^2-1}}+\sqrt{\frac{x^3+x^2}{x^2-1}}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(\frac{-2x^2}{x^2-1}\right)}{\sqrt{\frac{x^3-x^2}{x^2-1}}+\sqrt{\frac{x^3+x^2}{x^2-1}}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{-2x^2}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}{\sqrt{\frac{x^3-x^2}{x^2-1}}+\sqrt{\frac{x^3+x^2}{x^2-1}}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{-2}{1-\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{\frac{x^3-x^2}{x^2-1}}+\sqrt{\frac{x^3+x^2}{x^2-1}}}\right)$$

$$= \left(\frac{\frac{-2}{1-0}}{\sqrt{+\infty}+\sqrt{+\infty}}\right) = \frac{-2}{+\infty} = 0^- = 0$$

5) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+\sqrt{|x|}}{x-\sqrt{|x|}}\right)$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{|x|}}{\sqrt{|x|}}\cdot\frac{\left(\frac{x}{\sqrt{|x|}}+1\right)}{\left(\frac{x}{\sqrt{|x|}}-1\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{x}{\sqrt{|x|}}+1\right)}{\left(\frac{x}{\sqrt{|x|}}-1\right)} = \frac{0+1}{0-1} = -1$$

Mais pourquoi $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{|x|}} = 0$?

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(\frac{x}{\sqrt{|x|}}\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(\frac{x}{\sqrt{x}}\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}}\sqrt{x} = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x<0}}\left(\frac{x}{\sqrt{|x|}}\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\x<0}}\left(\frac{x}{\sqrt{-x}}\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\x<0}}-\sqrt{-x} = 0$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

6) $\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{\frac{x}{x-1}}-x-1\right)$

$$= -1 + \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}-x\right)$$

$$-1 + \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}-x\right)\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}+x\right)}{\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}+x\right)}$$

$$-1 + \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}\right)^2-x^2}{\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}+x\right)}$$

$$= -1 + \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{x^3-x^3+x^2}{x-1}\right)}{\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}+x\right)}$$

$$= -1 + \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{x^2}{x-1}\right)}{\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}+x\right)}$$

$$= -1 + \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\frac{x}{x-1}\right)}{x\left(\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}+1\right)}$$

$$= -1 + \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{x}{x-1}\right)}{\left(\sqrt{\frac{x^3}{x^3-x^2}}+1\right)}$$

$$= -1 + \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{-1}{2}$$

Solution N° 46 :

1) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\tan x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\left(\sqrt{1+\sin x}\right)^2-\left(\sqrt{1-\sin x}\right)^2}{\tan x\cdot\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+\sin x)-(1-\sin x)}{\tan x\cdot\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\sin x}{\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\cos x}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}\right)$$

$$=\left(\frac{2\cos 0}{\sqrt{1+\sin 0}+\sqrt{1-\sin 0}}\right)=1$$

2) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x\cdot x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)\left(\frac{1}{\cos x}\right)$$

$$=1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{1}=\frac{1}{2}$$

3) $$Soit\quad l=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x(1-\cos x)}{\sin(3x)-3\sin x}\right)$$

Je rappelle juste que :

$$sin^3(x)=\frac{1}{4}(3\sin x-\sin(3x))$$

$$Donc\ l=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)\left(\frac{x^3}{\sin(3x)-3\sin x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)\left(\frac{x^3}{-4\ sin^3x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)\left(\frac{x}{\sin x}\right)^3\cdot\left(\frac{-1}{4}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)\left(\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}\right)^3\cdot\left(\frac{-1}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1}\right)^3\cdot\left(\frac{-1}{4}\right)=\frac{-1}{8}$$

4) $$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}\right)\left(\frac{x\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)\left(x\sqrt{x}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times 0=0$$

Solution N° 47 :

1) $$\lim_{x\to -2}\left(\frac{-1}{3}x^2-5x+7\right)$$

$$=\frac{-1}{3}(-2)^2-5(-2)+7=\frac{47}{3}$$

2) $$\lim_{x\to 3}\frac{1}{(3-x)^2}=\lim_{x\to 3^{\pm}}\frac{1}{(3-x)^2}$$

$$=\lim_{\substack{t\to 0^{\pm}\\ t=x-3}}\left(\frac{1}{t^2}\right)=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

3) $$\lim_{x\to+\infty}(x^3+x)=\lim_{x\to+\infty}x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=(+\infty)(1+0)=+\infty$$

On pourrait écrire directement :

$$\lim_{x\to+\infty}(x^3+x)=\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty$$

4) $$\lim_{x\to\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\,x^3-3x^2-x\right)$$

$$=\sqrt{2}(2)^3-3\left(\sqrt{2}\right)^2-\sqrt{2}=-\left(2+\sqrt{2}\right)$$

5) $$\lim_{x\to0}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}+2\right)=+\infty$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{0^+}\left(\frac{1}{0^+}+2\right)=(+\infty)(+\infty)=+\infty\ si\ x>0\\ \frac{1}{0^-}\left(\frac{1}{0^-}+2\right)=(-\infty)(-\infty)=+\infty\ si\ x<0\end{cases}$$

6) $$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{0^+}}\left(\frac{1}{\sqrt{0^+}}-1\right)=(+\infty)(+\infty-1)=+\infty$$

Solution N° 48 :

1) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^5+x^4+2}{x^2-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5\left(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^5}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^5}{x^2}\right)\left(\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^5}}{1-\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(x^3)\left(\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^5}}{1-\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$=(+\infty)\left(\frac{1+0^++0^+}{1-0^+}\right)=+\infty$$

On peut directement répondre ainsi :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^5+x^4+2}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^5}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}x^3$$
$$=+\infty$$

2) $$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-1}{x^2+x+5}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x^2}\right)\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{-\infty}\right)\left(\frac{1-0^-}{1+0^-+0^+}\right)=0^-=0$$

On pourrait répondre directement ainsi :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-1}{x^2+x+5}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x^2}\right)=0$$

3) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+1)^2\times(2x-7)^2}{4x^3+x+5}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2)(2x)^2}{4x^3}=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$$

4) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-3x}{4x+7}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x\left(1-\frac{1}{3x}\right)}{4x\left(1+\frac{7}{4x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-3x}{4x}\right)\left(\frac{1-\frac{1}{3x}}{1+\frac{7}{4x}}\right)$$

$$= \left(\frac{-3}{4}\right)\left(\frac{1-0^+}{1+0^+}\right) = \frac{-3}{4}$$

On pourrait répondre directement ainsi :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-3x}{4x+7}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-3x}{4x}\right) = \frac{-3}{4}$$

5) $$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-4x^3+5x+9}{7x^3-6}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-4x^3}{7x^3}\right) = \frac{-4}{7}$$

6) $$\lim_{|x|\to+\infty}\frac{\sqrt{5}\,x^2\,(2-x^2)^3}{(x^4-1)^2}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{5}\,x^2\,(-x^2)^3}{(x^4)^2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-\sqrt{5}\,x^8}{x^8} = -\sqrt{5}$$

Solution N° 49 :

1) $$\lim_{|x|\to+\infty}\frac{3x-x^4+x(1-5x^2)}{(x^2+1)(2-3x^3)}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x^4}{(x^2)(-3x^3)} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^4}{x^5}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x}\times\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{\pm\infty}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = 0^{\pm}\cdot\left(\frac{1}{3}\right) = 0$$

2) $$\lim_{x\to3}\left(\frac{x-3}{x^2-2x-3}\right) = \lim_{x\to3}\frac{(x-3)}{(x-3)(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to3}\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{4}$$

On pourrait utiliser la division euclidienne juste pour factoriser le dénominateur car 3 est une racine simple pour ce polynôme

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

3) $$\lim_{x\to1}\left(\frac{x^2+x-2}{2x^2+x-3}\right)$$

On effectue la division euclidienne des polynômes du numérateur et du dénominateur par $(x-1)$ puisque 1 est une racine simple des dites polynômes et On obtient ainsi :

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(2x+3)} = \lim_{x\to1}\left(\frac{x+2}{2x+3}\right)$$

$$= \frac{1+2}{2+3} = \frac{3}{5}$$

4) $$\lim_{x\to2}\left(\frac{4x^3-5x-22}{x^2-x-2}\right)$$

On effectue la division euclidienne des polynômes du numérateur et du dénominateur par $(x-2)$ puisque 2 est une racine simple des dites polynômes et On obtient ainsi :

$$\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(4x^2+8x+11)}{(x-2)(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to2}\left(\frac{4x^2+8x+11}{x+1}\right) = \frac{16+16+11}{2+1} = \frac{43}{3}$$

5) $$\lim_{x\to2}\left(\frac{2x^3-7x^2+4x+4}{x^3-x^2-8x+12}\right)$$

On effectue la division euclidienne des polynômes du numérateur et du dénominateur par $(x-2)$ puisque 2 est une racine simple des dites polynômes et On obtient ainsi :

$$\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(2x^2-3x-2)}{(x-2)(x^2+x-6)}$$

$$= \lim_{x\to2}\left(\frac{2x^2-3x-2}{x^2+x-6}\right) = \lim_{x\to2}\frac{(x-2)(2x+1)}{(x-2)(x+3)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\left(\frac{2x+1}{x+3}\right) = \frac{4+1}{2+3} = \frac{5}{5} = 1$$

6) $$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^4+3x^3-7x^2-27x-18}{x^4-3x^3-7x^2+27x-18}\right)$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^3+6x^2+11x+6)}{(x-3)(x^3-7x+6)}$$

$$= \frac{27+54+33+6}{27-21+6} = 10$$

Solution N° 50 :

1) $$\lim_{x\to -\sqrt{3}}\left(\frac{x+\sqrt{3}}{3-x^2}\right) = \lim_{x\to -\sqrt{3}}\frac{(x+\sqrt{3})}{(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)}$$

$$= \lim_{x\to -\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}-x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

2) $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{x+1}{x^2-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{2}$$

3) $$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^3-8}{x^2-4}\right) = \lim_{x\to 2}\left(\frac{x^3-2^3}{x^2-2^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2+2x+4}{x+2}\right)$$

$$= \frac{4+4+4}{2+2} = 3$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

4) $$\lim_{x\to +\infty}\sqrt{2x+9} = \sqrt{+\infty} = +\infty$$

5) $$\lim_{x\to +\infty}(x-\sqrt{x}) = \lim_{x\to +\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)$$

$$= \sqrt{+\infty}(\sqrt{+\infty}-1) = +\infty$$

6) $$\lim_{x\to -\infty}\sqrt{3-x} = \sqrt{3-(-\infty)} = \sqrt{+\infty} = +\infty$$

Solution N° 51 :

1) $$\lim_{x\to +\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = +\infty+\infty = +\infty$$

2) $$\lim_{x\to +\infty}\left(x-\sqrt{4x^2+1}\right)$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{\left(x-\sqrt{4x^2+1}\right)\left(x+\sqrt{4x^2+1}\right)}{\left(x+\sqrt{4x^2+1}\right)}$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2-(4x^2+1)}{x+\sqrt{4x^2+1}}\right)$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{-3x^2-1}{x+\sqrt{4x^2+1}}\right)$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{-3x^2-1}{x+\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}}\right)$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{-3x^2-1}{x+\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}\right)$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{-3x^2-1}{x+|x|\cdot\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-3x^2-1}{x+x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-3x-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-3x-\frac{1}{x}}{1+\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}\right)$$

$$= \frac{-\infty-0}{1+\sqrt{4+0}} = -\infty$$

3) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+3x-1}}{x+5} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{4x^2+3x-1}{x^2+10x+25}}$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^2}{x^2}\right)} = \sqrt{4} = 2$$

Remarque : On a le droit d'écrire :

$$x+5=\sqrt{(x+5)^2}$$

Car $x+5>0$ selon $x\to+\infty$

4) $$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{x+1})^2-1^2}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2}$$

5) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{+\infty} = 0^+ = 0$$

6) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)^2-(\sqrt{x})^2}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\sqrt{x}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}+\sqrt{x}}\right)$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}$$

Solution N° 52 :

$$Pour\ \ qu'on\ \ ait\ \ \lim_{x\to1} g(x) = 4$$

Il faut et il suffit de vérifier :

$$\lim_{x\to1^+} g(x) = \lim_{x\to1^-} g(x) = 4$$

$$C-à-d \ : \begin{cases} et & \lim_{x\to1^+}(x+\alpha)(x+\beta) = 4 \\ et & \lim_{x\to1^-}(x+\alpha)(x+2) = 4 \end{cases}$$

$$C-à-d \ : \begin{cases} et & (1+\alpha)(1+\beta) = 4 \\ et & (1+\alpha)(1+2) = 4 \end{cases}$$

$$C-à-d \ : \begin{cases} et & \beta = 2 \\ et & \alpha = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Solution N° 53 :

$$1) \quad On\ a \ : \ -1 \le \sin\left(\frac{1}{x}\right) \le 1 \quad ; \quad \forall x \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad 1 \le 2+\sin\left(\frac{1}{x}\right) \le 3$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x^2} \le \left(\frac{2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\right) \le \frac{3}{x^2}$$

$$\Rightarrow \quad (\forall x\epsilon\mathbb{R}^*) \quad ; \quad \frac{1}{x^2} \le f(x)$$

$$2) \quad comme \quad \lim_{x\to0^\pm}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$Et \quad comme \quad \frac{1}{x^2} \le f(x)$$

Alors d'après les propriétés des limites et ordre, on en déduit que :

$$\lim_{x\to0} f(x) = +\infty$$

Solution N° 54 :

$$1) \quad On\ a \ : \ -1 \le \cos x \le 1 \quad ; \quad \forall x\epsilon\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-1}{x} \le \frac{\cos x}{x} \le \frac{1}{x} \quad ; \quad \forall x > 0$$

$$\Rightarrow \quad |g(x)| \le \frac{1}{x} \quad ; \quad \forall x\epsilon\mathbb{R}_+^*$$

$$2) \quad comme \quad \underbrace{\frac{-1}{x}}_{\substack{tend\ \ vers\ \ 0 \\ quand\ \ x\to+\infty}} \le g(x) \le \underbrace{\frac{1}{x}}_{\substack{tend\ \ vers\ \ 0 \\ quand\ \ x\to+\infty}}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

On peut répondre encore ainsi :

$$Comme \quad 0 \le |g(x)| \le \frac{1}{x} \underbrace{\to}_{x\to\infty} 0$$

$$Alors \quad : \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

Solution N° 55 :

$$1) \quad On\ a \ : \ \left|\sin\left(\frac{1}{x^3}\right)\right| \le 1 \ ; \ \forall x \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad \left|x^2 \sin\left(\frac{1}{x^3}\right)\right| \le x^2 \quad ; \quad \forall x \neq 0$$

$$\Longrightarrow \quad 0 \leq |h(x)| \leq x^2 \to 0$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x\to 0} h(x) = 0$$

Solution N° 56 :

1) *On a* $\quad -1 \leq \sin x \leq 1 \quad ; \quad \forall x \epsilon \mathbb{R}$

$$\Longrightarrow \quad -3 \leq -3\sin x \leq 3$$

$$\Longrightarrow \quad x^2 - 3 \leq x^2 - 3\sin x \leq 3 + x^2$$

$$\Longrightarrow \quad (x^2 - 3) \leq k(x) \quad ; \quad \forall x \epsilon \mathbb{R}$$

2) *comme* $\quad (x^2 - 3) \leq k(x) \quad ; \quad \forall x \epsilon \mathbb{R}$

$$Et \;\; comme \quad \lim_{x\to\pm\infty} (x^2 - 3) = +\infty$$

$$Alors \quad \lim_{x\to-\infty} k(x) = \lim_{x\to+\infty} k(x) = +\infty$$

Solution N° 57 :

1) *comme* $\; -1 \leq \cos x \leq 1 \quad ; \quad \forall x \epsilon \mathbb{R}$

$$\Longrightarrow -1 - |x+1| \leq \cos x - |x+1| \leq 1 - |x+1|$$

$$\Longrightarrow \forall x \leq -1 \; :$$
$$-1 - (x+1) \leq \cos x - (x+1) \leq 1 - (x+1)$$

$$Remarque \;\; x \leq -1 \;\; \Longrightarrow \;\; |x+1| = -(x+1)$$

$$\Longrightarrow \frac{2+x}{x} \leq \frac{\cos x - (x+1)}{x} \leq \frac{x}{x} \quad ; \quad \frac{1}{x} < 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{2}{x} + 1 \leq f(x) \leq 1$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{2}{x} \leq f(x) - 1 \leq 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{2}{x} \leq f(x) - 1 \leq 0 \leq -\frac{2}{x}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Longrightarrow \quad |f(x) - 1| \leq \frac{-2}{x}$$

2) *comme* $\quad 0 \leq |f(x) - 1| \leq \dfrac{-2}{x} \to 0$

Alors selon les propriétés des limites et ordre on en déduit que :

$$\lim_{x\to-\infty} |f(x) - 1| = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$$

3) *Quand* $\quad x \to +\infty \quad$ *Alors* $\quad x > 0$

$$\Longrightarrow \quad f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

On a $\; : \; -1 \leq \sin x \leq 1 \quad ; \quad \forall x \epsilon \mathbb{R}$

$$\Longrightarrow \quad -\frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \quad ; \quad \forall x \epsilon \mathbb{R}_+^*$$

$$Comme \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Alors d'après les propriétés des limites et ordre on en déduit que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0$$

Solution N° 58 :

1) $\displaystyle \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt{1+\sin x} - 1}{x} \right)$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+\sin x} - 1\right)\left(\sqrt{1+\sin x} + 1\right)}{x\left(\sqrt{1+\sin x} + 1\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 + \sin x - 1}{x\left(\sqrt{1+\sin x} + 1\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x\left(\sqrt{1+\sin x}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1+\sin x}+1}\right)$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}$$

2) $On\ a\ :\ -1 \leq \sin x \leq 1 \quad ; \quad \forall x \epsilon \mathbb{R}$

$$\Longrightarrow \quad 0 \leq 1+\sin x \leq 2$$

$$\Longrightarrow \quad -1 \leq \sqrt{1+\sin x}-1 \leq 1$$

$$\Longrightarrow \quad \left|\sqrt{1+\sin x}-1\right| \leq 1$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\left|\sqrt{1+\sin x}-1\right|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} \quad ; \quad \forall x \epsilon \mathbb{R}^*$$

$$\Longrightarrow \quad |f(x)| \leq \frac{1}{|x|} \quad ; \quad \forall x \epsilon \mathbb{R}^*$$

3) $comme \quad 0 \leq |f(x)| \leq \frac{1}{|x|} \quad ; \quad \forall x \epsilon \mathbb{R}^*$

$$Et\ comme \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{|x|} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{|x|} = 0$$

Alors d'après les propriétés des limites et ordre on en déduit que :

$$\lim_{x\to\pm\infty} |f(x)| = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

Solution N° 59 :

1) $On\ a\ :\quad x-1 < E(x) \leq x \quad ; \quad \forall x \epsilon \mathbb{R}$

$$Et\ on\ a \quad -1 \leq \sin x \leq 1 \quad ; \quad \forall x \epsilon \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \quad x-2 < E(x)+\sin x \leq x+1$$

$$\Longrightarrow \quad \forall x \epsilon \mathbb{R} \ ; \quad x-2 < f(x) \leq x+1$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

2) $comme \quad \underbrace{(x-2)}_{\substack{tend\ \ vers\ +\infty \\ quand\ \ x\to+\infty}} < f(x)$

$$Alors \quad : \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$Comme \ \ f(x) \leq \underbrace{(x+1)}_{\substack{tend\ \ vers\ -\infty \\ quand\ \ x\to-\infty}}$$

$$Alors \quad : \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$On\ a \quad : \quad \forall x \epsilon \mathbb{R} \ ; \ x-2 < f(x) \leq x+1$$

$$\Longrightarrow \quad \forall x > 0 \ ; \quad \frac{x-2}{x} < \frac{f(x)}{x} \leq \frac{x+1}{x}$$

$$\Longrightarrow \quad \forall x > 0 \ ; \quad 1-\frac{2}{x} < \frac{f(x)}{x} \leq 1+\frac{1}{x}$$

$$comme \quad \lim_{x\to\pm\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$$

Alors d'après les propriétés des limites et ordre on en déduit que :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

3) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} E(x) + \lim_{x\to 0^+} \sin x = 0$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} E(x) + \lim_{x\to 0^-} \sin x = -1$$

Donc f n'est pas du tout continue en 0

Solution N° 60 :

1) $On\ a\ :\ \forall x \epsilon \mathbb{R}^* \ ; \quad \frac{1}{x} \leq E\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}+1$

$$\Longrightarrow \quad \frac{x^2}{x} \leq x^2\, E\left(\frac{1}{x}\right) < x+x^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{x} - x \le x^2\, E\left(\frac{1}{x}\right) - x < x + x^2 - x$$

$$\Rightarrow \quad 0 \le f(x) - x < x^2$$

$$\Rightarrow \quad -x^2 \le 0 \le f(x) - x < x^2$$

$$\Rightarrow \quad -x^2 \le f(x) - x < x^2$$

$$\Rightarrow \quad |f(x) - x| < x^2$$

2) *comme* $\quad 0 \le |f(x) - x| < x^2$

$$Et\ comme \quad \lim_{x\to 0} x^2 = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

$$Alors \quad : \quad \lim_{0} |f(x) - x| = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} oubien & \lim\limits_{x\to 0} (f(x) - x) = 0 \\ oubien & \lim\limits_{x\to 0} \big(x - f(x)\big) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} oubien & \lim\limits_{x\to 0} f(x) - \lim\limits_{x\to 0} x = 0 \\ oubien & \lim\limits_{x\to 0} x - \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

3) $\displaystyle \lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} x^2\, E\left(\frac{1}{x}\right)$

$$= \left(\lim_{x\to -\infty} x^2\right) \cdot \left(\lim_{x\to -\infty} E\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$= \left(\lim_{x\to -\infty} x^2\right) \cdot \left(\lim_{\substack{t\to 0^- \\ t=\frac{1}{x}}} E(t)\right)$$

$$= (+\infty) \cdot (-1) = -\infty$$

Calculons maintenant la 2ème limite :

Quand $x \to +\infty$ on peut prendre $x > 1$

Rappel : $\quad \forall\, t \in\,]0,1[\quad ; \quad E(t) = 0$

$$Soit \quad x > 1 \quad alors \quad 0 < \frac{1}{x} < 1$$

$$\Rightarrow \quad x > 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{1}{x} < 1 \quad \Rightarrow \quad E\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$Pour \quad x > 1 \quad on\ ait \quad \frac{1}{x^3} > 0$$

$$\Rightarrow \quad \forall x > 1 \ ; \ 0 \le E\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \quad \forall x > 1 \ ; \ 0 \le x^2\, E\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \forall x > 1 \ ; \ \frac{-1}{x} < 0 \le x^2\, E\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \forall x > 1 \ ; \ \frac{-1}{x} < f(x) < \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0 \quad ; \quad car \quad \left| \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \end{array} \right.$$

Solution N° 61 :

1) $\displaystyle \lim_{x\to 1} \left(\frac{x\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}\right)$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x\sqrt{x} - 1)(x\sqrt{x} + 1)}{(x-1)(x+1)(x\sqrt{x} + 1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{(x-1)(x+1)(x\sqrt{x} + 1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x+1)(x\sqrt{x} + 1)}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x^2+x+1)}{(x+1)(x\sqrt{x}+1)}$$

$$=\frac{(1^2+1+1)}{(1+1)(1\sqrt{1}+1)}=\frac{3}{4}$$

2) $\lim\limits_{x\to-4}\left(\dfrac{x^3+64}{3x^2+14x+8}\right)$

On remarque que -4 est une racine simple des polynômes du numérateur et du dénominateur, donc en effectuant la division euclidienne de ces deux polynômes par $(x+4)$ on obtient :

$$\lim_{x\to-4}\frac{(x+4)(x^2-4x+16)}{(x+4)(3x+2)}$$

$$=\lim_{x\to-4}\left(\frac{x^2-4x+16}{3x+2}\right)=\frac{16+16+16}{-10}=\frac{-24}{5}$$

3) $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{\sqrt{1-3x}-2}{x^2+4x+3}\right)$

On procédera ainsi : d'abord on multiplie par le conjugué du numérateur puis on effectuera la division euclidienne du polynôme du dénominateur par $(x+1)$ puisque -1 est une racine simple On obtient alors :

$$\lim_{x\to-1}\frac{(\sqrt{1-3x}-2)(\sqrt{1-3x}+2)}{(x+1)(x+3)(\sqrt{1-3x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(\sqrt{1-3x})^2-2^2}{(x+1)(x+3)(\sqrt{1-3x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{-3(x+1)}{(x+1)(x+3)(\sqrt{1-3x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{-3}{(x+3)(\sqrt{1-3x}+2)}$$

$$=\frac{-3}{(-1+3)(\sqrt{1-3}+2)}=\frac{-3}{8}$$

4) $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{2x^2-2}{\sqrt{x+1}}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{2(x-1)(x+1)}{\sqrt{x+1}}$

$$=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{2\cdot(x-1)\cdot\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}$$

$$=\lim_{x\to(-1)^+}2(x-1)\sqrt{x+1}=2(-2)\sqrt{0}=0$$

5) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sqrt{x^4+1}-1}{x}\right)$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{x^4+1}-1)(\sqrt{x^4+1}+1)}{x(\sqrt{x^4+1}+1)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^4}{x(\sqrt{x^4+1}+1)}=\lim_{x\to0}\frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}+1}=0$$

6) $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x-1}=\lim\limits_{\substack{t\to0^-\\ t=x-1}}\dfrac{\sqrt{-t^2-2t}}{t}$

$$=\lim_{t\to0^-}\frac{\sqrt{t^2\left(-1-\frac{2}{t}\right)}}{t}=\lim_{t\to0^-}\frac{\sqrt{t^2}\cdot\sqrt{-1-\frac{2}{t}}}{t}$$

$$=\lim_{t\to0^-}\frac{|t|\cdot\sqrt{-1-\frac{2}{t}}}{t}=\lim_{t\to0^-}\frac{-t\sqrt{-1-\frac{2}{t}}}{t}$$

$$=\lim_{t\to0^-}-\sqrt{-1-\frac{2}{t}}=-\sqrt{-1-\frac{2}{0^-}}=-\infty$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Solution N° 62 :

1) $\lim_{x\to1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}\right)$

$$= \lim_{x\to1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)(x+1)}\right)$$

$$= \lim_{x\to1^+}\frac{1}{x-1}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)$$

$$= \lim_{\substack{t\to0^+\\ t=x-1}}\frac{1}{t}\left(1-\frac{1}{t+2}\right)=\frac{1}{0^+}\left(1-\frac{1}{2}\right)=+\infty$$

2) $\lim_{x\to3}\left(\frac{\sqrt{2x+3}-x}{x^2-3x}\right)$

$$= \lim_{x\to3}\frac{\left(\sqrt{2x+3}-x\right)\left(\sqrt{2x+3}+x\right)}{x(x-3)\left(\sqrt{2x+3}+x\right)}$$

$$= \lim_{x\to3}\frac{-x^2+2x+3}{x(x-3)\left(\sqrt{2x+3}+x\right)}$$

$$= \lim_{x\to3}\frac{(x-3)(-x-1)}{x(x-3)\left(\sqrt{2x+3}+x\right)}$$

$$= \lim_{x\to3}\frac{-x-1}{x\left(\sqrt{2x+3}+x\right)}=\frac{-3-1}{3\left(\sqrt{9}+3\right)}=\frac{-2}{9}$$

3) $\lim_{x\to1^+}\left(\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x-1}}\right)$

$$= \lim_{x\to1^+}\frac{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}\right)}{\sqrt{x-1}\cdot\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}\right)}$$

$$= \lim_{x\to1^+}\frac{-2(x-1)}{\sqrt{x-1}\cdot\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}\right)}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= \lim_{x\to1^+}\frac{-2\sqrt{x-1}\,\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}\cdot\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}\right)}$$

$$= \lim_{x\to1^+}\left(\frac{-2\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}}\right)=\frac{-2\sqrt{0}}{\sqrt{4}+\sqrt{4}}=0$$

4) $\lim_{x\to9}\left(\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x+7}-4}\right)$

$$= \lim_{x\to9}\frac{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x+7}+4\right)}{\left(\sqrt{x+7}-4\right)\left(\sqrt{x+7}+4\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}$$

$$= \lim_{x\to9}\frac{\left(\left(\sqrt{x}\right)^2-3^2\right)\left(\sqrt{x+7}+4\right)}{\left(\left(\sqrt{x+7}\right)^2-4^2\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}$$

$$= \lim_{x\to9}\frac{(x-9)\left(\sqrt{x+7}+4\right)}{(x-9)\left(\sqrt{x}+3\right)}$$

$$= \lim_{x\to9}\left(\frac{\sqrt{x+7}+4}{\sqrt{x}+3}\right)=\frac{\sqrt{9+7}+4}{\sqrt{9}+3}=\frac{4}{3}$$

5) $\lim_{x\to2}\left(\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3+x}}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{2x^2-5}}\right)$

$$= \lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{3+x}\right)\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3+x}\right)}{\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{2x^2-5}\right)\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{2x^2-5}\right)}\times\frac{\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{2x^2-5}\right)}{\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3+x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to2}\frac{(x-2)\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{2x^2-5}\right)}{-(x-2)(x+2)\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3+x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to2}\frac{-\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{2x^2-5}\right)}{(x+2)\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3+x}\right)}$$

$$=\frac{-\left(\sqrt{4-1}+\sqrt{8-5}\right)}{(2+2)\left(\sqrt{5}+\sqrt{5}\right)}=\frac{-1}{4}\sqrt{\frac{3}{5}}$$

6) $$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{\sqrt{x^2-x}-x}{\sqrt{1+x+x^2}-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)}{\left(\sqrt{1+x+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)}\times\frac{\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)}{\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{-x\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)}{(x+x^2)\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{-\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)}{(1+x)\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{-\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)}{(1+x)\left(\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}+x\right)}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{-\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)}{(1+x)\left(|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}}+x\right)}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{-\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)}{(1+x)\left(-x\sqrt{1-\frac{1}{x}}+x\right)}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{-\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)}{x(1+x)\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{-\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)}{(1+x)}\left(\frac{\frac{1}{x}}{1-\sqrt{1-\frac{1}{x}}}\right)$$

$$=\frac{-\left(\sqrt{1+0+0}+1\right)}{(1+0)}(+\infty)=-\infty$$

$$Pourquoi\quad\lim_{x\to0^-}\left(\frac{\frac{1}{x}}{1-\sqrt{1-\frac{1}{x}}}\right)=+\infty\quad ?$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Voici pourquoi :

$$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{\frac{1}{x}}{1-\sqrt{1-\frac{1}{x}}}\right)=\lim_{\substack{t\to-\infty\\ t=\frac{1}{x}}}\left(\frac{t}{1-\sqrt{1-t}}\right)$$

$$=\lim_{t\to-\infty}\frac{t\left(1+\sqrt{1-t}\right)}{\left(1-\sqrt{1-t}\right)\left(1+\sqrt{1-t}\right)}$$

$$=\lim_{t\to-\infty}\frac{t\left(1+\sqrt{1-t}\right)}{t}$$

$$=\lim_{t\to-\infty}\left(1+\sqrt{1-t}\right)=1+\sqrt{1-(-\infty)}$$
$$=+\infty$$

Solution N° 63 :

1) $$\lim_{x\to1^+}\left(\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-1}-1}{x-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{\left(\sqrt{2x-1}-\left(\sqrt{x-1}+1\right)\right)\left(\sqrt{2x-1}+\left(\sqrt{x-1}+1\right)\right)}{(x-1)\left(\left(\sqrt{2x-1}+\left(\sqrt{x-1}+1\right)\right)\right)}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{\left(\left(\sqrt{2x-1}\right)^2-\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-1}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{x-1-2\sqrt{x-1}}{(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-1}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-1}+1\right)}$$

$$-2\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x-1}}{(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-1}+1\right)}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-1}+1}$$

$$-2\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-1}+1\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{0}+1} - 2\left(\frac{1}{\sqrt{1^+ - 1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{0}+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - 2(+\infty)\left(\frac{1}{2}\right) = -\infty$$

2) $\lim\limits_{x\to} \left(\dfrac{\sqrt{x}-3x+2}{x-1}\right)$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\left(\sqrt{x}-(3x-2)\right)\left(\sqrt{x}+(3x-2)\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x}+3x-2\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-(3x-2)^2}{(x-1)\left(\sqrt{x}+3x-2\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \left(\frac{-9x^2+13x-4}{x-1}\right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{x}+3x-2}\right)$$

On effectue la division euclidienne parce que 1 est une racine simple du polynôme $-9x^2+13x-4x \ \ par \ \ x-1$:

$$= \lim_{x\to 1} \ (-9x+4) \times \left(\frac{1}{\sqrt{x}+3x-2}\right)$$

$$= (-9+4) \times \left(\frac{1}{\sqrt{1}+3-2}\right) = \frac{-5}{2}$$

3) $\lim\limits_{x\to 3} \left(\dfrac{\sqrt{x+1}-x^2+x+4}{x-3}\right)$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{\left(\sqrt{x+1}-(x^2-x-4)\right)\left(\left(\sqrt{x+1}+(x^2-x-4)\right)\right.}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+x^2-x-4\right)}$$

$$= \lim_{x\to 3} \left(\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-(x^2-x-4)^2}{x-3}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+x^2-x-4}\right)$$

$$= \lim_{x\to 3} \left(\frac{-x^4+2x^3+7x^2-7x-15}{x-3}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+x^2-x-4}\right)$$

On effectue la division euclidienne du polynôme du numérateur par $(x-3)$ car 3 est une racine simple pour le polynôme du numérateur on obtient ainsi :

$$= \lim_{x\to 3} (-x^3-x^2+4x+5)\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+x^2-x-4}\right)$$

$$= \frac{-27-9+12+5}{2+9-3-4} = \frac{-19}{4}$$

4) $\lim\limits_{x\to 9} \left(\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x+7}-4}\right)$

$$= \lim_{x\to 9} \frac{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x+7}+4\right)}{\left(\sqrt{x+7}-4\right)\left(\sqrt{x+7}+4\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}$$

$$= \lim_{x\to 9} \frac{\left(\left(\sqrt{x}\right)^2-3^2\right)\left(\sqrt{x+7}+4\right)}{\left(\left(\sqrt{x+7}\right)^2-4^2\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}$$

$$= \lim_{x\to 9} \frac{(x-9)\left(\sqrt{x+7}+4\right)}{(x-9)\left(\sqrt{x}+3\right)}$$

$$= \lim_{x\to 9} \left(\frac{\sqrt{x+7}+4}{\sqrt{x}+3}\right) = \frac{\sqrt{9+7}+4}{\sqrt{9}+3} = \frac{4}{3}$$

5) $\lim\limits_{x} \left(\dfrac{\sqrt{4x+6}-2x^2-3x-3}{2x+1}\right)$

$$\times \frac{\sqrt{4x+6}+(2x^2+3x+3)}{\sqrt{4x+6}+(2x^2+3x+3)}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= \lim_{x\to\frac{-1}{2}} \frac{\left(\sqrt{4x+6}\right)^2 - (2x^2+3x+3)^2}{(2x+1)\left(\sqrt{4x+6}+(2x^2+3x+3)\right)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{-1}{2}} -\left(\frac{4x^4+12x^3+21x^2+14x+3}{2x+1}\right)$$

$$\times\left(\frac{1}{\sqrt{4x+6}+2x^2+3x+3}\right)$$

On effectue la division euclidienne du polynôme du numérateur par celui du dénominateur on obtient ainsi :

$$\lim_{x\to\frac{-1}{2}} \frac{-(2x^3+5x^2+8x+3)}{\sqrt{4x+6}+2x^2+3x+3}$$

$$= \frac{-\left(\frac{-2}{8}+\frac{5}{4}-\frac{8}{2}+3\right)}{\sqrt{4}+\frac{2}{4}-\frac{3}{2}+3} = 0$$

6) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}-3}{x-2}\right)$

$$\times\frac{\sqrt{x-1}-\left(\sqrt{x+2}-3\right)}{\sqrt{x-1}-\left(\sqrt{x+2}-3\right)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\left(\sqrt{x-1}\right)^2-\left(\sqrt{x+2}-3\right)^2}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}+3\right)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{6\sqrt{x+2}-12}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}+3\right)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}\right)\left(\frac{6}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}+3}\right)$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= \lim_{x\to 2}\left(\frac{6}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}+3}\right)$$

$$\times\frac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\left(\frac{6}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}+3}\right)$$

$$\times\frac{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-2^2}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\left(\frac{6}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}+3}\right)$$

$$\times\frac{(x-2)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\left(\frac{6}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}+3}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}\right)$$

$$= \left(\frac{6}{\sqrt{1}-\sqrt{4}+3}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{4}+2}\right) = \frac{3}{4}$$

Solution N° 64 :

1) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{\sqrt{\cos x}-1+\sin x}{\cos x-\cos(3x)}\right)$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\left(\sqrt{\cos x}-1+\sin x\right)\left(\sqrt{\cos x}-1-\sin x\right)}{\left(\cos x-\cos(3x)\right)\left(\sqrt{\cos x}-1-\sin x\right)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\left(\sqrt{\cos x}-1\right)^2-sin^2x}{\left(\cos x-\cos(3x)\right)\left(\sqrt{\cos x}-1-\sin x\right)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos x+cos^2x-2\sqrt{\cos x}}{\left(4\cos x-4cos^3x\right)\left(\sqrt{\cos x}-1-\sin x\right)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\sqrt{\cos x}\left(\sqrt{\cos x}+\cos x\sqrt{\cos x}-2\right)}{4\cos x\left(1-cos^2x\right)\left(\sqrt{\cos x}-1-\sin x\right)}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sqrt{\cos x}\left(\sqrt{\cos x} + \cos x\sqrt{\cos x} - 2\right)}{4\sqrt{\cos x}\sqrt{\cos x} \cdot sin^2x\left(\sqrt{\cos x} - 1 - \sin x\right)}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\left(\sqrt{\cos x} + \cos x\sqrt{\cos x} - 2\right)}{4\, sin^2x\left(\sqrt{\cos x} - 1 - \sin x\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos x}}$$

$$= \frac{(0+0-2)}{4 \cdot 1^2 \cdot (0-1-1)} \cdot \frac{1}{0^+} = +\infty$$

2) $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos x - \sin x}{1 - \sqrt{2}\cos x}\right)$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\left(1 - \sqrt{2}\cos x\right)(\cos x + \sin x)}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{cos^2x - sin^2x}{\left(1 - \sqrt{2}\cos x\right)(\cos x + \sin x)}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{2cos^2x - 1}{\left(1 - \sqrt{2}\cos x\right)(\cos x + \sin x)}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{-\left(1 - \sqrt{2}\cos x\right)\left(1 + \sqrt{2}\cos x\right)}{\left(1 - \sqrt{2}\cos x\right)(\cos x + \sin x)}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{-\left(1 + \sqrt{2}\cos x\right)}{(\cos x + \sin x)} = \frac{-\left(1 + \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}\right)}{\left(\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \frac{-\left(1 + \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = -\sqrt{2}$$

3) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - \cos(3x)}{sin^2(5x)}\right)$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos(3x))}{(3x)^2} \cdot \frac{(5x)^2}{sin^2(5x)} \cdot \frac{(3x)^2}{(5x)^2}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1}\right)^2 \cdot \frac{9}{25} = \frac{9}{50}$$

4) $\lim_{|x| \to +\infty} \left(x^2 + 2x \cdot \sin x\right)$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left(x^2 + 2x \cdot \sin x\right)$$

$On\ a\ :\ -1 \leq \sin x \leq 1\ ;\ \forall x \epsilon \mathbb{R}$

$$\Rightarrow\ -2x \leq 2x \cdot \sin x \leq 2x\ ;\ \forall x \epsilon \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow\ \underbrace{\left(x^2 - 2x\right)}_{\substack{tend\ \ vers\ +\infty \\ quand\ \ x \to \pm\infty}} \leq x^2 + 2x \cdot \sin x\ ;\ \forall x \epsilon \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow\ \lim_{x \to \pm\infty} \left(x^2 + 2x \sin x\right) = +\infty$$

5) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos(2x)}{1 - \sin x}\right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{2\, cos^2x}{1 - \sin x}\right)$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\left(2\, cos^2x\right)(1 + \sin x)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\left(2\, cos^2x\right)(1 + \sin x)}{1 - sin^2x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\left(2\, cos^2x\right)(1 + \sin x)}{cos^2x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} 2(1 + \sin x) = 2\left(1 + \sin\frac{\pi}{2}\right) = 4$$

6) $On\ a\ \ -1 < \sin\left(\frac{2}{x}\right) < 1\ \ ;\ \ \forall x \neq 0$

$$\Rightarrow\ -1 < 2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(\frac{1}{x}\right) < 1\ \ ;\ \ \forall x \neq 0$$

$$\Rightarrow\ \frac{-1}{2} < \cos\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\ \frac{-x}{2} < x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{x}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x\to 0}\left(x\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)=0$$

$$Car \quad : \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-x}{2}\right)=0$$

Solution N° 65 :

1) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{\cos x}-\cos x}{\sin(2x)\cdot\tan(3x)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{\cos x}-\cos x)(\sqrt{\cos x}+\cos x)}{\sin(2x)\cdot\tan(3x)\cdot(\sqrt{\cos x}+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-cos^2 x}{\sin(2x)\cdot\tan(3x)\cdot(\sqrt{\cos x}+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\cos x}{\sin(2x)\cdot\tan(3x)\cdot(\sqrt{\cos x}+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{\sin(2x)\cdot\tan(3x)}\right)\left(\frac{\cos x}{\sqrt{\cos x}+\cos x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{\sin(2x)\cdot\tan(3x)}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

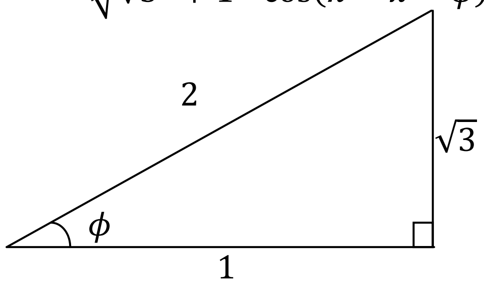
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)\left(\frac{2x}{\sin 2x}\right)\left(\frac{3x}{\tan 3x}\right)\left(\frac{x^2}{6x^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{1}\right)\times\left(\frac{1}{1}\right)\times\left(\frac{1}{1}\right)\times\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{24}$$

2) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\left(\frac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{6x-\pi}\right)$$

$$\sqrt{3}\sin x-\cos x=\sqrt{3}\sin(\pi-x)+1\cos(\pi-x)$$

$$=\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}\ \cos(\pi-x-\phi)$$



$$\cos\phi=\frac{1}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\Longrightarrow\ \phi\equiv\pm\frac{\pi}{3}[2\pi]$$

$$On\ prendra\ \ \phi=\frac{\pi}{3}\ \ Donc\ :$$

$$\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\cos\left(\pi-x-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=2\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)$$

$$=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Longrightarrow\ \lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\left(\frac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{6x-\pi}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{6x-\pi}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{6\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{3}\lim_{\substack{t\to 0\\ t=x-\frac{\pi}{6}}}\left(\frac{\sin t}{t}\right)=\frac{1}{3}\times 1$$

3) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\tan x-1}{2\sin x-\sqrt{2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{tan^2x-1}{(2\sin x)^2-\sqrt{2}^2}\right)\cdot\left(\frac{2\sin x+\sqrt{2}}{\tan x+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{tan^2x-1}{4\ sin^2x-2}\right)\cdot\left(\frac{2\sin\frac{\pi}{4}+\sqrt{2}}{\tan\frac{\pi}{4}+1}\right)$$

$$=\sqrt{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\frac{sin^2x-cos^2x}{cos^2x}}{4\ sin^2x-2}\right)$$

$$=\sqrt{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{sin^2x-cos^2x}{cos^2x\ (4\ sin^2x-2)}\right)$$

$$= \sqrt{2} \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1-2\cos^2 x}{\cos^2 x\,(4-4\cos^2 x-2)}\right)$$

$$= \sqrt{2} \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1-2\cos^2 x}{2\cos^2 x\,(1-2\cos^2 x)}\right)$$

$$= \sqrt{2} \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2\cos^2 x}\right) = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{2\left(\frac{2}{4}\right)} = \sqrt{2}$$

4) $$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{\substack{t\to 0\\ t=x-1}} \left(\frac{\sin t}{t}\right)\times\left(\frac{1}{t+2}\right) = 1\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

5) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sqrt{\frac{\sin x}{1+\cos x}}-1}{x-\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\sqrt{\frac{\sin x}{1+\cos x}}-1\right)\left(\sqrt{\frac{\sin x}{1+\cos x}}+1\right)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\left(\sqrt{\frac{\sin x}{1+\cos x}}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\frac{\sin x}{1+\cos x}-1}{x-\frac{\pi}{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{\sin x}{1+\cos x}}+1}\right)$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x-1-\cos x}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(1+\cos x)}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{\sin x}{1+\cos x}}+1}\right)$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x-1-\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}\right)$$
$$\times\frac{1}{(1+\cos x)\left(\sqrt{\frac{\sin x}{1+\cos x}}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x-1-\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}\right)\times\frac{1}{(1)(\sqrt{1}+1)}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x-1-\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\substack{t\to 0\\ t=x-\frac{\pi}{2}}} \left(\frac{\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)-1-\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{t}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{t\to 0} \left(\frac{\cos t-1+\sin t}{t}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{t\to 0} \left(-t\left(\frac{1-\cos t}{t^2}\right)+\frac{\sin t}{t}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-0\left(\frac{1}{2}\right)+1\right) = \frac{1}{2}$$

Solution N° 66 :

1) $$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{\cos(ax)-\cos(bx)}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{-\sqrt{\cos(ax)-\cos(bx)}}{-x}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{-\sqrt{\cos(ax)-\cos(bx)}}{|x|}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{-\sqrt{\cos(ax)-\cos(bx)}}{\sqrt{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} -\sqrt{\frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} -\sqrt{\frac{\cos(ax)-\cos(bx)-1+1}{x^2}}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= \lim_{x\to 0^-} -\sqrt{b^2\left(\frac{1-\cos(bx)}{(bx)^2}\right) - a^2\left(\frac{1-\cos(ax)}{(ax)^2}\right)}$$

$$= -\sqrt{b^2\left(\frac{1}{2}\right) - a^2\left(\frac{1}{2}\right)} = -\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}}$$

2) $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-3x+1} - \alpha x - \beta\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-3x+1}\right)^2 - (\alpha x+\beta)^2}{\sqrt{x^2-3x+1} + \alpha x + \beta}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(1-\alpha^2)x - (3+2\alpha\beta)x + (1-\beta^2)}{\sqrt{x^2-3x+1} + \alpha x + \beta}$$

Pour que cette limite soit égale à zéro il suffit qu'on ait la limite du numérateur soit un nombre réel et que la limite du dénominateur soit $+\infty$. Ce que traduisent les conditions suivantes :

$$\begin{cases} Et \quad (1-\alpha^2) = 0 \\ Et \quad (3+2\alpha\beta) = 0 \\ Et \quad \alpha \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Et \quad \alpha = \pm 1 \\ Et \quad \beta = \mp\frac{3}{2} \\ Et \quad \alpha \geq 0 \end{cases}$$

Donc on retient le cas où :

$$\alpha = 1 \qquad et \qquad \beta = \frac{-3}{2}$$

Solution N° 67 :

1) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 2\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right) - 2 = 0$

$$= 2(1) - 2 = 0$$

$$Et \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x(x+1)}{x^2-4} = \frac{0}{-4} = 0$$

$$Donc \ : \ \lim_{x\to 0} f(x)$$

2) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(x+1)}{x^2-4}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2+x}{x^2-4}\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2}{x^2}\right) = 1$$

3) $Soit \ x > 0 \ On \ a \ : \ -1 \leq \sin 2x \leq 2$

$$\Rightarrow \frac{-1}{x} \leq \frac{\sin 2x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{x} - 2 \leq \frac{\sin 2x}{x} - 2 \leq \frac{1}{x} - 2$$

4) $On \ a \ : \ \underbrace{\frac{-1}{x} - 2}_{\downarrow \, -2} \leq \frac{\sin 2x}{x} - 2 \leq \underbrace{\frac{1}{x} - 2}_{\downarrow \, -2}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = -2$$

5) $\lim_{x\to(-2)^+} f(x) = \lim_{x\to(-2)^+} \frac{x(x+1)}{x^2-4}$

$$= \lim_{x\to(-2)^+} \frac{x(x+1)}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \lim_{x\to(-2)^+} \left(\frac{x(x+1)}{x-2}\right) \times \lim_{x\to(-2)^+} \left(\frac{1}{x+2}\right)$$

$$= \left(\frac{-2(-2+1)}{-2-2}\right) \times \lim_{t\to 0^+} \left(\frac{1}{t}\right)$$

$$= \frac{-1}{2} \times \frac{1}{0^+} = \frac{-1}{2} \times (+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x\to(-2)^-} f(x) = \ même \ procédé$$

$$= \frac{-1}{2} \times \frac{1}{0^-} = \frac{-1}{2} \times (-\infty) = +\infty$$

Solution N° 68 :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

$$= \lim_{x\to-\infty} x\left(x+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x\left(x+\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x\left(x+|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x\left(x-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x^2\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(1^2-\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)^2\right)}{\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{-1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right) = \frac{-1}{1+\sqrt{1+0}} = \frac{-1}{2}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x}+4x^2-x+5\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}+4-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}\right)$$

$$= (+\infty)(0+4-0+0) = +\infty$$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x+2\sqrt{x}}{x-3}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}{x\left(1-\frac{3}{x}\right)}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1+\frac{2}{\sqrt{x}}}{1-\frac{3}{\sqrt{x}}}\right) = \left(\frac{1+0}{1-0}\right) = 1$$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{x+5}{2x-4}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{x\left(1+\frac{5}{x}\right)}{x\left(2-\frac{4}{x}\right)}}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \sqrt{\left(\frac{1+\frac{5}{x}}{2-\frac{4}{x}}\right)} = \sqrt{\frac{1+0}{2-0}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-3x+5} = \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} |x|\cdot\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} -x\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}} = +\infty\cdot\sqrt{1} = +\infty$$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}}{\sqrt{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}}$$

$$= \sqrt{\frac{2+0}{1+0}} = \sqrt{2}$$

Solution N° 69 :

1) $$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(1+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{3}{\sqrt{x}}}\right) = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

2) $$\lim_{x\to 2} \left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x^2-2x}\right) = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x\left(\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2\right)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{1}{x(\sqrt{x}+\sqrt{2})} = \frac{1}{2(\sqrt{2}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

3) $$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{4x^2-3x}+2x-5\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2-3x}+2x-5\right)\left(\sqrt{4x^2-3x}-(2x-5)\right)}{\left(\sqrt{4x^2-3x}-2x+5\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2-3x}\right)^2-(2x-5)^2}{\left(\sqrt{4x^2-3x}-2x+5\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{17x+25}{\left(\sqrt{x^2\left(4-\frac{3}{x}\right)}-2x+5\right)}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(17+\frac{25}{x}\right)}{\left(\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{4-\frac{3}{x}}-2x+5\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(17+\frac{25}{x}\right)}{\left(|x|\cdot\sqrt{4-\frac{3}{x}}-2x+5\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(17+\frac{25}{x}\right)}{\left(-x\sqrt{4-\frac{3}{x}}-2x+5\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(17+\frac{25}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{4-\frac{3}{x}}-2+\frac{5}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{17+\frac{25}{x}}{-\sqrt{4-\frac{3}{x}}-2+\frac{5}{x}}\right)$$

$$= \frac{17+0}{-\sqrt{4}-2+0} = \frac{-17}{4}$$

4) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+2}}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x+2}{x^4}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x^4}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{1+\frac{2}{x}}{x^3}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} \sqrt{1+\frac{2}{x}} = 0\sqrt{1+0} = 0$$

5) $$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{x^3+1}{2x+3}} = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}{x\left(2+\frac{3}{x}\right)}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2\left(\frac{1+\frac{1}{x^3}}{2+\frac{3}{x}}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2}\sqrt{\frac{1+\frac{1}{x^3}}{2+\frac{3}{x}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} |x|\cdot\sqrt{\frac{1+\frac{1}{x^3}}{2+\frac{3}{x}}} = \lim_{x\to-\infty} -x\sqrt{\frac{1+\frac{1}{x^3}}{2+\frac{3}{x}}}$$

$$= -(-\infty)\sqrt{\frac{1+0}{2+0}} = +\infty$$

6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x+7+\sqrt{4-2x}\right)$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(x+7+\sqrt{4-2x}\right)\left(x+7-\sqrt{4-2x}\right)}{\left(x+7-\sqrt{4-2x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{(x+7)^2-\left(\sqrt{4-2x}\right)^2}{\left(x+7-\sqrt{4-2x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2+16x+45}{x+7-\sqrt{4-2x}}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{16}{x}+\frac{45}{x^2}\right)}{x+7-\sqrt{x^2\left(\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x}\right)}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{16}{x}+\frac{45}{x^2}\right)}{x+7-\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{16}{x}+\frac{45}{x^2}\right)}{x+7-|x|\cdot\sqrt{\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{16}{x}+\frac{45}{x^2}\right)}{x+7+x\sqrt{\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{16}{x}+\frac{45}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{7}{x}+\sqrt{\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x\left(\frac{1+\frac{16}{x}+\frac{45}{x^2}}{1+\frac{7}{x}+\sqrt{\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x}}}\right)$$

$$= (-\infty)\left(\frac{1+0+0}{1+0+\sqrt{0-0}}\right) = -\infty$$

Solution N° 70 :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{\frac{x^4}{x^2-x}}+2x\right)$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{\frac{x^2\cdot x^2}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}}+2x\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{\frac{x^2}{1-\frac{1}{x}}}+2x\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}+2x\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(|x|\cdot\sqrt{\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}+2x\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(-x\cdot\sqrt{\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}+2x\right)$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= \lim_{x\to-\infty} x\left(-\sqrt{\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}+2\right)$$

$$= (-\infty)\left(-\sqrt{\frac{1}{1-0}}+2\right) = (-\infty)\times 1 = -\infty$$

2) $$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-2}{\sqrt{x^2+5x}}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{5}{x}\right)}}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-2}{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{5}{x}}}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-2}{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{5}{x}}}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-2}{-x\sqrt{1+\frac{5}{x}}}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{-x\sqrt{1+\frac{5}{x}}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(1-\frac{2}{x}\right)}{-\sqrt{1+\frac{5}{x}}}$$

$$= \frac{(1-0)}{-\sqrt{1+0}} = -1$$

3) $$\lim_{x\to1}\frac{-2}{|\sqrt{x}-1|} = \lim_{\substack{t\to0\\ t=\sqrt{x}-1}}\frac{-2}{|t|}$$

$$= \begin{cases} oubien & \lim\limits_{\substack{t\to0\\ t>0}}\left(\frac{-2}{t}\right) = -\infty \\ oubien & \lim\limits_{\substack{t\to0\\ t<0}}\left(\frac{-2}{-t}\right) = -\infty \end{cases}$$

$$Donc \quad \lim_{x\to1}\frac{-2}{|\sqrt{x}-1|} = -\infty$$

4) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\sqrt{x^4-x^3}}-x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{\sqrt{x^4-x^3}}-x\right)\left(\sqrt{\sqrt{x^4-x^3}}+x\right)}{\left(\sqrt{\sqrt{x^4-x^3}}+x\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^4-x^3}-x^2}{\sqrt{\sqrt{x^4-x^3}}+x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^4-x^3}-x^2\right)\left(\sqrt{x^4-x^3}+x^2\right)}{\left(\sqrt{\sqrt{x^4-x^3}}+x\right)\left(\left(\sqrt{x^4-x^3}+x^2\right)\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^4-x^3}\right)^2-x^4}{\left(\sqrt{\sqrt{x^4-x^3}}+x\right)\left(\left(\sqrt{x^4-x^3}+x^2\right)\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3}{\left(\sqrt{\sqrt{x^4\left(1-\frac{1}{x}\right)}}+x\right)\left(\left(\sqrt{x^4\left(1-\frac{1}{x}\right)}+x^2\right)\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3}{x\left(\sqrt{\sqrt{\left(1-\frac{1}{x}\right)}}+1\right)x^2\left(\sqrt{\left(1-\frac{1}{x}\right)}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\left(\sqrt{\sqrt{\left(1-\frac{1}{x}\right)}}+1\right)\left(\sqrt{\left(1-\frac{1}{x}\right)}+1\right)}$$

$$= \frac{-1}{\left(\sqrt{\sqrt{(1-0)}+1}\right)\left(\sqrt{(1-0)}+1\right)} = \frac{-1}{4}$$

5) $$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)} = \frac{(\sqrt{0}-1)}{(\sqrt{0}+1)} = -1$$

6) $$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}(x\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}\left(x^2+x\sqrt{x}-\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2-1^2}$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}\left(x^2-1+\sqrt{x}(x-1)\right)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}\left((x-1)(x+1)+\sqrt{x}(x-1)\right)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}\,(x-1)(x+1+\sqrt{x})}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\sqrt{x}\left(x+1+\sqrt{x}\right)$$

$$= \sqrt{1}\left(\sqrt{1}+1+1\right) = 3$$

Solution N° 71 :

1) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x^2+x+4}-2x+1\right) \times \frac{\left(\sqrt{3x^2+x+4}+2x-1\right)}{\left(\sqrt{3x^2+x+4}+2x-1\right)}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{3x^2+x+4}\right)^2-(2x-1)^2}{\left(\sqrt{3x^2+x+4}+2x-1\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2+5x+3}{\left(\sqrt{3x^2+x+4}+2x-1\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2+5x+3}{\left(\sqrt{x^2\left(3+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}+2x-1\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2+5x+3}{\sqrt{x^2}\sqrt{\left(3+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}+2x-1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2+5x+3}{|x|\sqrt{\left(3+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}+2x-1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2+5x+3}{x\sqrt{\left(3+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}+2x-1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-x+5+\frac{3}{x}\right)}{x\left(\sqrt{\left(3+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}+2-\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x+5+\frac{3}{x}}{\sqrt{3+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}+2-\frac{1}{x}}\right)$$

$$= \left(\frac{-\infty+5+0}{\sqrt{3+0+0}+2-0}\right) = -\infty$$

2) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+4x}-3x+8\right) \times \frac{\sqrt{9x^2+4x}+3x-8}{\sqrt{9x^2+4x}+3x-8}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{9x^2+4x}\right)^2-(3x-8)^2}{\sqrt{x^2\left(9+\frac{4}{x}\right)}+3x-8}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{52x-64}{|x|\sqrt{9+\frac{4}{x}}+3x-8}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{52x-64}{x\sqrt{9+\frac{4}{x}}+3x-8}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(52-\frac{64}{x}\right)}{x\left(\sqrt{9+\frac{4}{x}}+3-\frac{8}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{52-\frac{64}{x}}{\sqrt{9+\frac{4}{x}}+3-\frac{8}{x}}\right)$$

$$= \left(\frac{52-0}{\sqrt{9+0}+3-0}\right) = \frac{26}{3}$$

3) $$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x-2}{\sqrt{x^2+5x}}\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x-2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{5}{x}\right)}}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{5}{x}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x-2}{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{5}{x}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{-x\sqrt{1+\frac{5}{x}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-\frac{2}{x}}{-\sqrt{1+\frac{5}{x}}}$$

$$= \frac{1-0}{-\sqrt{1+0}} = -1$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

4) $$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{2-7x}{3x+5}\right)\sqrt{1-2x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(\frac{2}{x}-7\right)}{x\left(3+\frac{5}{x}\right)}\sqrt{1-2x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{\frac{2}{x}-7}{3+\frac{5}{x}}\right)\sqrt{1-2x}$$

$$= \left(\frac{0-7}{3+0}\right)\lim_{\substack{t\to+\infty\\ t=1-2x}} \sqrt{1-2x}$$

$$= \frac{-7}{3}\cdot(+\infty) = -\infty$$

5) $$\lim_{x\to4} \left(\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+12}-\sqrt{x}-2}\right)$$

$$= \lim_{x\to4} \frac{\left(\sqrt{x+5}\right)^2-\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\left(\sqrt{x+12}\right)^2-\left(\sqrt{x}+2\right)^2}\cdot\left(\frac{\sqrt{x+12}+\sqrt{x}+2}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x}+1}\right)$$

$$= \lim_{x\to4} \left(\frac{4-2\sqrt{x}}{8-4\sqrt{x}}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x+12}+\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x}-1}\right)$$

$$= \lim_{x\to4} \frac{1}{2}\left(\frac{4-2\sqrt{x}}{4-2\sqrt{x}}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x+12}+\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x}-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to4} \left(\frac{\sqrt{x+12}+\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x}-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{4+12}+\sqrt{4}-2}{\sqrt{4+5}+\sqrt{4}-1}\right) = \frac{2}{3}$$

Solution N° 72 :

1) $\lim_{x\to\frac{1}{3}} \left|\frac{x^2-6x}{3x-1}\right|$

$$= \lim_{x\to\frac{1}{3}} \left|\frac{x(x-6)}{x\left(x-\frac{1}{3}\right)}\right| = \lim_{x\to\frac{1}{3}} \left|\frac{x-6}{x-\frac{1}{3}}\right|$$

$$= \lim_{x\to\frac{1}{3}} |x-6| \times \lim_{x\to\frac{1}{3}} \frac{1}{\left|x-\frac{1}{3}\right|}$$

$$= \frac{17}{3} \lim_{\substack{t\to 0^\pm \\ t=x-\frac{1}{3}}} \frac{1}{|t|} = \frac{17}{3}\left(\frac{1}{|0^\pm|}\right) = +\infty$$

2) $\lim_{x\to\left(\frac{-3}{2}\right)^+} \frac{3|x-5|+2}{4x^2-9}$

$$= \lim_{x\to\left(\frac{-3}{2}\right)^+} \left(\frac{3|x-5|+2}{2x-3}\right)\left(\frac{1}{2x+3}\right)$$

$$= \frac{-67}{24} \lim_{\substack{t\to 0^+ \\ t=x+\frac{3}{2}}} \frac{1}{t} = \frac{-67}{24}(+\infty) = -\infty$$

3) $\lim_{x\to -4} \frac{x+5}{|x^2+4x|}$

$$= \lim_{x\to -4} \left(\frac{x+5}{|x|}\right)\cdot\left(\frac{1}{|x+4|}\right)$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{\substack{t\to 0^\pm \\ t=x+4}} \frac{1}{|t|} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{0^+} = +\infty$$

4) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{x^2+|x|}{x^2-|x|}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{|x|\left(\frac{x^2}{|x|}+1\right)}{|x|\left(\frac{x^2}{|x|}-1\right)}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\pm x+1)}{(\pm x-1)} = \frac{(\pm 0+1)}{(\pm 0-1)} = -1$$

5) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-3}{|-5x+7|} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(2-\frac{3}{x}\right)}{|x|\cdot\left|-5+\frac{7}{x}\right|}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(2-\frac{3}{x}\right)}{x\left|-5+\frac{7}{x}\right|}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(2-\frac{3}{x}\right)}{\left|-5+\frac{7}{x}\right|} = \frac{(2-0)}{|-5+0|} = \frac{2}{5}$$

6) $\lim_{x\to 4} \left(\frac{|x^2-2x|-8}{x^2-5x+4}\right)$

Quand $x \to 4$ alors on peut légalement considérer $x > 2$ puisque x prend des valeurs au voisinage de 4.

$$D'où \quad x(x-2) > 0$$
$$c-à-d \quad x^2-2x > 0$$
$$Ainsi \quad |x^2-2x| = x^2-2x$$

Ainsi notre limite devient alors :

$$\lim_{x\to 4} \left(\frac{x^2-2x-8}{x^2-5x+4}\right) = \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(x+2)}{(x-4)(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 4} \left(\frac{x+2}{x-1}\right) = \left(\frac{4+2}{4-1}\right) = 2$$

Solution N° 73 :

1) $\lim_{x\to 4^-} \left(\frac{x}{x-4}\right)$

$$= \lim_{\substack{t\to 0^- \\ t=x-4}} \left(\frac{t+4}{t}\right) = \lim_{t\to 0^-} \left(1+\frac{4}{t}\right)$$

$$= 1 + \frac{4}{0^-} = -\infty$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

2) $$\lim_{x\to 3^-}\left(\frac{2x^2-x+1}{(3-x)(-1-x)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 3^-}\left(\frac{2x^2-x+1}{-1-x}\right)\left(\frac{1}{3-x}\right)$$

$$=\left(\frac{18-3+1}{-1-3}\right)\lim_{\substack{t\to 0^+\\ t=3-x}}\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$=-4\left(\frac{1}{0^+}\right)=-4(+\infty)=-\infty$$

3) $$\lim_{x\to 0^+}\left(x\sqrt{x}+2\right)=0\sqrt{0}+2=2$$

4) $$\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{2-3x}{2-x}\right)=\lim_{x\to 2^+}(2-3x)\times\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{2-x}\right)$$

$$=-4\times\lim_{\substack{t\to 0^-\\ t=2-x}}\left(\frac{1}{t}\right)=-4(-\infty)=+\infty$$

5) $$\lim_{x\to 3^+}\frac{-7}{\sqrt{x-3}}=\lim_{\substack{t\to 0^+\\ t=x-3}}\frac{-7}{\sqrt{t}}=\frac{-7}{0^+}=-\infty$$

6) $$\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{x^3-8}{x^2-4x+4}\right)$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{x^2+2x+4}{x-2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 2^+}(x^2+2x+4)\times\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{x-2}\right)$$

$$=12\lim_{\substack{t\to 0^+\\ t=x-2}}\left(\frac{1}{t}\right)=12\left(\frac{1}{0^+}\right)=+\infty$$

Solution N° 74 :

1) $$\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)^2}{(x^2-1)^5}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)^2}{(x-1)^5(x+1)^5}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{(x+1)^5}\times\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{(x-1)^3}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^5\lim_{\substack{t\to 0^-\\ t=x-1}}\left(\frac{1}{t^3}\right)=\frac{1}{32}\left(\frac{1}{0^-}\right)=-\infty$$

2) $$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x^3-1}{x^2-x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x^2+x+1}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}(x^2+x+1)\times\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=1\left(\frac{1}{0^+}\right)=+\infty$$

3) $$\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{\sqrt{x^2-9}+\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x-3}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{x^2-9}}{\sqrt{x-3}}+\lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x-3}}$$

$$=\lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}}$$

$$+\lim_{x\to 3^+}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{\sqrt{x-3}\,(\sqrt{x}+\sqrt{3})}$$

$$=\lim_{x\to 3^+}\sqrt{x+3}+\lim_{x\to 3^+}\frac{(x-3)}{\sqrt{x-3}\,(\sqrt{x}+\sqrt{3})}$$

$$=\lim_{x\to 3^+}\sqrt{x+3}+\lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}\,(\sqrt{x}+\sqrt{3})}$$

$$=\lim_{x\to 3^+}\sqrt{x+3}+\lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}$$

$$=\sqrt{6}+\frac{\sqrt{3-3}}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}=\sqrt{6}$$

4) $\lim_{x\to(-2)^+}\left(\frac{4x^2-x+5}{x^2-4}\right)$

$$=\lim_{x\to(-2)^+}\left(\frac{4x^2-x+5}{x-2}\right)\times\lim_{x\to(-2)^+}\left(\frac{1}{x+2}\right)$$

$$=\left(\frac{16+2+5}{-2-2}\right)\lim_{\substack{t\to0^+\\t=x+2}}\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{-23}{4}\left(\frac{1}{0^+}\right)=-\infty$$

5) $\lim_{x\to1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^3-1}\right)$

$$=\lim_{x\to1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}\right)$$

$$=\lim_{x\to1^+}\left(\frac{1}{x-1}\right)\left(1-\frac{1}{x^2+x+1}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{0^+}\right)\left(1-\frac{1}{1+1+1}\right)=+\infty$$

6) $\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2-\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x}-\sqrt{2x^2}}\right)$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{(2)^2-\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{2x^2}\right)^2}\times\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2x^2}}{2+\sqrt{x^2+4}}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{-x^2}{x-2x^2}\right)\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2x^2}}{2+\sqrt{x^2+4}}\right)$$

$$=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{x}{x}\right)\left(\frac{-x}{1-2x}\right)\left(\frac{\sqrt{x}}{1}\right)\left(\frac{1+\sqrt{2x}}{2+\sqrt{x^2+4}}\right)$$

$$=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{-x}{1-2x}\right)\left(\frac{\sqrt{x}}{1}\right)\left(\frac{1+\sqrt{2x}}{2+\sqrt{x^2+4}}\right)$$

$$=\left(\frac{-0}{1-0}\right)\left(\frac{\sqrt{0}}{1}\right)\left(\frac{1+\sqrt{0}}{2+\sqrt{4}}\right)=0$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Solution N° 75 :

1) $\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin(2x)-2\sin x}{x^3}\right)$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{2\sin x\cdot\cos x-2\sin x}{x^3}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}2\left(\frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{\cos x-1}{x^2}\right)$$

$$=2(1)\left(\frac{-1}{2}\right)=-1$$

2) $\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1-\cos\sqrt{x}}{\sin x}\right)$

$$=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x}\right)\left(\frac{x}{\sin x}\right)$$

$$=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1-\cos\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}\right)^2}\right)\cdot\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}\right)$$

$$=\lim_{\substack{t\to0^+\\t=\sqrt{x}}}\left(\frac{1-\cos t}{t^2}\right)\cdot\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{1}\right)=\frac{1}{2}$$

3) $\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos(4x)}{\tan 2x\cdot\sin x}\right)$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos 4x}{(4x)^2}\right)\left(\frac{2x}{\tan 2x}\right)\left(\frac{x}{\sin x}\right)\left(\frac{8}{1}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{8}{1}\right)=4$$

4) $\lim_{x\to+\infty}x^2\left(1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{(1/2)^2}\right)$$

$$= \lim_{\substack{t \to 0^+ \\ t=\frac{1}{x}}} \left(\frac{1-\cos t}{t^2}\right) = \frac{1}{2}$$

5) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{2-\sqrt{x+4}}{\tan(5x)}\right)$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(2-\sqrt{x+4})(2+\sqrt{x+4})}{\tan(5x)\cdot(2+\sqrt{x+4})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2^2-(\sqrt{x+4})^2}{(\tan(5x))(2+\sqrt{x+4})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-x}{(\tan(5x))(2+\sqrt{x+4})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{5x}{\tan(5x)}\right)\left(\frac{-1}{2+\sqrt{x+4}}\right)\frac{1}{5}$$

$$= \left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{-1}{2+\sqrt{4}}\right)\frac{1}{5} = \frac{-1}{20}$$

6) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x - \tan x}{x^3}\right)$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x - \frac{\sin x}{\cos x}}{x^3}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)\left(1-\frac{1}{\cos x}\right)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)\left(\frac{-1}{cos^2 x}\right)$$

$$= (1)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-1}{1^2}\right) = \frac{-1}{2}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Solution N° 76 :

1) $\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)$

$$= \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{(\cos x)(1-\sin x)}$$

$$= \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{1-sin^2 x}{(\cos x)(1-\sin x)}$$

$$= \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{cos^2 x}{(\cos x)(1-\sin x)}$$

$$= \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \left(\frac{\cos x}{1-\sin x}\right)$$

$$= \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\right)$$

$$= \lim_{\substack{t \to 0^- \\ t=\frac{\pi}{2}-x}} \left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)$$

$$= \lim_{t \to 0^-} \left(\frac{\sin t}{t}\right)\left(\frac{t^2}{1-\cos t}\right)\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$= (1)\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{1}{0^-}\right) = -\infty$$

2) $\lim_{x \to \left(\frac{-\pi}{2}\right)^+} \tan x = \lim_{x \to \left(\frac{-\pi}{2}\right)^+} -\tan(-x)$

$$= -\lim_{\substack{t \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^- \\ t=-x}} \tan t = -(+\infty) = -\infty$$

3) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x}{2x-\pi}\right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$

$$= \frac{-1}{2} \lim_{\substack{t \to 0 \\ t=\frac{\pi}{2}-x}} \left(\frac{\sin t}{t}\right) = \left(\frac{-1}{2}\right)(1) = \frac{-1}{2}$$

4) $\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan x = +\infty$; *selon le cours*

5) $$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t=x-1}} \frac{\sin(\pi t + \pi)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{-\sin(\pi t)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \left(\frac{\sin \pi t}{\pi t}\right)\left(\frac{-\pi}{1}\right) = (1)\left(\frac{-\pi}{1}\right) = -\pi$$

Solution N° 77 :

1) $$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \left(\frac{x^3 - 1}{x - 1}\right)$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x^2 + x + 1) = (1+1+1) = 3 \in \mathbb{R}$$

Donc f admet un prolongement par continuité au point $x_0 = 1$ noté $\tilde{f}$ et définie ainsi :

$$\begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x) \; ; \; \forall x \neq 1 \\ \tilde{f}(1) = 3 \end{cases}$$

2) $$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{1+\sin x}\right)^2 - 1^2}{x\left(\sqrt{1+\sin x} + 1\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x\left(\sqrt{1+\sin x} + 1\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1+\sin x} + 1}\right)$$

$$= (1)\left(\frac{1}{\sqrt{1+\sin 0} + 1}\right) = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$$

Donc f admet un prolongement par continuité au point $x_0 = 0$ noté $\tilde{f}$ définie ainsi :

$$\begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x) \; ; \; \forall x \neq 0 \\ \tilde{f}(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

3) $$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \left(\frac{x^3 - 2x^2 + 3x + 6}{x + 1}\right)$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x^2 - 3x + 6)}{(x+1)} \; ; \; \Big| \textit{Division euclidienne}$$

$$= \lim_{x \to -1} (x^2 - 3x + 6) = 1 + 3 + 6 = 10 \in \mathbb{R}$$

Donc f admet un prolongement par continuité au point $x_0 = -1$ noté $\tilde{f}$ définie ainsi :

$$\begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x) \; ; \; \forall x \neq -1 \\ \tilde{f}(-1) = 10 \end{cases}$$

4) $$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{\cos x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{x^2}{\cos x - 1}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{-1}{\frac{\cos x - 1}{x^2}}\right)$$

$$= (1)\left(\frac{-1}{\frac{1}{2}}\right) = -2 \in \mathbb{R}$$

Donc f admet un prolongement par continuité au point $x_0 = 0$ noté $\tilde{f}$ définie ainsi :

$$\begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x) \; ; \; \forall x \neq 0 \\ \tilde{f}(0) = -2 \end{cases}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Solution N° 78 :

1) $\lim_{x\to-3} f(x) = \lim_{x\to-3} \frac{|x^2+4x|-3}{x+3}$

Comme $x \to -3$ Alors on peut prendre $x<0$ et $x>-4$ car x prend ses valeurs dans un voisinage de -3.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad x<0 \quad et \quad x+4>0 \\ &\Rightarrow \quad x(x+4)<0 \\ &\Rightarrow \quad x^2+4x<0 \\ &\Rightarrow \quad |x^2+4x| = -x^2-4x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-3} f(x) = \lim_{x\to-3} \frac{-x^2-4x-3}{x+3}$$

$$= \lim_{x\to-3} \frac{(x+3)(-x-1)}{(x+3)} = \lim_{x\to-3}(-x-1)$$

$$= 3-1 = 2 \in \mathbb{R}$$

Donc f admet un prolongement par continuité au point $x_0 = 3$ noté $\tilde{f}$ définie ainsi :

$$\begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x) \quad ; \quad \forall x \neq -3 \\ \tilde{f}(-3) = 2 \end{cases}$$

2) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\left(\frac{x^3-a^3}{x-a}\right) \quad ; \quad a\in\mathbb{R}$

$$= \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{(x-a)}$$

$$= \lim_{x\to a}(x^2+ax+a^2) = 3a^2 \in \mathbb{R}$$

Donc f admet un prolongement par continuité au point $x_0 = a$ noté $\tilde{f}$ définie ainsi :

$$\begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x) \quad ; \quad \forall x \neq a \\ \tilde{f}(a) = 3a^2 \end{cases}$$

3) $\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2} \frac{(x-2)^2}{4x-x^3}$

$$= \lim_{x\to2} \frac{(x-2)(x-2)}{x(4-x^2)}$$

$$= \lim_{x\to2} \frac{(x-2)(x-2)}{x(2-x)(2+x)}$$

$$= \lim_{x\to2} \frac{(x-2)}{x(2+x)} = \frac{2-2}{2(2+2)} = 0 \in \mathbb{R}$$

Donc f admet un prolongement par continuité au point $x_0 = 2$ noté $\tilde{f}$ définie ainsi :

$$\begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x) \quad ; \quad \forall x \neq 2 \\ \tilde{f}(2) = 0 \end{cases}$$

4) $\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} (x-1)\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)$

$On\ a \quad : \quad \left|\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)\right| < 1 \quad ; \quad \forall x \neq 1$

$$\Rightarrow \underbrace{0}_{\downarrow\ 0} < \left|(x-1)\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)\right| < \underbrace{|x-1|}_{\downarrow\ 0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to1} (x-1)\sin\left(\frac{1}{x-1}\right) = 0 \in \mathbb{R}$$

Donc f admet un prolongement par continuité au point $x_0 = 1$ noté $\tilde{f}$ définie ainsi :

$$\begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x) \quad ; \quad \forall x \neq 1 \\ \tilde{f}(1) = 0 \end{cases}$$

Solution N° 79 :

1) $On\ pose$: $f(x) = u \circ v(x)$; $\forall x \neq \pm 1$

$Avec \quad u(x) = \sin x \qquad et \qquad v(x) = \frac{2x+1}{x^2-1}$

La fonction u est continue sur $\mathbb{R}$ selon le cours. Et la fonction v est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{1\,;\,-1\}$.

Si $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$ Alors $v(x) = \frac{2x+1}{x^2-1} \in \mathbb{R}$

D'où $v(\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}) \subseteq \mathbb{R}$

Donc $f = u \circ v$ est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$

2) on pose $f(x) = u \circ v(x) \;\;;\;\; \forall x \epsilon \mathbb{R}$

Avec : $u(x) = \cos x \quad et \quad v(x) = \sqrt{x^2+1}$

La fonction u est continue sur $\mathbb{R}$ d'après le cours et la fonction v est continue sur $\mathbb{R}$ aussi.

Si $x \epsilon \mathbb{R}$ Alors $v(x) = \sqrt{x^2+1} \,\epsilon\, \mathbb{R}$
Donc $v(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$

Donc $f = u \circ v$ est continue sur $\mathbb{R}$.

3) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-3}{x+2}}$

$$D_f = \left\{ x\epsilon\mathbb{R} \;\;;\;\; x+2 \neq 0 \quad et \quad \frac{x-3}{x+2} \geq 0 \right\}$$

$$= \left\{ x\epsilon\mathbb{R} \;\;;\;\; \left| \begin{array}{c} x-3 \leq 0 \quad et \quad x+2<0 \\ oubien \\ x-3 \geq 0 \quad et \quad x+2>0 \end{array} \right. \right\}$$

$$= \left\{ x\epsilon\mathbb{R} \;\;;\;\; \left| \begin{array}{c} x \leq 3 \quad et \quad x<-2 \\ oubien \\ x \geq 3 \quad et \quad x>-2 \end{array} \right. \right\}$$

$$= \left\{ x\epsilon\mathbb{R} \;\;;\;\; \left| \begin{array}{c} oubien \quad x<-2 \\ \\ oubien \quad x \geq 3 \end{array} \right. \right\}$$

$$=]-\infty,-2[\;\cup\; [3,+\infty[$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

On pose $f(x) = u \circ v(x) \;\;;\;\; \forall x \epsilon D_f$

$$Avec \;:\; u(x) = \sqrt{x} \quad et \quad v(x) = \frac{x-3}{x+2}$$

La fonction u est continue sur $\mathbb{R}^+$ d'après le cours et la fonction v est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ Donc v est continue sur $]-\infty,-2[\;\cup\;[3,+\infty[\;\subset\;\mathbb{R}\backslash\{-2\}$

Si $x \in\,]-\infty,-2[\,\cup\,[3,+\infty[$
Alors $x<-2 \;\; ou \;\; x \geq 3$

$$\Rightarrow \quad x+2<0 \quad ou \quad x-3 \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} si \quad x+2<0 \quad alors \quad x-3 \leq 0 \\ si \quad x-3 \geq 0 \quad alors \quad x+2>0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} oubien \quad \dfrac{x-3}{x+2} \geq 0 \\ \\ oubien \quad \dfrac{x-3}{x+2} \geq 0 \end{array} \right. \;;\; même \;\; résultat$$

$$\Rightarrow \quad oubien \quad \frac{x-3}{x+2} \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad v(x) \in \mathbb{R}^+$$

$$\Rightarrow \quad v(\,]-\infty,-2[\,\cup\,[3,+\infty[\,) \subseteq \mathbb{R}^+$$

D'où finalement $f = u \circ v$ est continue sur $]-\infty,-2[\,\cup\,[3,+\infty[$.

4) $f(x) = \sqrt{1-\sin x}$

$D_f = \{\, x\epsilon\mathbb{R} \;\;;\;\; 1-\sin x \geq 0 \,\}$
$= \{\, x\epsilon\mathbb{R} \;\;;\;\; \sin x \leq 1 \quad toujours\ vraie \,\}$
$= \mathbb{R}\ tout\ entier$

On pose $f(x) = u \circ v(x) \;\;;\;\; \forall x \epsilon \mathbb{R}$
Avec $u(x) = \sqrt{x} \;\; et \;\; v(x) = 1-\sin x$

On a la fonction v est continue sur $\mathbb{R}$ et la fonction u est continue sur $\mathbb{R}^+$

Si $x\epsilon\mathbb{R}$ Alors $v(x) = \sqrt{x} \epsilon \mathbb{R}^+$

Donc $v(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^+$.

D'où finalement on déduit que la composition $u \circ v = f$ est bien continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Solution N° 80 :

1) on pose $f(x) = u \circ v(x)$; $\forall x\epsilon\mathbb{R}$

$Avec$: $u(x) = \cos x$; $v(x) = 2x^2 - 3x + 4$

On a v est continue sur $\mathbb{R}$ car polynôme Et on a u est continue sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} x \epsilon \mathbb{R} &\Longrightarrow (2x^2 - 3x + 4) \epsilon \mathbb{R} \\ &\Longrightarrow v(x) \epsilon \mathbb{R} \\ &\Longrightarrow v(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R} \end{aligned}$$

D'où $u \circ v$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2) $f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{x}\right)$

$$D_f = \left\{ x\epsilon\mathbb{R} \ ; \ \frac{\pi}{x} \neq \frac{\pi}{2}[\pi] \right\}$$

$$= \left\{ x\epsilon\mathbb{R} \ ; \ \frac{\pi}{x} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ ; \ k\epsilon\mathbb{Z} \right\}$$

$$= \left\{ x\epsilon\mathbb{R} \ ; \ \frac{1}{x} \neq \frac{1}{2} + k \ ; \ k\epsilon\mathbb{Z} \right\}$$

$$= \left\{ x\epsilon\mathbb{R} \ ; \ x \neq \frac{2}{2k+1} \ ; \ k\epsilon\mathbb{Z} \right\}$$

$$= \mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{2}{2k+1} \ ; \ k\epsilon\mathbb{Z} \right\}$$

On pose : $f(x) = u \circ v(x)$; $\forall x\epsilon D_f$

$Avec$: $u(x) = \tan x$; $v(x) = \frac{\pi}{x}$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

On a v est continue sur $\mathbb{R}^*$.

Donc v *est continue sur* $\mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{2}{2k+1} \ ; k\epsilon\mathbb{Z} \right\}$

Car $\mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{2}{2k+1} \ ; \ k\epsilon\mathbb{Z} \right\} \subseteq \mathbb{R}^*$

Car $\frac{2}{2k+1} \neq 0$; $\forall k\epsilon\mathbb{Z}$

$$\Longrightarrow x \neq \frac{2}{2k+1} \ ; \ k\epsilon\mathbb{Z}$$

$$\Longrightarrow \frac{\pi}{x} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ ; \ k\epsilon\mathbb{Z}$$

$$\Longrightarrow v(x) \epsilon \mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{2}{2k+1} \ ; k\epsilon\mathbb{Z} \right\}$$

$$\Longrightarrow v\left(\mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{2}{2k+1} \ ; \ k\epsilon\mathbb{Z} \right\} \right) \subseteq \mathbb{R} \backslash \left\{ \mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ ; \ k\epsilon\mathbb{Z} \right\} \right\}$$

Donc d'après le théorème de la continuité de la fonction composée on en déduit que la composition $u \circ v$ est continue sur :

$$\mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{2}{2k+1} \ ; \ k\epsilon\mathbb{Z} \right\}$$

3) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1 + sin^2 x}}$

$$D_f = \left\{ x\epsilon\mathbb{R} \ ; \ \frac{x}{1 + sin^2 x} \geq 0 \ et \ \underbrace{1 + sin^2 x \neq 0}_{\substack{toujours \\ vérifiée}} \right\}$$

$$= \{ x\epsilon\mathbb{R} \ ; \ x \geq 0 \} = \mathbb{R}^+$$

On pose $f(x) = u \circ v\,(x)$; $\forall x \geq 0$

$Avec$: $u(x) = \sqrt{x}$; $v(x) = \frac{x}{1 + sin^2 x}$

On a v est continue sur $\mathbb{R}$ Donc v est continue sur $\mathbb{R}^+$ car $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$

On a u est continue sur $\mathbb{R}^+$; (cours)

$$x \in \mathbb{R}^+ \implies v(x) = \sqrt{x} \in \mathbb{R}^+$$
$$\implies v(\mathbb{R}^+) \subseteq \mathbb{R}^+$$

D'où finally $u \circ v$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

4) $f(x) = \cos(tan^2 x)$

$$D_f = \left\{ x\epsilon\mathbb{R} \ ; \ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ ; \ k\epsilon\mathbb{Z} \right\}$$
$$= \mathbb{R}\backslash\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ ; \ k\epsilon\mathbb{Z} \right\}$$

On pose : $f(x) = u \circ v(x)$; $\forall x\epsilon D_f$

Avec : $u(x) = \cos x$; $v(x) = tan^2 x$

On a v *est continue sur* $\mathbb{R}\backslash\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ ; \ k\epsilon\mathbb{Z} \right\}$

Et u *est continue sur* $\mathbb{R}$

$$x \in \mathbb{R}\backslash\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; \ k\epsilon\mathbb{Z} \right\} \implies v(x) = tan^2 x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Donc } v\left(\mathbb{R}\backslash\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ ; \ k\epsilon\mathbb{Z} \right\} \right) \subseteq \mathbb{R}$$

Donc la composition $u \circ v$ *est continue*

Sur l'ensemble $\mathbb{R}\backslash\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ ; \ k\epsilon\mathbb{Z} \right\}$

Solution N° 81 :

1) $$\lim_{x\to+\infty} \left(x - 2\sqrt{x} + \frac{1}{x} \right)^3 = +\infty$$

2) $$\lim_{x\to0} \tan\left(\frac{\pi \sin x}{3x} \right) = \sqrt{3}$$

3) $$\lim_{x\to-\infty} \cos\left(\frac{\pi x + 1}{x + 2} \right) = -1$$

4) $$\lim_{x\to+\infty} \cos\left(\sin\left(\frac{1}{x} \right) \right) = 1$$

5) $$\lim_{x\to+\infty} \cos\left(\pi\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \right) = -1$$

6) $$\lim_{x\to0} \sin\left(\pi\left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right) \right) = 1$$

Solution N° 82 :

1) $f(x) = x^2 + 2$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est un polynôme Donc f est continue sur $[-1,3] \subset \mathbb{R}$. Pour déterminer $f([-1,3])$ on doit d'abord déterminer le sens de variations de f sur $[-1,3]$.

$$f'(x) = 2x \ ; \ \forall x\epsilon\mathbb{R}$$

$$\left| \begin{array}{lll} x = 0 & \Leftrightarrow & f'(x) = 0 \\ x > 0 & \Leftrightarrow & f'(x) > 0 \\ x < 0 & \Leftrightarrow & f'(x) < 0 \end{array} \right.$$

Donc la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[-1,0]$ et croissante sur $[0,3]$.

D'où
$$f([-1,3]) = f([-1,0] \cup [0,3])$$
$$= f([-1,0]) \cup f([0,3])$$
$$= [f(0), f(-1)] \cup [f(0), f(3)]$$
$$= [2,3] \cup [2,11]$$
$$= [2,11]$$

2) $f(x) = \dfrac{x-4}{x-2}$

f est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ car quotient bien défini de deux polynômes (fraction rationnelle) Donc f est continue sur $[5,8] \subset \mathbb{R}\backslash\{2\}$ la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ car :

$$f'(x) = \frac{2}{(x-2)^2} > 0 \ ; \ \forall x \neq 2$$

On peut montrer que f est décroissante

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

En déterminant le signe du taux de variation $\left(\frac{f(a)-f(b)}{a-b}\right)$

D'où finalement :

$$f([5,8]) = [f(5)\,;f(8)] = \left[\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}\right]$$

3) $f(x) = 2x\sqrt{x+1}$

La fonction f est continue sur $[-1,+\infty[= D_f$ car c'est un produit d'un polynôme et d'une composition bien définie et continue. Donc f est continue sur $[3,5] \subset [-1,+\infty[$. On a aussi f est une fonction croissante sur $[3,5]$.

$$\begin{aligned} car\ si\ \ x>y\ &\Rightarrow 2x>2y\ \ et\ \ x+1>y+1 \\ &\Rightarrow\ 2x>2y\quad et\quad \sqrt{x+1}>\sqrt{y+1} \\ &\Rightarrow\ 2x\sqrt{x+1}>2y\sqrt{y+1} \\ &\Rightarrow\ f(x)>f(y) \\ &\Rightarrow\ \left(\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right)>0 \\ &\Rightarrow\ f\ est\ strictement\ \nearrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ f([3,5]) = [f(3),f(5)] = \left[12,10\sqrt{6}\right]$$

4) $f(x) = \tan x$

On a la fonction f est continue sur chaque intervalle de l'ensemble :

$$\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\ \ ;\ \ k\epsilon\mathbb{Z}\right\}$$

On a aussi la fonction f est croissante sur chaque intervalle de l'ensemble :

$$\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\ \ ;\ \ k\epsilon\mathbb{Z}\right\}$$

$Car\ \ f'(x) = 1+tan^2x>0$

$$D'où\ \ f\left(\left]\frac{-\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[\right) = \left]\lim_{x\to\frac{-\pi}{2}^+} f(x)\ ;\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)\right[$$

$$=]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$$

5) $f(x) = \begin{cases} x+3\ \ ;\ \ x\leq 2 \\ x^2+1\ \ ;\ \ x>2 \end{cases}$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier car elle est définie par morceaux de polynômes. Donc f est continue sur l'intervalle $[-3,5] \subset \mathbb{R}$.

La fonction f est strictement croissante sur l'ensemble $\mathbb{R}$ car :

$$\begin{vmatrix} Si\ \ x\leq 2\ \ \ Alors\ \ f'(x)=1>0 \\ Si\ \ x>2\ \ \ Alors\ \ f'(x)=2x>0 \end{vmatrix}$$

Donc : $f([-3,5]) = [f(-3),f(5)] = [0,26]$

Solution N° 83 :

Soit : $\varphi(x) = x^4+x^2+4x-1$

On a φ est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est un polynôme Donc φ est continue sur l'intervalle $[0,1]$

On a encore $\varphi(0) = -1\ \ et\ \ \varphi(1) = 5$
Donc : $\varphi(0)\cdot\varphi(1) < 0$

D'où selon le théorème des valeurs intermédiaires on déduit que :

$$\exists\ \alpha\ \epsilon\ [0,1]\ \ ;\ \ \varphi(\alpha) = 0$$

C'est à dire que l'équation :

$$x^4+x^2+4x-1 = 0$$

Admet au moins une solution $\alpha\ \epsilon\ [0,1]$

Soit la fonction φ définie ainsi :

$$\varphi(x) = \tan x + x^2 - 2 \quad ; \quad \forall x \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$$

On a φ est continue sur l'ensemble :

$$\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ ; \ k\epsilon\mathbb{Z}\right\}$$

Donc φ est continue sur $\left]\frac{\pi}{4} \ ; \ \frac{\pi}{3}\right[$ car :

$$\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right[\subset \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ ; \ k\epsilon\mathbb{Z}\right\}$$

$$Or, \quad \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - 2$$

$$= \left(\frac{\pi^2}{16} - 1\right) < 0 \quad car \quad \pi < 4$$

$$Et, \quad \varphi\left(\frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) + \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 - 2$$

$$= \left(\sqrt{3} - 2 + \frac{\pi^2}{9}\right) < 0$$

$$Donc \quad \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \varphi\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0$$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires on en déduit que :

$$\exists \ \alpha \ \epsilon \ \left]\frac{\pi}{4} \ ; \ \frac{\pi}{3}\right[\quad ; \quad \varphi(\alpha) = 0$$

C'est à dire que l'équation :

$$\tan x + x^2 - 2 = 0$$

Admet au moins une solution $\alpha \ \epsilon \ \left]\frac{\pi}{4} \ ; \ \frac{\pi}{3}\right[$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Solution N° 84 :

1) D'abord f est continue sur $[1, +\infty[$ car c'est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

On aussi f est strictement sur $[1, +\infty[$
Car $f'(x) = 2x - 2 \geq 0 \quad ; \quad \forall x \geq 1$

Donc f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle $J = f([1, +\infty[)$

$$J = f([1, +\infty[) = \left[f(1) \ ; \ \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[$$

$$= [4, +\infty[$$

$$Donc \ f : \ [1, +\infty[\ \longmapsto \ [4, +\infty[\ est \ bijective$$

$$y \ \epsilon \ [4, +\infty[\ \ alors \ \ \exists! \ x \ \epsilon \ [1, +\infty[: \ f(x) = y$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 5 = y$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 5 - y = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{2 \pm 2\sqrt{y-4}}{2} \quad ; \quad \Delta = 4(y-4) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 1 \pm \sqrt{y-4}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 1 + \sqrt{y-4} \ \epsilon \ [1, +\infty[$$

D'où finalement :

$$f^{-1} : \ [4, +\infty[\ \longmapsto \ [1, +\infty[$$
$$y \ \longmapsto 1 + \sqrt{y-4}$$

2) D'abord f est continue sur $]-\infty, 2[$ car c'est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$

On a aussi f est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty, 2[$ car :

$$f'(x) = -2x + 4 \quad ; \quad \forall x < 2$$

Donc f réalise une bijection de $]-\infty, 2[$
Sur $J = f(\,]-\infty, 2[\,) = \,]-\infty, 0[$

$$Donc\ f:\ ]-\infty,2[\ \mapsto\ ]-\infty,0[\ est\ bijective$$

$$y\ \epsilon\ ]-\infty,0[\ \ alors\ \ \exists!\,x\ \epsilon\ ]-\infty,2[\ :\ f(x)=y$$

$$\Leftrightarrow\quad 4x-x^2=y$$

$$\Leftrightarrow\quad -x^2+4x-y=0\quad ;\quad \Delta=16-4y\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\quad x=\frac{-4\pm 2\sqrt{4-y}}{-2}\quad ;\quad \Delta=16-4y\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\quad x=2\pm\sqrt{4-y}$$

$$\Leftrightarrow\quad x=2-\sqrt{4-y}\ \epsilon\ ]-\infty,2[$$

D'où finalement :

$$\begin{aligned} f^{-1}:\ ]-\infty,0[\ &\mapsto\ ]-\infty,2[\\ y\ &\mapsto 2-\sqrt{4-y} \end{aligned}$$

D'abord f est continue sur l'ensemble :

$$D_f=]-\infty,0]\cup[1,+\infty[$$

Car c'est une somme d'une composition bien définie et continue $\sqrt{x^2-x}$ et un polynôme. Donc f est continue sur $]-\infty,0]\subset]-\infty,0]\cup[1,+\infty[$.

On a aussi f est une fonction strictement décroissante sur $]-\infty,0]$ car Si $x,y\ \epsilon\ ]-\infty,0]$; $x>y$ Alors :

$$\Longrightarrow\quad x>y\quad et\quad x-1>y-1$$

$$\Longrightarrow\quad x(x-1)<y(y-1)$$

$$\Longrightarrow\quad \sqrt{x(x-1)}<\sqrt{y(y-1)}\quad et\quad -x<-y$$

$$\Longrightarrow\quad \sqrt{x^2-x}-x<\sqrt{y^2-y}-y$$

$$\Longrightarrow\quad f(x)<f(y)$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Longrightarrow\quad \left(\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right)<0$$

$$\Longrightarrow\quad f\ est\ \searrow\ sur\ ]-\infty,0]$$

On peut montrer que f est décroissante en calculant $f'(x)$. Et comme f est continue et étant strictement décroissante sur $]-\infty,0]$ alors f réalise une bijection de $]-\infty,0]$ sur un intervalle $J=f(]-\infty,0])$

$$\begin{aligned} J=f(]-\infty,0])&=\left[f(0)\,;\ \lim_{x\to-\infty}f(x)\right[\\ &=[0,+\infty[\end{aligned}$$

$$Voici\ \ pourquoi\quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty\quad :$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-x}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2-x}+x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}+x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x}}+x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{|x|\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x}}+x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x}{-x\sqrt{1-\frac{1}{x}}+x}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}-1}\right)$$

$$= \lim_{\substack{t\to 0^+ \\ t=\sqrt{1-\frac{1}{x}}-1}} \left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$Donc\ \ f:\ \ ]-\infty,0] \longmapsto [0,+\infty[\ \ est\ \ bijective$

$y\ \epsilon\ [0,+\infty[\ \ alors\ \ \exists!\, x\ \epsilon\ ]-\infty,0[\ :\ \ f(x)=y$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2-x}-x=y$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)}=y$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\left(\sqrt{x^2-x}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}+x}=y$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-x}{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x}}+x}=y$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-x}{|x|\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x}}+x}=y$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-x}{-x\sqrt{1-\frac{1}{x}}+x}=y \quad car \quad x\leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}-1}=y$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{1-\frac{1}{x}}-1=\frac{1}{y}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{1-\frac{1}{x}}=\frac{1}{y}+1$$

$$\Leftrightarrow \quad 1-\frac{1}{x}=\left(\frac{1}{y}+1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 1-\left(\frac{1}{y}+1\right)^2=\frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad x=\frac{1}{1-\left(\frac{1}{y}+1\right)^2}\leq 0 \quad car \quad y\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x=\left(\frac{1}{1-\left(\frac{1}{y}+1\right)^2}\right)\epsilon\ ]-\infty,0]$$

D'où finalement :

$$f^{-1}:\ [0,+\infty[\ \longmapsto\ ]-\infty,0]$$
$$y \longmapsto \left(\frac{1}{1-\left(\frac{1}{y}+1\right)^2}\right)$$

D'abord f est continue sur $\mathbb{R}=D_f$ car c'est un quotient bien défini de deux fonctions continues et bien définies Donc f est continue sur $[0,\sqrt{2}]\subset\mathbb{R}$.

Montrons maintenant que f est croissante sur $[0,\sqrt{2}]$ par la méthode du taux de variations. Soient $x,y\ \epsilon\ [0,\sqrt{2}]$.

$$\left(\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right)=\left(\frac{\frac{x}{x^2+2}-\frac{y}{y^2+2}}{x-y}\right)$$

$$=\frac{xy^2+2x-yx^2-2y}{(x-y)(x^2+2)(y^2+2)}$$

$$=\frac{xy^2-yx^2+2x-2y}{(x-y)(x^2+2)(y^2+2)}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= \frac{xy(y-x) - 2(y-x)}{(x-y)(x^2+2)(y^2+2)}$$

$$= \frac{(y-x)(xy-2)}{(x-y)(x^2+2)(y^2+2)}$$

$$= \frac{2-xy}{(x^2+2)(y^2+2)} > 0 \quad ; \quad car \quad \left| \begin{array}{l} x < \sqrt{2} \\ y < \sqrt{2} \end{array} \right.$$

Donc f est strictement croissante sur l'intervalle $[0, \sqrt{2}]$ On peut montrer cette croissance en calculant la dérivée première $f'(x)$ et c'est trop facile.

Donc f réalise une bijection (car continue et strictement monotone) de $[0, \sqrt{2}]$ sur un intervalle $J = f(\,[0, \sqrt{2}]\,)$

$$J = [f(0)\,;\, f(\sqrt{2})] = \left[0, \frac{\sqrt{2}}{4}\right]$$

$$Donc \quad f : \ [0, \sqrt{2}] \longmapsto \left[0, \frac{\sqrt{2}}{4}\right] \ est \ bijective$$

$$y \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{4}\right] \quad alors \quad \exists!\, x \in [0, \sqrt{2}] : \ f(x) = y$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x}{x^2+2} = y$$

$$\Leftrightarrow \quad y(x^2+2) = x$$

$$\Leftrightarrow \quad yx^2 - x + 2y = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1-8y^2}}{2y} \quad ; \quad \Delta = 1 - 8y^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{1 - \sqrt{1-8y^2}}{2y} \leq \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \left(\frac{1 - \sqrt{1-8y^2}}{2y}\right) \in [0, \sqrt{2}]$$

D'où finalement :

$$f^{-1} : \left[0, \frac{\sqrt{2}}{4}\right] \longmapsto [0, \sqrt{2}]$$

$$y \longmapsto \left(\frac{1 - \sqrt{1-8y^2}}{2y}\right)$$

Solution N° 85 :

1) D'abord on remarque que x et $3x$ ont le même signe c'es à dire que les deux seraient à la fois positifs ou à la fois négatifs.

On suppose que $x < 0$ et $3x < 0$:

$$\Rightarrow \quad Arctan(x) < 0 \quad et \quad Arctan(3x) < 0$$

$$\Rightarrow \quad Arctan(x) + Arctan(3x) < 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\pi}{3} < 0 \quad (absurde)$$

$$\Rightarrow \quad x > 0 \quad ; \quad retenue$$

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad Arctan(x) + Arctan(3x) = \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \tan\big(Arctan(x) + Arctan(3x)\big) = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{tan\big(Arctan(x)\big) + tan\big(Arctan(3x)\big)}{1 - tan\big(Arctan(x)\big)tan\big(Arctan(3x)\big)} = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x+3x}{1-3x^2} = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3\sqrt{3}\,x^2 + 4x - \sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-4 \pm \sqrt{52}}{6\sqrt{3}} \quad ; \quad \Delta = 52 > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-4+\sqrt{52}}{6\sqrt{3}} > 0$$

Ce nombre est la seule solution de (E)

2) Soit x une solution de l'inéquation (E)

$$\Leftrightarrow \quad Arctan(2x) + Arctan(x-1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad Arctan(x-1) \leq -Arctan(2x)$$

$$\Leftrightarrow \quad Arctan(x-1) \leq Arctan(-2x)$$

$$tan\big(Arctan(x-1)\big) \leq tan\big(Arctan(-2x)\big)$$

Car tangente et arc tangente sont des bijections croissantes.

$$\Leftrightarrow \quad (x-1) \leq -2x$$

$$\Leftrightarrow \quad x \leq \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left]-\infty, \frac{1}{3}\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad Solution(E) = \left]-\infty, \frac{1}{3}\right]$$

3) $Soit \quad \alpha = Arctan\left(\frac{1}{2}\right) + Arctan\left(\frac{1}{3}\right)$

$$On\ commence\ par\ : \begin{cases} -1 < \frac{1}{2} < 1 \\ -1 < \frac{1}{3} < 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} Arctan(-1) < Arctan\left(\frac{1}{2}\right) < Arctan(1) \\ Arctan(-1) < Arctan\left(\frac{1}{3}\right) < Arctan(1) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \frac{-\pi}{4} < Arctan\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{\pi}{4} \\ \frac{-\pi}{4} < Arctan\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \frac{-\pi}{2} < Arctan\left(\frac{1}{2}\right) + Arctan\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{\pi}{2}$$

$$\Longrightarrow \frac{-\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$Or\ ;\ On\ a \quad \alpha = Arctan\left(\frac{1}{2}\right) + Arctan\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad tan(\alpha) = tan\left(Arctan\left(\frac{1}{2}\right) + Arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$\tan\alpha = \frac{tan\left(Arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right) + tan\left(Arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right)}{1 - tan\left(Arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right) tan\left(Arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right)}$$

$$\Leftrightarrow \quad tan(\alpha) = \left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad tan(\alpha) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \tan\alpha = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha \equiv \frac{\pi}{4}\ [\pi] \quad et \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha \equiv \frac{\pi}{4} + k\pi \quad ; \quad k\epsilon\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-\pi}{2} < \frac{\pi}{4} + k\pi < \frac{\pi}{2} \quad ; \quad k\epsilon\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-1}{2} < \frac{1}{4} + k < \frac{1}{2} \quad ; \quad k\epsilon\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-3}{4} < k < \frac{1}{4} \quad ; \quad k\epsilon\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \quad -0{,}75 < k < 0{,}25 \quad ; \quad k\epsilon\mathbb{Z}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Leftrightarrow \quad k = 0 \quad ; \quad car \quad k \epsilon \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{4} + 0\pi = \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad Arctan\left(\frac{1}{2}\right) + Arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$$

L'équation (E) devient ainsi :

$$\Leftrightarrow \quad Arctan(x) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad tan\big(Arctan(x)\big) = tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 1$$

4) (E) : $Arctan(x) + Arctan(2x) > \frac{\pi}{3}$

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = Arctan(x) + Arctan(2x)$$

D'abord on devrait résoudre l'équation :

$$\varphi(x) = \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad Arctan(x) + Arctan(2x) = \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad tan\,\big(Arctan(x) + Arctan(2x)\big) = tan\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{tan\big(Arctan(x)\big) + tan\big(Arctan(2x)\big)}{1 - tan\big(Arctan(x)\big)tan\big(Arctan(2x)\big)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x + 2x}{1 - 2x^2} = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3x - \sqrt{3} + 2\sqrt{3}\,x^2}{1 - 2x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2x^2 + \sqrt{3}\,x - 1}{1 - 2x^2} = 0$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{11}}{4} \quad et \quad x \neq \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{11}}{4} > 0$$

$$sinon \ on \ aurait \quad \frac{\pi}{3} < 0$$

La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}^+$ car somme de deux fonctions bien définies et continues sur $\mathbb{R}^+$.

On a aussi la fonction φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car :

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{2}{x^2 + 1} > 0$$

Donc φ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ vers $\varphi([0, +\infty[) = [0, \pi[$.

Ainsi l'inéquation (E) devient :

$$\Leftrightarrow \quad \varphi(x) > \varphi\left(\frac{-\sqrt{3} + \sqrt{11}}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi^{-1}\big(\varphi(x)\big) > \varphi^{-1}\left(\varphi\left(\frac{-\sqrt{3} + \sqrt{11}}{4}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad x > \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{11}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in \left]\frac{-\sqrt{3} + \sqrt{11}}{4} \ ; +\infty\right[$$

$$\Leftrightarrow \quad Solutions(E) = \left]\frac{-\sqrt{3} + \sqrt{11}}{4} \ ; +\infty\right[$$

Solution N° 86 :

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} (x+1)\, Arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

$$= \lim_{\substack{t\to +\infty \\ t=\frac{1}{x}}} \left(\frac{1}{t}+1\right) Arctan(t)$$

$$= \lim_{t\to +\infty} \left(\frac{1}{t}+1\right) \times \lim_{t\to +\infty} Arctan(t)$$

$$= (0^+ + 1) \times \left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

2) $\lim\limits_{x\to 0^-} (x+1)\, Arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

$$= \lim_{\substack{t\to -\infty \\ t=\frac{1}{x}}} \left(\frac{1}{t}+1\right) Arctan(t)$$

$$= \lim_{t\to -\infty} \left(\frac{1}{t}+1\right) \times \lim_{t\to -\infty} Arctan(t)$$

$$= (0^+ + 1) \times \left(\frac{-\pi}{2}\right) = \frac{-\pi}{2}$$

3) *Calculons* $\lim\limits_{x\to -\infty} x\left(\frac{\pi}{2} + Arctan(x)\right)$

Je rappelle juste qu'on a toujours :

$$\begin{cases} \forall x \epsilon \mathbb{R}^{+*} \;;\; Arctan(x) + Arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \\ \forall x \epsilon \mathbb{R}^{-*} \;;\; Arctan(x) + Arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-\pi}{2} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{Arctan(x)}{x} = 1 \end{cases}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to -\infty} x\left(\frac{\pi}{2} + Arctan(x)\right)$

$$= \lim_{x\to -\infty} -x\, Arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{\substack{t\to 0^- \\ t=\frac{1}{x}}} \frac{Arctan(t)}{t} = -1$$

4) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{Arctan(x-2)}{x^2-4}$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{Arctan(x-2)}{(x-2)} \times \frac{1}{(x+2)}$$

$$= \lim_{\substack{t\to 0 \\ t=x-2}} \frac{Arctan(t)}{t} \times \frac{1}{t+4}$$

$$= 1 \times \frac{1}{0+4} = \frac{1}{4}$$

Solution N° 87 :

1) $f(x) = \sqrt[3]{Arctan\ x}$

$D_f = \{ x\epsilon\mathbb{R} \;;\; Arctan(x)\ \epsilon\ \mathbb{R} \} = \mathbb{R}$

car $\sqrt[3]{x}$ *est définie de* $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$

On pose $f(x) = u \circ v(x) \;;\; \forall x\epsilon\mathbb{R}$

Avec : $u(x) = \sqrt[3]{x} \;;\; v(x) = Arctan(x)$

On a v est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ selon le cours et on a u est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ aussi car 3 est un nombre impair.

Si $x\epsilon\mathbb{R}$ *Alors* $v(x) = Arctan(x)\ \epsilon\ \mathbb{R}$

Donc $v(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$

D'où l'on déduit que la composition $u \circ v$ est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$g(x) = \sqrt[4]{\frac{x}{x-1}}$$

$$D_g = \left\{ x\epsilon\mathbb{R} \quad ; \quad \frac{x}{x-1} \geq 0 \quad et \quad x \neq 1 \right\}$$

$$= \{ x\epsilon\mathbb{R} \; ; \; x \,\epsilon\,]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[\;\; et \;\; x \neq 1 \}$$

$$= \{ x\epsilon\mathbb{R} \quad ; \quad x \notin \;]0,1]\; \} = \mathbb{R}\backslash\{\,]0,1]\,\}$$

$$On\ pose \quad g(x) = u \circ v(x) \quad ; \quad \forall x\epsilon D_g$$

$$Avec \quad u(x) = \sqrt[4]{x} \quad et \quad v(x) = \frac{x}{x-1}$$

$$On\ a\ \ v\ est\ continue\ sur\ \mathbb{R}\backslash\{1\}$$
$$Donc\ \ v\ est\ continue\ sur\ \mathbb{R}\backslash]0,1]$$
$$car\ \ \mathbb{R}\backslash]0,1] \subset \mathbb{R}\backslash\{1\}$$

On a aussi la fonction u est continue sur $\mathbb{R}^+$ car le nombre 4 est pair.

$$Si \quad x \,\epsilon\, \mathbb{R}\backslash]0,1] \quad alors \quad v(x) = \frac{x}{x-1} \,\epsilon\, \mathbb{R}^+$$

$$Car\ si \quad x \,\epsilon\,]-\infty, 0] \quad alors \quad \frac{x}{x-1} \geq 0$$

$$Et\ si \quad x \,\epsilon\,]1, +\infty[\quad alors \quad \frac{x}{x-1} \geq 0$$

$$Donc \quad v(\,\mathbb{R}\backslash]0,1]\,) \subseteq \mathbb{R}^+$$

D'où la composition $u \circ v$ est continue sur l'ensemble $\mathbb{R}\backslash]0,1]$

2) ■ $$\lim_{x\to1}\left(\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}\right) = \lim_{\substack{t=\sqrt[3]{x} \\ t\to1}}\left(\frac{t-1}{t^3-1}\right)$$

$$= \lim_{t\to1} \frac{(t-1)}{(t-1)(t^2+t+1)}$$

$$= \lim_{t\to1}\left(\frac{1}{t^2+t+1}\right) = \frac{1}{3}$$

■ $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x} - x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left((x^3+x)^{\frac{1}{3}} - x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left((x^3+x)^{\frac{1}{3}} - x\right) \times \frac{(x^3+x)^{\frac{2}{3}} + x(x^3+x)^{\frac{1}{3}} + x^2}{(x^3+x)^{\frac{2}{3}} + x(x^3+x)^{\frac{1}{3}} + x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(x^3+x) - x^3}{(x^3+x)^{\frac{2}{3}} + x(x^3+x)^{\frac{1}{3}} + x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{(x^3+x)^{\frac{2}{3}} + x(x^3+x)^{\frac{1}{3}} + x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\left(\frac{(x^3+x)^{\frac{2}{3}}}{x} + (x^3+x)^{\frac{1}{3}} + x\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}} + (x^3+x)^{\frac{1}{3}} + x}$$

$$= \frac{1}{(1+0^+)^{\frac{2}{3}} + (+\infty)^{\frac{1}{3}} + +\infty} = 0^+ = 0$$

■ $$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt[4]{x+1}-1}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{(x+1)^{\frac{1}{3}}-1}{(x+1)^{\frac{1}{4}}-1}\right)$$

$$= \lim_{\substack{t\to1 \\ t=x+1}}\left(\frac{t^{\frac{1}{3}}-1}{t^{\frac{1}{4}}-1}\right)$$

On peut calculer cette limite à l'aide de la règle de l'Hôpital dans le brouillon juste pour connaître la limite. On a le droit d'appliquer cette règle dans le bro-

Brouillon puisque ça donne la forme indéterminée zéro/zéro. On obtient :

$$\lim_{t\to1}\frac{\left(t^{\frac{1}{3}}-1\right)}{\left(t^{\frac{1}{4}}-1\right)}=\lim_{t\to1}\frac{\left(t^{\frac{1}{3}}-1\right)'}{\left(t^{\frac{1}{4}}-1\right)'}$$

$$=\lim_{t\to1}\left(\frac{\frac{1}{3}\cdot t^{\frac{-2}{3}}}{\frac{1}{4}\cdot t^{\frac{-3}{4}}}\right)=\lim_{t\to1}\frac{4}{3}\cdot t^{\left(\frac{-2}{3}+\frac{3}{4}\right)}$$

$$=\lim_{t\to1}\left(\frac{4}{3}\cdot t^{\frac{1}{12}}\right)=\left(\frac{4}{3}\times1^{\frac{1}{12}}\right)=\frac{4}{3}$$

Revenons maintenant à notre limite pour la recalculer par une méthode conforme au programme officiel .

$$\lim_{\substack{t\to1\\t=x+1}}\left(\frac{t^{\frac{1}{3}}-1}{t^{\frac{1}{4}}-1}\right)=\lim_{\substack{t\to1\\t=x+1}}\frac{\left(t^{\frac{1}{3}}-1\right)\left(t^{\frac{1}{4}}+1\right)}{\left(t^{\frac{1}{4}}-1\right)\left(t^{\frac{1}{4}}+1\right)}$$

$$=\lim_{t\to1}\frac{\left(t^{\frac{1}{3}}-1\right)\left(t^{\frac{1}{4}}+1\right)}{\left(t^{\frac{1}{4}}\right)^2-1^2}$$

$$=\lim_{t\to1}\left(\frac{t^{\frac{1}{3}}-1}{t^{\frac{1}{2}}-1}\right)\left(1^{\frac{1}{4}}+1\right)$$

$$=2\lim_{t\to1}\frac{\left(t^{\frac{1}{3}}-1\right)\left(t^{\frac{1}{2}}+1\right)}{\left(t^{\frac{1}{2}}-1\right)\left(t^{\frac{1}{2}}+1\right)}$$

$$=2\lim_{t\to1}\left(\frac{t^{\frac{1}{3}}-1}{t-1}\right)\left(1^{\frac{1}{2}}+1\right)$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$=4\lim_{t\to1}\frac{\left(t^{\frac{1}{3}}-1\right)\left(t^{\frac{2}{3}}+t^{\frac{1}{3}}+1\right)}{(t-1)\left(t^{\frac{2}{3}}+t^{\frac{1}{3}}+1\right)}$$

$$=4\lim_{t\to1}\frac{\left(t^{\frac{1}{3}}\right)^3-1^3}{(t-1)\left(t^{\frac{2}{3}}+t^{\frac{1}{3}}+1\right)}$$

$$=4\lim_{t\to1}\frac{(t-1)}{(t-1)\left(t^{\frac{2}{3}}+t^{\frac{1}{3}}+1\right)}$$

$$=4\lim_{t\to1}\left(\frac{1}{t^{\frac{2}{3}}+t^{\frac{1}{3}}+1}\right)$$

$$=4\left(\frac{1}{1+1+1}\right)=\frac{4}{3}$$

■ $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left((x^2+1)^{\frac{1}{2}}-(x^2+1)^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{(x^2+1)^{\frac{1}{3}}}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\left(1-(x^2+1)^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\left(1-\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{\frac{1}{6}}\right)$$

$$=(+\infty)\left(1-\frac{1}{+\infty}\right)=+\infty$$

Soit à résoudre l'équation suivante :

$$\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}=\sqrt[3]{4x}$$

D'abord il faut qu'on ait :

$$x+1\geq0\quad et\quad x-1\geq0\quad et\quad 4x\in\mathbb{R}$$

$$c-\text{à}-d \quad x\geq -1 \quad et \quad x\geq 1 \quad et \quad x\in\mathbb{R}$$

Donc il faut qu'on ait : $x \geq 1$

L'équation devient alors :

$$(x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}=(4x)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left((x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}\right)^3=\left((4x)^{\frac{1}{3}}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+1)^2-3(x+1)^{\frac{4}{3}}\cdot(x-1)^{\frac{2}{3}}+ \\ +3(x+1)^{\frac{2}{3}}\cdot(x-1)^{\frac{4}{3}}-(x-1)^2=4x$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x+3(x+1)^{\frac{2}{3}}\cdot(x-1)^{\frac{4}{3}} \\ -3(x+1)^{\frac{4}{3}}\cdot(x-1)^{\frac{2}{3}}=4x$$

$$\Leftrightarrow \quad 3(x+1)^{\frac{2}{3}}\cdot(x-1)^{\frac{2}{3}} \\ \cdot\left((x-1)^{\frac{2}{3}}-(x+1)^{\frac{2}{3}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} oubien \quad x+1=0 \\ oubien \quad x-1=0 \\ oubien \quad (x-1)^{\frac{2}{3}}=(x+1)^{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} oubien \quad x=-1 \\ oubien \quad x=1 \\ oubien \quad (x-1)^2=(x+1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} oubien \quad x=-1 & \text{à } rejeter \\ oubien \quad x=1 & \text{à } retenir \\ oubien \quad x=0 & \text{à } rejeter \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad x=1 \quad car \quad x\geq 1$$

L'équation admet donc une seule solution

Solution N° 88 :

■ $$A=\frac{\sqrt[4]{32}\times\sqrt[6]{27}\times\sqrt[4]{108}}{\sqrt[4]{6}}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$=\frac{\sqrt[4]{2^5}\times\sqrt[6]{3^3}\times\sqrt[4]{(2^2\times 3^3)}}{\sqrt[4]{3\times 2}}$$

$$=\frac{2^{\frac{5}{4}}\times 3^{\frac{3}{6}}\times(2^2\times 3^3)^{\frac{1}{4}}}{(3\times 2)^{\frac{1}{4}}}$$

$$=\left(\frac{2^{\frac{5}{4}}\times 2^{\frac{2}{4}}}{2^{\frac{1}{4}}}\right)\times\left(\frac{3^{\frac{3}{6}}\times 3^{\frac{3}{4}}}{3^{\frac{1}{4}}}\right)$$

$$=\left(\frac{2^{\frac{7}{4}}}{2^{\frac{1}{4}}}\right)\times\left(\frac{3^{\frac{5}{4}}}{3^{\frac{1}{4}}}\right)=2^{\left(\frac{7}{4}-\frac{1}{4}\right)}\times 3^{\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\right)}$$

$$=2^{\frac{3}{2}}\times 3^1=3\sqrt{8}$$

■ $$B=\frac{(125)^{\frac{2}{9}}\times(625)^{\frac{1}{4}}\times(25)^{\frac{5}{2}}}{(5)^{\frac{17}{3}}}$$

$$=\frac{(5^3)^{\frac{2}{9}}\times(5^4)^{\frac{1}{4}}\times(5^2)^{\frac{5}{2}}}{(5)^{\frac{17}{3}}}$$

$$=\frac{5^{\frac{6}{9}}\times 5^1\times 5}{5^{\frac{17}{3}}}=\frac{5^{\frac{20}{3}}}{5^{\frac{17}{3}}}=5^{\left(\frac{20}{3}-\frac{17}{3}\right)}=5^1=5$$

■ $$C=\frac{\left(7^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\times\left(3^{\frac{-5}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}\times(21)^{\frac{3}{4}}}{\left(7^{\frac{-11}{2}}\right)^{1/6}\times(343)^{\frac{2}{3}}\times(63^{-2})^{\frac{-1}{6}}}$$

$$=\frac{7^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{-5}{12}}\times 3^{\frac{3}{4}}\times 7^{\frac{3}{4}}}{7^{\frac{-11}{12}}\times(7^3)^{\frac{2}{3}}\times(7\times 3^2)^{\frac{2}{6}}}$$

$$=\left(\frac{7^{\frac{1}{3}}\times 7^{\frac{3}{4}}}{7^{\frac{-11}{12}}\times 7^2\times 7^{\frac{2}{6}}}\right)\times\left(\frac{3^{\frac{-5}{12}}\times 3^{\frac{3}{4}}}{3^{\frac{4}{6}}}\right)$$

$$= \left(\frac{7^{\frac{13}{12}}}{7^{\frac{17}{12}}}\right) \times \left(\frac{3^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{4}{6}}}\right) = 7^{\left(\frac{13}{12}-\frac{17}{12}\right)} \times 3^{\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{6}\right)}$$

$$= 7^{\frac{-1}{3}} \times 3^{\frac{-1}{3}} = (7 \times 3)^{\frac{-1}{3}} = 21^{\frac{-1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{21}}$$

Solution N° 89 :

1) d'abord on remarque que :

$$\begin{cases} \sqrt[3]{3+x} \quad est \quad définie \quad si \quad (3+x) \in \mathbb{R} \\ \sqrt[3]{3-x} \quad est \quad définie \quad si \quad (3-x) \in \mathbb{R} \\ \sqrt[6]{4x^2} \quad est \quad définie \quad si \quad (4x) \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ une solution de l'équation (E)

$$\Leftrightarrow \quad (3+x)^{\frac{1}{3}} - (3-x)^{\frac{1}{3}} = (2x)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left((3+x)^{\frac{1}{3}} - (3-x)^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \left((2x)^{\frac{1}{3}}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow \quad (3+x) - 3(3+x)^{\frac{2}{3}}(3-x)^{\frac{1}{3}} + 3(3+x)^{\frac{1}{3}}(3-x)^{\frac{2}{3}} - (3-x) = 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad 3(3+x)^{\frac{1}{3}} \cdot (3-x)^{\frac{1}{3}} \cdot \left((3-x)^{\frac{1}{3}} - (3+x)^{\frac{1}{3}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} oubien \quad (3+x)^{\frac{1}{3}} = 0 \\ oubien \quad (3-x)^{\frac{1}{3}} = 0 \\ oubien \quad (3-x)^{\frac{1}{3}} - (3+x)^{\frac{1}{3}} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} oubien \quad (3+x) = 0 \\ oubien \quad (3-x) = 0 \\ oubien \quad (3-x)^{\frac{1}{3}} = (3+x)^{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} oubien \quad x = -3 \\ oubien \quad x = 3 \\ oubien \quad x = 0 \end{cases}$$

2) soit à résoudre l'équation suivante :

$$(E) \quad : \quad 2x\sqrt{x} - 3x\sqrt[4]{\frac{1}{x}} = 20$$

Cette équation est définie si on ait :

$$x \geq 0 \quad et \quad x \neq 0$$

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad 2\,x^{\frac{3}{2}} - 3x \cdot x^{\frac{-1}{4}} = 20$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\,x^{\frac{3}{2}} - 3\,x^{\frac{3}{4}} = 20$$

$$On\ pose \quad t = x^{\frac{3}{4}} > 0 \quad ; \quad \forall x > 0$$

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad 2t^2 - 3t - 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad t = \frac{3 \pm \sqrt{169}}{4} \qquad avec \quad \Delta = 169$$

$$\Leftrightarrow \quad x^{\frac{3}{4}} = t = 4 > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{4}{3}} = 4^{\frac{4}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 4^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{4^4} > 0$$

3) Soit à résoudre l'équation suivante :

$$(E) \quad : \quad \sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x} = 1$$

Cette équation est définie si on ait : $(x+1) \geq 0 \quad et \quad x \in \mathbb{R}$

On pose $t = x^{\frac{1}{3}} \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad x = t^3 \in \mathbb{R}$

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{3}} = 1$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Leftrightarrow \quad (t^3+1)^{\frac{1}{2}} - t = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (t^3+1)^{\frac{1}{2}} = 1 + t$$

$$\Rightarrow \quad \left((t^3+1)^{\frac{1}{2}}\right)^2 = (1+t)^2$$

$$\Rightarrow \quad (t^3+1) = 1 + t^2 + 2t$$

$$\Rightarrow \quad t^3 - t^2 - 2t = 0$$

$$\Rightarrow \quad t(t^2 - t - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad t(t-2)(t+1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} oubien \quad t = 0 \\ oubien \quad t = 2 \\ oubien \quad t = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} oubien \quad x^{\frac{1}{3}} = 0 \\ oubien \quad x^{\frac{1}{3}} = 2 \\ oubien \quad x^{\frac{1}{3}} = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} oubien \quad x = 0 \geq -1 \\ oubien \quad x = 8 \geq -1 \\ oubien \quad x = -1 \geq -1 \end{cases}$$

Inversement, si on remplace x par chacune de ces trois valeurs dans (E) On obtient que l'égalité est vérifiée :

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \sqrt{0+1} - \sqrt[3]{0} = 1 \\ \sqrt{8+1} - \sqrt[3]{8} = 1 \\ \sqrt{-1+1} - \sqrt[3]{-1} = 1 \end{cases}$$

D'où l'ensemble des solutions de (E) est définie explicitement par :

$$S = \{-1 \ ; \ 0 \ ; \ 8\}$$

4) soit à résoudre l'équation (E) suivante

$$(E) \ : \quad Arctan(x) + Arctan(2x) = \frac{\pi}{4}$$

D'abord il faut qu'on ait $x > 0$.
Sinon on airait :

$$Arctan(x) < 0 \quad et \quad Arctan(2x) < 0$$

$$\Rightarrow \quad Arctan(x) + Arctan(2x) < 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\pi}{4} < 0 \ absurde \ et \ contradiction$$

Soit $x > 0$ une solution de l'équation (E)

$$\Leftrightarrow \quad Arctan(x) + Arctan(2x) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad tan\big(Arctan(x) + Arctan(2x)\big) = tan\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{tan\big(Arctan(x)\big) + tan\big(Arctan(2x)\big)}{1 - tan\big(Arctan(x)\big) \cdot tan\big(Arctan(2x)\big)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{x+2x}{1 - x \cdot 2x}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4} \quad ; \quad \Delta = 17$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} > 0$$

Donc finalement on en déduit que cette équation admet une seule solution.

Solution N° 90 :

1) $$\lim_{x\to 1} \left(\frac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}\right) = \lim_{x\to 1} \left(\frac{x^{\frac{2}{3}} - 1}{x^{\frac{1}{4}} - 1}\right)\left(\frac{x^{\frac{1}{4}} + 1}{x^{\frac{1}{4}} + 1}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1} \left(\frac{x^{\frac{2}{3}} - 1}{x^{\frac{1}{2}} - 1}\right)\left(x^{\frac{1}{4}} + 1\right)$$

$$= \lim_{x\to1}\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}-1}{x^{1/2}-1}\right)\left(1^{\frac{1}{4}}+1\right)$$

$$= 2\lim_{x\to1}\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}-1}{x^{\frac{1}{2}}-1}\right)\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}+1}{x^{\frac{1}{2}}+1}\right)$$

$$= 2\lim_{x\to1}\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}-1}{x-1}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)$$

$$= 2\lim_{x\to1}\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}-1}{x-1}\right)\left(1^{\frac{1}{2}}+1\right)$$

$$= 4\lim_{x\to1}\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}-1}{x-1}\right)\left(\frac{x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{2}{3}}+1}{x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{2}{3}}+1}\right)$$

$$= 4\lim_{x\to1}\frac{\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^3-1^3}{(x-1)\left(x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{2}{3}}+1\right)}$$

$$= 4\lim_{x\to1}\frac{(x^2-1)}{(x-1)\left(x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{2}{3}}+1\right)}$$

$$= 4\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)\left(x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{2}{3}}+1\right)}$$

$$= 4\lim_{x\to1}\left(\frac{x+1}{x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{2}{3}}+1}\right)$$

$$= 4\left(\frac{1+1}{1+1+1}\right) = \frac{8}{3}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

2) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left((x^3+x^2)^{\frac{1}{3}}-x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left((x^3+x^2)^{\frac{1}{3}}-x\right) \times \frac{\left((x^3+x^2)^{\frac{2}{3}}+x(x^3+x^2)^{\frac{1}{3}}+x^2\right)}{\left((x^3+x^2)^{\frac{2}{3}}+x(x^3+x^2)^{\frac{1}{3}}+x^2\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left((x^3+x^2)^{\frac{1}{3}}\right)^3-x^3}{\left((x^3+x^2)^{\frac{2}{3}}+x(x^3+x^2)^{\frac{1}{3}}+x^2\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\left(x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}+x\left(x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^{\frac{1}{3}}+x^2\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{(x^3)^{\frac{2}{3}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}+x(x^3)^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}+x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}+x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}+x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}+1}$$

$$= \frac{1}{(1+0)^{\frac{2}{3}}+(1+0)^{\frac{1}{3}}+1} = \frac{1}{3}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x}-\sqrt[6]{x+1}}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^{\frac{1}{4}}-(x+1)^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}-(x+1)^{\frac{1}{6}}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^{\frac{1}{4}}-\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}-\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^{\frac{1}{6}}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{6}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{6}}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{-1}{12}}-\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}\right)}{x^{\frac{1}{2}}\left(1-x^{\frac{-1}{3}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{6}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{-1}{6}}\right)\left(\frac{x^{\frac{-1}{12}}-\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}}{1-x^{\frac{-1}{3}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{6}}}\right)$$

$$=(0)\left(\frac{0-(1+0)^{\frac{1}{3}}}{1-0(1+0)^{\frac{1}{6}}}\right)=0$$

4) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}\left(Arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{\pi}{2}\right)$

D'abord voici un rappel sur l'arc tangente

- $\lim\limits_{x\to+\infty} Arctan(x)=\dfrac{\pi}{2}$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} Arctan(x)=\dfrac{-\pi}{2}$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

- $\lim\limits_{x\to0^{\pm}}\dfrac{Arctan(x)}{x}=1$

- $\forall x\geq 0\ ;\ Arctan(x)+Arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\pi}{2}$

Donc on calcule la limite comme suit :

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\left(Arctan\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{-Arctan(x)}{x}=-1$$

Solution N° 91 :

1) Soit $x\epsilon\mathbb{R}$ on procède comme suit :

$1+x-x^2\leq f(x)$

$$\Rightarrow\ \underbrace{(1+x)}_{\substack{\downarrow\\+\infty}}\leq f(x)+x^2$$

$$\Rightarrow\ \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+x^2\right)=+\infty$$

2) $1+x-x^2\leq f(x)\leq 1+x-x^2+x^4$

$$\Leftrightarrow\ x-x^2\leq f(x)-1\leq x-x^2+x^4$$

$$\Leftrightarrow\ \underbrace{1-x}_{\substack{\downarrow\\1}}\leq\frac{f(x)-1}{x}\leq\underbrace{1-x+x^3}_{\substack{\downarrow\\1}}\ ;\ x>0$$

$$\Leftrightarrow\ \lim_{x\to0^+}\left(\frac{f(x)-1}{x}\right)=1$$

On suit le même procédé pour la deuxième limite :

$$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{f(x)-1}{x}\right)=1$$

3) $1 - x \leq \dfrac{f(x)-1}{x} \leq 1 - x + x^3 \;\; ; \;\; x > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1-x}{x} \leq \frac{f(x)-1}{x^2} \leq \frac{1-x+x^3}{x} \;\; ; \;\; x>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} - 1 \leq \frac{f(x)-1}{x^2} \leq \frac{1}{x} - 1 + x^2 \;\; ; \;\; x > 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{-1}_{\substack{\downarrow \\ -1}} \leq \left(\frac{f(x)-1-x}{x^2}\right) \leq \underbrace{-1+x^2}_{\substack{\downarrow \\ -1}}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to0^{\pm}} \left(\frac{f(x)-1-x}{x^2}\right) = -1$$

Solution N° 92 :

1) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3\sqrt{1+x^4}-x}{2+x}\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3\sqrt{x^4\left(1+\frac{1}{x^4}\right)}-x}{2+x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3\sqrt{x^4}\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^4}\right)}-x}{2+x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3x^2\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^4}\right)}-x}{2+x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(3x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^4}\right)}-1\right)}{x\left(\frac{2}{x}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3x\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}-1}{\frac{2}{x}+1}\right)$$

$$= \left(\frac{3(+\infty)\sqrt{1+0}-1}{0+1}\right) = +\infty$$

■ $\displaystyle \lim_{\substack{x\to\frac{-\pi}{2} \\ x>\frac{-\pi}{2}}} g(x) = \lim_{\substack{x\to\frac{-\pi}{2} \\ x>\frac{-\pi}{2}}} \left(\frac{1-\cos^3 x}{x\tan x\;\cos^2 x}\right)$

$$= \lim_{x\to\frac{-\pi}{2}} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{\dfrac{x\cdot\sin x\cdot\cos^2 x}{\cos x}}$$

$$= \lim_{x\to\frac{-\pi}{2}} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{x\cdot\sin x\cdot\cos x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{-\pi}{2}} \left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)\left(\frac{x}{\sin x}\right)\left(\frac{1+\cos x+\cos^2 x}{\cos x}\right)$$

$$= \lim_{x\to\frac{-\pi}{2}} \left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)\left(\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}\right)\left(\frac{1}{\cos x}+1+\cos x\right)$$

$$= \left(\frac{1-0}{\frac{\pi^2}{4}}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{1}{0^+}+1+0\right) = +\infty$$

■ $\displaystyle \lim_{\substack{x\to\frac{-\pi}{2} \\ x<\frac{-\pi}{2}}} g(x) = \lim_{\substack{x\to\frac{-\pi}{2} \\ x<\frac{-\pi}{2}}} (2x+\pi)\tan x$

$$= \lim_{\substack{t\to0 \\ t=\frac{\pi}{2}+x}} 2t\cdot\tan\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \lim_{t\to0} 2t\cdot\frac{\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= \lim_{t\to0} -2t\cdot\left(\frac{\cos t}{\sin t}\right)$$

$$= -2\lim_{t\to0}\left(\frac{t}{\sin t}\right)\cdot\cos t = -2$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

2) $$\lim_{x\to0^+} g(x) = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{3\sqrt{1+x^4}-x}{2+x}\right)$$

$$= \left(\frac{3\sqrt{1+0^4}-x}{2+0}\right) = \frac{3}{2} = g(0) \in \mathbb{R}$$

■ $$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-}\left(\frac{1-cos^3x}{x\cdot\tan x\cdot cos^2x}\right)$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+cos^2x)}{\frac{x\cdot\sin x\cdot cos^2x}{\cos x}}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+cos^2x)}{x\cdot\sin x\cdot\cos x}$$

$$= \lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)\left(\frac{x}{\sin x}\right)\left(\frac{1+\cos x+cos^2x}{\cos x}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{1+1+1^2}{1}\right) = \frac{3}{2} = g(0) \in \mathbb{R}$$

On remarque que :

$$\lim_{x\to0^+} g(x) = \lim_{x\to0^-} g(x) = g(0)$$

Donc la fonction g est continue en 0.

Solution N° 93 :

Pour que la fonction f soit continue au point $x_0 = 2$ il faut et il suffit qu'on ait :

$$\lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2^-} f(x) = f(2)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to2^+}\left(\frac{x^2+x-a}{x-2}\right) = \left(\frac{4+b}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to2^+}\left(x+3+\frac{6-a}{x-2}\right) = \left(\frac{4+b}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Et \quad 6-a=0 \\ Et \quad 2+3=\dfrac{4+b}{3}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Et \quad a=6 \\ Et \quad b=11\end{cases}$$

Solution N° 94 :

Pour que la fonction f soit continue au point $x_0 = 1$ il faut et il suffit qu'on ait :

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^-} f(x) = f(1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x\to1^+}\left(\dfrac{-2x^2+3x+3}{x^2+1}\right) = \left(\dfrac{2+c}{3}\right) \\ \lim_{x\to1^-}\left(\dfrac{3x^2-2bx+1}{2x^2+ax-a-2}\right) = \left(\dfrac{2+c}{3}\right)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = \left(\dfrac{2+c}{3}\right) \\ \lim_{x\to1^-}\dfrac{3x^2-2bx+1}{(x-1)(2x+a+2)} = \left(\dfrac{2+c}{3}\right)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=4 \\ \lim_{x\to1^-}\left(\dfrac{3x^2-2bx+1}{x-1}\right)\left(\dfrac{1}{2x+a+2}\right) = 2\end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to1^-\\c=4}}\left(3x+3-2b+\frac{4-2b}{x-1}\right)\left(\frac{1}{2x+a+2}\right) = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=4 \\ \dfrac{3+3-2b}{2+a+2} = 2 \\ 4-2b=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=2 \\ c=4\end{cases}$$

Solution N° 95 :

Pour que la fonction f_n soit continue au point $x_0 = 2$ il faut et il suffit qu'on ait :

$$\lim_{x\to 2^+} f_n(x) = \lim_{x\to 2^-} f_n(x) = f_n(2)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 2^+}\left(\frac{3x+b}{4}\right) = \left(\frac{(3-x)^n - a}{x-2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{6+4}{4}\right) = \lim_{\substack{t\to 0^- \\ t=x-2}} \frac{(1-t)^n - a}{t}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t\to 0^-}\left(\frac{\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k(-t)^k - a}{t}\right) = \left(\frac{6+4}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t\to 0^-}\left(\frac{1-a}{t} + \sum_{k=1}^{k=n} C_n^k \cdot (-1)^k \cdot t^{k-1}\right) = \left(\frac{6+4}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-a=0 \\ \lim\limits_{t\to 0^-} \sum\limits_{k=1}^{k=n} C_n^k \cdot (-1)^k \cdot t^{k-1} = \left(\frac{6+b}{4}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-a=0 \\ -n + \lim\limits_{t\to 0^-} \sum\limits_{k=2}^{k=n} C_n^k \cdot (-1)^k \cdot t^{k-1} = \left(\frac{6+b}{4}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ -n + \sum\limits_{k=2}^{k=n} C_n^k \cdot (-1)^k \cdot 0^{k-1} = \left(\frac{6+b}{4}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ -n+0 = \left(\frac{6+b}{4}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-4n-6 \end{cases}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Solution N° 96 :

Voici les réponses sans développement :

■ 1) $a = 2 \quad et \quad c = \dfrac{17+3b}{8}$

■ 2) $4a + 2b - 3c = 17$

Solution N° 97 :

2) $$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{(x\sqrt{x})^2 - 1^2}{\left(\sqrt{3x+1}\right)^2 - \left(\sqrt{x+3}\right)^2}\right) \times \frac{\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}\right)}{(x\sqrt{x}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^3-1}{2x-2}\right)\left(\frac{\sqrt{4}+\sqrt{4}}{1\sqrt{1}+1}\right)$$

$$= 2\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{2(x-1)}$$

$$= 2\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+x+1)}{2} = 2\left(\frac{1^2+1+1}{2}\right) = 3 \in \mathbb{R}$$

Donc f admet un prolongement par continuité en $x_0 = 1$ et défini ainsi :

$$\begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x) \;;\quad x \neq 1 \\ \tilde{f}(1) = 3 \end{cases}$$

2) $$\lim_{x\to -2}\left(\frac{\sqrt{x+6}+\sqrt{2x+5}-3}{4-x^2}\right)$$

$$= \lim_{\substack{t\to 0 \\ t=x+2}} \frac{\sqrt{t+4}+\sqrt{2t+1}-3}{t(4-t)}$$

$$= \lim_{\substack{t\to 0\\ t=x+2}} \frac{\left(\sqrt{t+4}+\sqrt{2t+1}\right)^2 - 3^2}{t(4-t)\left(\sqrt{t+4}+\sqrt{2t+1}+3\right)}$$

$$= \lim_{t\to 0} \left(\frac{3t-4+2\sqrt{2t^2+9t+4}}{t}\right) \times \left(\frac{1}{(4-t)\left(\sqrt{t+4}+\sqrt{2t+1}+3\right)}\right)$$

$$= \frac{1}{24} \lim_{t\to 0} \left(\frac{3t-4+2\sqrt{2t^2+9t+4}}{t}\right)$$

$$= \frac{1}{24} \lim_{t\to 0} \left(3+2\left(\frac{\sqrt{2t^2+9t+4}-2}{t}\right)\right)$$

$$= \frac{3}{24} + \frac{2}{24} \lim_{t\to 0} \left(\frac{\sqrt{2t^2+9t+4}-2}{t}\right)$$

$$= \frac{3}{24} + \frac{2}{24} \lim_{t\to 0} \left(\frac{\left(\sqrt{2t^2+9t+4}\right)^2 - 2^2}{t\left(\sqrt{2t^2+9t+4}+2\right)}\right)$$

$$= \frac{3}{24} + \frac{2}{24} \lim_{t\to 0} \frac{t(2t+9)}{t\left(\sqrt{2t^2+9t+4}+2\right)}$$

$$= \frac{3}{24} + \frac{2}{24} \lim_{t\to 0} \left(\frac{2t+9}{\sqrt{2t^2+9t+4}+2}\right)$$

$$= \frac{3}{24} + \frac{2}{24} \times \left(\frac{0+9}{\sqrt{4}+2}\right) = \frac{5}{16} \in \mathbb{R}$$

Donc f est prolongeable par continuité en $x_0 = -2$ et ce prolongement est défini ainsi :

$$\begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x) \quad ; \quad x \neq -2 \\ \tilde{f}(-2) = \dfrac{5}{16} \end{cases}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

3) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \left(\dfrac{\tan x - \sin x}{x + \sin x}\right)$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\frac{\tan x}{x} - \frac{\sin x}{x}\right)}{x\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\tan x}{x} - \frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{1}{1+\frac{\sin x}{x}}\right)$$

$$= (1-1)\left(\frac{1}{1+1}\right) = 0 \in \mathbb{R}$$

Donc f admet un prolongement par continuité en $x_0 = 1$ et défini ainsi :

$$\begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x) \quad ; \quad x \neq 0 \\ \tilde{f}(0) = 0 \end{cases}$$

4) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \left(\dfrac{\cos x - \sqrt{1+\sin x}}{x}\right)$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{cos^2 x - \left(\sqrt{1+\sin x}\right)^2}{x\left(\cos x + \sqrt{1+\sin x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{cos^2 x - 1 - \sin x}{x}\right)\left(\frac{1}{\cos x + \sqrt{1+\sin x}}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{cos^2 x - 1 - \sin x}{x}\right)\left(\frac{1}{\cos 0 + \sqrt{1+\sin 0}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \left(\frac{cos^2 x - 1 - \sin x}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \left(\frac{-sin^2 x - \sin x}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left(\frac{-\sin x}{x}\right)(1+\sin x)$$

$$= \frac{1}{2}\times(-1)\times(0+1) = \frac{-1}{2} \in \mathbb{R}$$

Donc f est prolongeable par continuité en $x_0 = 0$ et ce prolongement est défini ainsi :

$$\begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x) \quad ; \quad x \neq 0 \\ \tilde{f}(0) = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$$

Solution N° 98 :

1) $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1}(x^2-3x+2) = 0$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \lim_{x\to1^+} \frac{(x-1)(x-1)}{\sqrt{x-1}\,\sqrt{x+1}}$$

$$= \lim_{x\to1^+} (x-1)\sqrt{x-1} \times \lim_{x\to1^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$$

$$= \lim_{\substack{t\to0\\ t=x-1}} t\sqrt{t}\times\frac{1}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\times 0\times\sqrt{0}\right) = 0$$

2) $comme \quad \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = 0 \in \mathbb{R}$

$$Alors \quad : \quad \lim_{x\to1} f(x) = 0 \in \mathbb{R}$$

Donc f est prolongeable par continuité en $x_0 = 1$ et ce prolongement est défini ainsi :

$$\begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x) \quad ; \quad x \neq 1 \\ \tilde{f}(1) = 0 \end{cases}$$

3) $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ x>-1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to-1\\ x>-1}}(x^2-3x+2) = 6$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\ x>-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1\\ x>-1}} \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \lim_{x\to-1}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\times\lim_{x\to-1}(x-1)^2$$

$$= \lim_{\substack{t\to1^+\\ t=x^2}}\frac{1}{\sqrt{t-1}}\times(-1-1)^2$$

$$= 4\lim_{t\to1^+}\frac{1}{\sqrt{t-1}} = 4\lim_{\substack{u\to0^+\\ u=\sqrt{t-1}}}\frac{1}{u}$$

$$= 4\times\frac{1}{0^+} = +\infty \notin \mathbb{R}$$

$$comme \quad \lim_{\substack{x\to-1\\ x<-1}} f(x) \neq \lim_{\substack{x\to-1\\ x<-1}} f(x)$$

$$Alors \quad \lim_{x\to-1} f(x) \notin \mathbb{R}$$

Donc la fonction f n'admet pas de prolongement par continuité en $x_0 = -1$

Solution N° 99 :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{(1-\tan x)^2}{\cos(2x)}$$

$$= \lim_{\substack{t\to0\\ t=x-\frac{\pi}{4}}} \frac{\left(1-\tan\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right)^2}{\cos\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= \lim_{t\to0}\frac{\left(1-\frac{1+\tan t}{1-\tan t}\right)^2}{-\sin(2t)}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= \lim_{t\to 0} \frac{(1-\tan t - \tan t - 1)^2}{(1-\tan t)^2(-\sin 2t)}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{4\,tan^2 t}{(1-\tan t)^2(-\sin 2t)}$$

$$= 4\lim_{t\to 0} \left(\frac{\tan t}{t}\right)^2 \left(\frac{2t}{-\sin 2t}\right)\left(\frac{t}{2(1-\tan t)^2}\right)$$

$$= 4(1)^2\left(\frac{-1}{1}\right)\left(\frac{0}{2(1-\tan 0)^2}\right) = 0 \in \mathbb{R}$$

Donc f est prolongeable par continuité en $x_0 = \frac{\pi}{4}$ et ce prolongement est défini ainsi :

$$\begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x) \quad ; \quad x \neq \dfrac{\pi}{4} \\ \tilde{f}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \end{cases}$$

Solution N° 100 :

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \left(\dfrac{x^2-x+1}{3x^2+6}\right) = \dfrac{1}{9}$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2-x}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x(x-1)} \times \lim_{x\to 1^-} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

$$= \lim_{\substack{t\to 0^-\\ t=x-1}} \left(\frac{1}{t(t+1)}\right) \times 1$$

$$= \lim_{t\to 0^-}\left(\frac{1}{t+1}\right) \times \lim_{t\to 0^-}\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$= \frac{1}{1+1} \times \frac{1}{0^-} = -\infty \notin \mathbb{R}$$

On remarque que :

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

Donc la fonction f n'admet pas de prolongement par continuité en $x_0 = 1$

2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x(x-1)}$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\frac{\pi x}{2}}\right) \times \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{x-1}\right)$$

$$= 1 \times \frac{\frac{\pi}{2}}{0-1} = \frac{-\pi}{2} \in \mathbb{R}$$

Donc f est prolongeable par continuité en $x_0 = 0$ et ce prolongement est défini ainsi :

$$\begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x) \quad ; \quad x \neq 0 \\ \tilde{f}(0) = \dfrac{-\pi}{2} \end{cases}$$

Solution N° 101 :

1) Soit : $\varphi(x) = x^3 - 3x^2 + 15x - 7$

On a la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$ donc φ est continue sur $]0,1[\subset \mathbb{R}$.
Et on a $\varphi(0) = -7 < 0$ et $\varphi(1) = 6 > 0$
Donc $\varphi(0) \times \varphi(1) < 0$
Alors d'après le TVI on en déduit que :

$$\exists\, \alpha \in\,]0,1[\;\; ; \;\; \varphi(\alpha) = 0$$

c-à-d $\exists\, \alpha \in\,]0,1[: \alpha^3 - 3\alpha^2 + 15\alpha - 7 = 0$

2) soit $\varphi(x) = 1 + \sin x - x^2$
On a φ est continue sur $\mathbb{R}$ donc φ est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[\subset \mathbb{R}$

On a $\varphi(0) = 1 + \sin 0 - 0^2 = 1 > 0$

Et $\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 + \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) - \dfrac{\pi^2}{4} = 2 - \dfrac{\pi^2}{4} < 0$

$$Donc \quad \varphi(0)\cdot\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$$

D'où d'après le TVI on en déduit que :

$$\exists\, \alpha \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\quad ; \quad \varphi(\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists\, \alpha \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\quad ; \quad 1+\sin\alpha-\alpha^2 = 0$$

3) $Soit \quad \varphi(x) = x^{17} - x^{11} - 1$

On a φ est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est un polynôme Donc φ est continue sur $]1,2[\ \subset \mathbb{R}$. Et on a $\varphi(1) = -1 < 0$
Et encore $\varphi(2) = 2^{11}(2^6-1)-1 > 0$
Donc : $\varphi(1)\times\varphi(2) < 0$
D'où d'après le TVI on en déduit que :

$$\exists\, \alpha \in\,]1,2[\quad ; \quad \varphi(\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists\, \alpha \in\,]1,2[\quad ; \quad \alpha^{17} = \alpha^{11}+1 = 0$$

4) $soit \quad \varphi(x) = \sqrt{x^3+5x+4} - 100$

On a la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}^+$
Donc φ est continue sur $]20,21[\ \subset \mathbb{R}^+$
On a $\varphi(21) = \sqrt{21^3+5\times 21+4} - 100$
$= \sqrt{9370} - 100 < 0$

$$Et\ on\ a\ \varphi(22) = \sqrt{22^3+5\times 22+4} - 100 = \sqrt{10762} - 100 > 0$$

$$D'où \quad : \quad \varphi(21)\cdot\varphi(22) < 0$$

Donc d'après le TVI on en déduit que :

$$\exists\, \alpha \in\,]21\,;22[\quad ; \quad \varphi(\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists\, \alpha \in\,]21\,;22[\quad ; \quad \sqrt{\alpha^3+5\alpha+4} = 100$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

5) $soit \quad \varphi(x) = \cos x - \dfrac{2}{(x+1)^2}$

On a φ est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ donc φ est continue sur $]0,1[\ \subset \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

$$On\ a\ \ \varphi(0) = \cos 0 - \frac{2}{(0+1)^2} = -1 < 0$$

$$et\ on\ a\ \ \varphi(1) = \cos 1 - \frac{1}{2} > 0\ \ car\ \ \pi > 3$$

$$D'où \quad \varphi(0)\times\varphi(1) < 0$$

$Donc\ d'après\ le\ TVI\ on\ en\ déduit\ que$:

$$\exists\, \alpha \in\,]0,1[\quad : \quad \varphi(\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists\, \alpha \in\,]0,1[\quad : \ \cos\alpha = \frac{2}{(\alpha+1)^2}$$

6) $soit \quad \varphi(x) = x^2\cos x + x\sin x + 1$

$\varphi\ est\ continue\ sur\ D_\varphi = \mathbb{R}$
$Donc\ \varphi\ est\ continue\ sur\ ]0,\pi[\ \subset \mathbb{R}$

$On\ a \quad \varphi(0) = 0+0+1 = 1 > 0$
$Et\ on\ a \quad \varphi(\pi) = \pi^2\cos\pi + \pi\sin\pi + 1$
$= 1-\pi^2 = (1-\pi)(1+\pi) < 0$

$$D'où \quad \varphi(0)\cdot\varphi(\pi) < 0$$

Donc d'après le TVI on en déduit que :

$$\exists\, \alpha \in\,]0,\pi[\quad ; \quad \varphi(\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists\, \alpha \in\,]0,\pi[\ ;\ \alpha^2\cos\alpha + \alpha\sin\alpha + 1 = 0$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Solution N° 102 :

On pose : $t = \dfrac{2-x}{3+x}$

L'équation (E) devient alors :

$$t^{\frac{1}{4}} + t^{\frac{-1}{4}} = 2 \quad ; \quad t > 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(t^{\frac{1}{4}} + t^{\frac{-1}{4}}\right)^2 = 4 \quad ; \quad t > 0$$

$$\Rightarrow \quad t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{-1}{2}} + 2 \cdot t^{\frac{1}{4}} \cdot t^{\frac{-1}{4}} = 4 \quad ; \quad t > 0$$

$$\Rightarrow \quad t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{-1}{2}} + 2 = 4 \quad ; \quad t > 0$$

$$\Rightarrow \quad t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{-1}{2}} = 2 \quad ; \quad t > 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{-1}{2}}\right)^2 = 4 \quad ; \quad t > 0$$

$$\Rightarrow \quad t^1 + t^{-1} + 2 \cdot t^{\frac{1}{2}} \cdot t^{\frac{-1}{2}} = 4 \quad ; \quad t > 0$$

$$\Rightarrow \quad t^1 + t^{-1} + 2 = 4 \quad ; \quad t > 0$$

$$\Rightarrow \quad t^1 + t^{-1} = 2 \quad ; \quad t > 0$$

$$\Rightarrow \quad t + \frac{1}{t} = 2 \quad ; \quad t > 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{t^2+1}{t} = 2 \quad ; \quad t > 0$$

$$\Rightarrow \quad t^2 - 2t + 1 = 0 \quad ; \quad t > 0$$

$$\Rightarrow \quad (t-1)^2 = 0 \quad ; \quad t > 0$$

$$\Rightarrow \quad t = 1 > 0 \quad ; \quad t > 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2-x}{3+x} = 1$$

$$\Rightarrow \quad 2 - x = 3 + x$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-1}{2}$$

Inversement on a encore l'égalité :

$$\sqrt[4]{\frac{2+\frac{1}{2}}{3-\frac{1}{2}}} + \sqrt[4]{\frac{3-\frac{1}{2}}{2+\frac{1}{2}}} = \sqrt[4]{1} + \sqrt[4]{1} = 2$$

Donc la fraction $\frac{-1}{2}$ est la seule solution pour cette équation.

2) en utilisant des puissances rationnelles on se rend compte que (E) devient :

$$\frac{1}{3}(x+3)^{\frac{1}{3}} + (x^{-2} + 3x^{-3})^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}(x+3)^{\frac{1}{3}} + \left(x^{-2}(1+3x^{-1})\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}(x+3)^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{-2}{3}}(1+3x^{-1})^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}(x+3)^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{-2}{3}}\left(x^{-1}(x^1+3)\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}(x+3)^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{-2}{3}} \cdot x^{\frac{-1}{3}}(x+3)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}(x+3)^{\frac{1}{3}} + x^{-1}(x+3)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+3)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3} + x^{-1}\right) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+3)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+3)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{x+3}{3x}\right) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+3)^{\frac{1}{3}}\cdot(x+3)^{1}\cdot(3x)^{-1}=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+3)^{\frac{4}{3}}\cdot(3x)^{-1}=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}(x+3)^{\frac{4}{3}}\cdot x^{-1}\cdot x^{\frac{-1}{3}}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+3)^{\frac{4}{3}}\cdot x^{\frac{-4}{3}}=\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{x+3}{x}\right)^{\frac{4}{3}}=\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{4}{3}}=\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} oubien & \left(1+\frac{3}{x}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{4}} \\ oubien & -\left(1+\frac{3}{x}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{4}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} oubien & \frac{3}{x}=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{4}}-1 \\ oubien & \frac{-3}{x}=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{4}}+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} oubien & \frac{x}{3}=\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{4}}-1} \\ oubien & \frac{-x}{3}=\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{4}}+1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} oubien & x=\left(\frac{3}{\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{4}}-1}\right) \\ oubien & x=\left(\frac{-3}{\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{4}}-1}\right) \end{cases}$$

3) en utilisant les puissances rationnelles l'équation devient :

$$(E)\ :\quad 2\cdot x^{\frac{4}{3}}-\frac{3\,x^{1}}{x^{\frac{1}{3}}}-20=0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\,x^{\frac{4}{3}}-3\cdot x^{\left(1-\frac{1}{3}\right)}-20=0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\,x^{\frac{4}{3}}-3\,x^{\frac{2}{3}}-20=0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\,t^{2}-3t-20=0 \quad ; \quad t=t^{\frac{2}{3}}>0$$

$$\Leftrightarrow \quad t=\frac{3\pm\sqrt{13}}{4} \quad ; \quad \Delta=13$$

$$\Leftrightarrow \quad t=\frac{3+\sqrt{13}}{4}>0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^{\frac{2}{3}}=\frac{3+\sqrt{13}}{4}>0$$

$$\Leftrightarrow \quad x=\left(\frac{3+\sqrt{13}}{4}\right)^{\frac{3}{2}}>0$$

4) $(E):\ \sqrt[3]{x^3-3x^2+x+1}=x-1$

$$\Leftrightarrow \quad (x^3-3x^2+x+1)=(x-1)^3$$

$$\Leftrightarrow \quad x^3-3x^2+x+1=x^3+3x-3x^2-1$$

$$\Leftrightarrow \quad -2x+2=0$$

$$\Leftrightarrow \quad x=1$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Solution N° 103 :

1) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}\right)\times\frac{(x+8)^{\frac{2}{3}}+2(x+8)^{\frac{1}{3}}+4}{(x+8)^{\frac{2}{3}}+2(x+8)^{\frac{1}{3}}+4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left((x+8)^{\frac{1}{3}}\right)^3-2^3}{x\left((x+8)^{\frac{2}{3}}+2(x+8)^{\frac{1}{3}}+4\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left((x+8)^{\frac{2}{3}}+2(x+8)^{\frac{1}{3}}+4\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left((x+8)^{\frac{2}{3}}+2(x+8)^{\frac{1}{3}}+4\right)}$$

$$=\frac{1}{\left((0+8)^{\frac{2}{3}}+2(0+8)^{\frac{1}{3}}+4\right)}=\frac{1}{12}$$

2) $$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}-x}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}-x}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\left(x^{\frac{-1}{3}}-1\right)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(x^{\frac{-1}{3}}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-1\right)=\frac{1}{0^+}-1=+\infty$$

3) $$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}+1}\right)=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}-1}{x^{\frac{2}{3}}+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to \infty}\frac{x^{\frac{1}{3}}\left(1-x^{\frac{-1}{3}}\right)}{x^{\frac{2}{3}}\left(1+x^{\frac{-2}{3}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to \infty}\left(\frac{1-\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}}{1+\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}}\right)=\frac{1-0}{1+0}=1$$

4) $$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-\sqrt[3]{x+6}}{3-\sqrt{2x+5}}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x-(x+6)^{\frac{1}{3}}}{3-(2x+5)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^3-\left((x+6)^{\frac{1}{3}}\right)^3}{3^2-\left((2x+5)^{\frac{1}{2}}\right)^2}\right)\times\left(\frac{3+(2x+5)^{\frac{1}{2}}}{x^2+x(x+6)^{\frac{1}{3}}+(x+6)^{\frac{2}{3}}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^3-x-6}{4-2x}\right)\times\left(\frac{3+9^{\frac{1}{2}}}{4+2(8)^{\frac{1}{3}}+8^{\frac{2}{3}}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 2}\left(\frac{-1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{-4}{2}-2-\frac{3}{2}\right)=\frac{-11}{4}$$

5) $$\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x}-x\right)=\lim_{x\to +\infty}(x^3+x)^{\frac{1}{3}}-x$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\left((x^3+x)^{\frac{1}{3}}\right)^3-x^3}{(x^3+x)^{\frac{2}{3}}+x\,(x^3+x)^{\frac{1}{3}}+x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{\left((x^3)^{\frac{2}{3}}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2}{3}}+x\,(x^3+x)^{\frac{1}{3}}+x^2\right)}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{x\left(x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2}{3}}+\,(x^3+x)^{\frac{1}{3}}+x\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(x^3+x\right)^{\frac{1}{3}}+x}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{(+\infty)(1+0)^{\frac{2}{3}}+\infty+\infty}\right)=\frac{1}{+\infty}=0$$

6) $\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(x^1-x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^1\left(1-x^{\frac{-2}{3}}-x^{\frac{-1}{2}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^1\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$= (+\infty)(1-0-0)=+\infty$$

Solution N° 104 :

1) $x^8-25=0$

$$\Leftrightarrow \quad t^2=25 \quad ; \quad t=x^4$$

$$\Leftrightarrow \quad t=\pm\sqrt{25}$$

$$\Leftrightarrow \quad t=+\sqrt{25} \quad ; \quad car \quad t=x^4\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^4=5$$

$$\Leftrightarrow \quad u^2=5 \quad ; \quad u=x^2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad u=\pm\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow \quad u=+\sqrt{5} \quad car \quad u=x^2\geq 0$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Leftrightarrow \quad x^2=\sqrt{5}=5^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad x=\pm\sqrt{\sqrt{5}}=\pm\sqrt[4]{5}$$

$$\Leftrightarrow \quad S=\{-\sqrt[4]{5} \ ; \ \sqrt[4]{5}\}$$

2) $x^7=\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad x^7=3^{\frac{1}{2}}$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x^7\right)^{\frac{1}{7}}=\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{7}}$$

$$\Leftrightarrow \quad x=3^{\frac{1}{14}}=\sqrt[13]{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad S=\{\sqrt[14]{3}\}$$

3) $x^4=16 \quad \Leftrightarrow \quad t^2=16 \quad ; \quad t=x^2>0$

$$\Leftrightarrow \quad t=\pm\sqrt{16}=\pm 4$$

$$\Leftrightarrow \quad t=4 \quad car \quad t=x^2>0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2=4 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)(x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad x=\pm 2$$

4) $x^3+8=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3=-8$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x^3\right)^{\frac{1}{3}}=(-8)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \quad x=-2$$

5) $\sqrt[5]{x}=\sqrt[6]{7} \quad \Leftrightarrow \quad x^{\frac{1}{3}}=7^{\frac{1}{6}}$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3=\left(7^{\frac{1}{6}}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow \quad x=\left(7^{\frac{1}{6}}\right)^3$$

6) $(3x-4)^5 = 32 \quad \Leftrightarrow \quad ((3x-4)^5)^{\frac{1}{5}} = 32^{\frac{1}{5}}$

$$\Leftrightarrow \quad 3x-4 = (2^5)^{\frac{1}{5}} = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x-4 = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 2$$

7) $\sqrt[3]{x^2} - 5\cdot\sqrt[3]{x} + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad x^{\frac{2}{3}} - 5\cdot x^{\frac{1}{3}} + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad t^2 - 5t + 4 = 0 \ ; \ t = x^{\frac{1}{3}} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad t = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} \quad ; \quad \Delta = 9 > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad t = 4 \quad oubien \quad t = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x^{\frac{1}{3}} = 4 \quad oubien \quad x^{\frac{1}{3}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 4^3 \quad oubien \quad \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 1^3$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 64 \quad oubien \quad x = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad S = \{1 \ ; \ 64\}$$

8) $9x - 7\cdot\sqrt[3]{x} - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 9x - 7\,x^{\frac{1}{3}} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 9t^3 - 7t - 2 = 0 \quad ; \quad t = x^{\frac{1}{3}} \in \mathbb{R}$$

A ce stade, il faut remarquer que 1 est une racine simple du polynôme de gauche donc on peut effectuer la division de ce polynôme par $(t-1)$

$$\Leftrightarrow \quad (t-1)(9t^2 + 9t + 2) = 0$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Leftrightarrow \quad (t-1)\cdot 9\left(t + \frac{2}{3}\right)\left(t + \frac{1}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} oubien \quad t = 1 \\ oubien \quad t = -2/3 \\ oubien \quad t = -1/3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} oubien \quad x^{1/3} = 1 \\ oubien \quad x^{1/3} = -2/3 \\ oubien \quad x^{1/3} = -1/3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} oubien \quad x = 1 \\ oubien \quad x = (-2/3)^3 \\ oubien \quad t = (-1/3)^3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad S = \left\{1 \ ; \ \frac{-8}{27} \ ; \ \frac{-1}{27}\right\}$$

9) $x^5 - 5x^2 - 24 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad t^2 - 5t - 24 = 0 \quad ; \quad t = x^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad t = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{2} \quad ; \quad \Delta = 121 > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad t = \frac{5 + \sqrt{121}}{2} \quad car \quad t = x^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 = 8 \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{8}$$

$$\Leftrightarrow \quad Solutions = \{-\sqrt{8} \ ; \ \sqrt{8}\}$$

Solution N° 105 :

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{Arctan(3x)}{x} = 3 \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{Arctan(3x)}{3x} = 3$

2) $\lim\limits_{|x|\to+\infty} Arctan(x^4 - x)$

$$= \lim_{\substack{t\to+\infty \\ t=x^4-x}} Arctan(t) = \frac{\pi}{2}$$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x\cdot Arctan(x) - \frac{\pi x}{2}\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(Arctan(x) - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} -x\cdot Arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{\substack{t\to0^+ \\ t=\frac{1}{x}}} \frac{-Arctan(t)}{t} = -1$$

4) $\lim\limits_{x\to0} \frac{Arctan(x^2+4x)}{x}$

$$= \lim_{x\to0} \frac{Arctan(x^2+4x)}{(x^2+4x)}\cdot\left(\frac{x^2+4x}{x}\right)$$

$$= \lim_{\substack{t\to0 \\ t=x^2+4x}} \frac{Arctan(t)}{t} \times \lim_{x\to0}\left(\frac{x^2+4x}{x}\right)$$

$$= \lim_{t\to0} \frac{Arctan(t)}{t} \times \lim_{x\to0} (x+4)$$

$$= 1\times(0+4) = 4$$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2+1)\, Arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2+1}{x}\right)\cdot\left(\frac{Arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(x+\frac{1}{x}\right) \times \lim_{\substack{t\to0^- \\ t=\frac{1}{x}}} \frac{Arctan\, t}{t}$$

$$= (-\infty+0)\times(1) = -\infty$$

6) $Soit\ \ l = \lim\limits_{x\to1^+} \left(\frac{Arctan\left(\frac{1}{1-x^2}\right)+\frac{\pi}{2}}{x-1}\right)$

$$Rappel : \forall x\le 0\,;\ Arctan(x) + Arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-\pi}{2}$$

$$Si\quad x\to1^+\quad Alors\quad x^2\to1^+$$
$$\Rightarrow\quad 1-x^2\to0^-$$
$$\Rightarrow\quad 1-x^2<0$$

$$\Rightarrow\ Arctan(1-x^2) + Arctan\left(\frac{1}{1-x^2}\right) = \frac{-\pi}{2}$$

$$D'où\quad l = \lim_{x\to1^+} \frac{-Arctan(1-x^2)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to1^+} \frac{Arctan(1-x^2)}{(1-x^2)}\cdot(1+x)$$

$$= \lim_{\substack{t\to0^- \\ t=1-x^2}} \frac{Arctan(t)}{t}\cdot(1+1)$$

$$= 1\times(1+1) = 2$$

7) $l = \lim\limits_{x\to1^+} \left(\frac{x-2\sqrt{Arctan(x)-\frac{\pi}{4}}-1}{x-1}\right)$

$$= \lim_{x\to1^+} \left(\frac{x-1}{x-1} - 2\left(\frac{\sqrt{Arctan(x)-\frac{\pi}{4}}}{x-1}\right)\right)$$

$$= \lim_{x\to1^+} \left(1-2\left(\sqrt{\frac{Arctan(x)-\frac{\pi}{4}}{x-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)\right)$$

$$Soit\quad \alpha = Arctan(x) - \frac{\pi}{4}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$\Longrightarrow \quad \tan\alpha = \tan\left(Arctan(x) - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\tan(Arctan(x)) - \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1 + \tan(Arctan(x)) \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \frac{x-1}{1+x}$$

$$Donc \quad \alpha = Arctan\left(\frac{x-1}{1+x}\right) = Arctan(x) - \frac{\pi}{4}$$

$$Ainsi \quad : \quad \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{Arctan(x) - \frac{\pi}{4}}{x-1}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}\right)\left(Arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}\right)\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \cdot \frac{Arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x+1}\right) \cdot \lim_{\substack{t\to 0^+ \\ t=\frac{x-1}{x+1}}}\left(\frac{Arctan\ t}{t}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{1+1}\right) \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Remarque : plus tard dans la leçon de dérivation on écrira directement que :

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{Arctan(x) - \frac{\pi}{4}}{x-1}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{Arctan(x) - Arctan(1)}{x-1}\right)$$

$$= (Arctan\ x)'_{/x=1} = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)_{/x=1} = \frac{1}{2}$$

Revenons maintenant à la limite l qu'on devrait calculer par une méthode légale :

$$l = \lim_{x\to 1^+}\left(1 - 2\sqrt{\frac{Arctan(x) - \frac{\pi}{4}}{x-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)$$

$$= 1 - 2\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \left(\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)$$

$$= 1 - \sqrt{2} \cdot \lim_{\substack{t\to 0^+ \\ t=\sqrt{x-1}}}\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$= 1 - \sqrt{2} \times \left(\frac{1}{0^-}\right) = -\infty$$

8) $$\lim_{x\to 1^\pm}\frac{Arctan(\sqrt[3]{x-1})}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^\pm}\frac{Arctan\left((x-1)^{\frac{1}{3}}\right)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^\pm}\frac{Arctan\left((x-1)^{\frac{1}{3}}\right)}{(x-1)^{\frac{1}{3}}} \times \frac{(x-1)^{\frac{1}{3}}}{(x-1)^1}$$

$$= \lim_{\substack{t\to 0^\pm \\ t=(x-1)^{\frac{1}{3}}}}\frac{Arctan(t)}{t} \times \lim_{x\to 1^+}(x-1)^{\frac{1}{3}-1}$$

$$= \lim_{t\to 0^\pm}\frac{Arctan(t)}{t} \times \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$= \lim_{t\to 0^\pm}\frac{Arctan(t)}{t} \times \lim_{\substack{t\to 0^+ \\ t=(x-1)^{2/3}}}\frac{1}{t}$$

$$= 1 \times \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Solution N° 106 :

Voici d'abord un petit rappel :

- $\forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad \tan(Arctan(x)) = x$
- $\forall\, x \in \left]\frac{-\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[\quad ; \quad Arctan(\tan x) = x$

1) $Arctan\left(tan\left(\frac{41\pi}{17}\right)\right)$

$$= Arctan\left(tan\left(2\pi + \frac{7\pi}{17}\right)\right)$$

$$= Arctan\left(tan\left(\frac{7\pi}{17}\right)\right) = \frac{7\pi}{17} \in \left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$$

2) $Arctan\left(tan(5Arctan\sqrt{3})\right)$

$$= Arctan\left(tan\left(5 \times \frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= Arctan\left(tan\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)$$

$$= Arctan\left(tan\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= Arctan\left(tan\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right) = \frac{-\pi}{3} \in \left]\frac{-\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$$

3) $tan(Arctan(2016)) = 2016 \in \mathbb{R}$

4) $tan(-Arctan(5)) = -tan(Arctan(5))$
$= -5 \in \mathbb{R}$

5) $Arctan\left(tan\left(\frac{-79\pi}{3}\right)\right)$

$$= Arctan\left(tan\left(-26\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= Arctan\left(tan\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right) = \frac{-\pi}{3} \in \left]\frac{-\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$$

6) $Arctan\left(\frac{1}{tan\left(\frac{3\pi}{11}\right)}\right)$

$$= Arctan\left(\frac{cos\left(\frac{3\pi}{11}\right)}{sin\left(\frac{3\pi}{11}\right)}\right)$$

$$= Arctan\left(\frac{sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{11}\right)}{cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{11}\right)}\right)$$

$$= Arctan\left(\frac{sin\left(\frac{5\pi}{11}\right)}{cos\left(\frac{5\pi}{11}\right)}\right)$$

$$= Arctan\left(tan\left(\frac{5\pi}{11}\right)\right) = \frac{5\pi}{22} \in \left]\frac{-\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$$

7) $Soit \quad \alpha = Arctan\left(\frac{2}{3}\right) - Arctan\left(\frac{3}{7}\right)$

$$tan(\alpha) = tan\left(Arctan\left(\frac{2}{3}\right) - Arctan\left(\frac{3}{7}\right)\right)$$

$$= \frac{tan\left(Arctan\left(\frac{2}{3}\right)\right) - tan\left(Arctan\left(\frac{3}{7}\right)\right)}{1 + tan\left(Arctan\left(\frac{2}{3}\right)\right) \cdot tan\left(Arctan\left(\frac{3}{7}\right)\right)}$$

$$= \frac{\frac{2}{3} - \frac{3}{7}}{1 + \frac{2}{7}} = \frac{5}{27}$$

$$Ainsi \quad : \quad \alpha = Arctan\left(\frac{5}{27}\right)$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

8) $tan\left(2Arctan(3)\right)$

$$= tan\left(Arctan(3) + Arctan(3)\right)$$

$$= \frac{tan\left(Arctan(3)\right) + tan\left(Arctan(3)\right)}{1 - tan\left(Arctan(3)\right)tan\left(Arctan(3)\right)}$$

$$= \frac{3+3}{1-9} = \frac{-3}{4} \in \mathbb{R}$$

Solution N° 107 :

1) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{\sqrt[4]{x}-1}\right)$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\left(\sqrt[3]{x+7}-2\right)\left(\sqrt[4]{x}+1\right)}{\left(\sqrt[4]{x}-1\right)\left(\sqrt[4]{x}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \left(\frac{(x+7)^{\frac{1}{3}}-2}{x^{\frac{1}{2}}-1}\right) \times \left(\sqrt[4]{1}+1\right)$$

$$= 2\lim_{x\to 1} \left(\frac{(x+7)^{\frac{1}{3}}-2}{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 - 1^2}\right) \times \left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)$$

$$= 2\lim_{x\to 1} \left(\frac{(x+7)^{\frac{1}{3}}-2}{x-1}\right) \times \left(1^{\frac{1}{2}}+1\right)$$

$$= 4\lim_{x\to 1} \left(\frac{(x+7)^{\frac{1}{3}}-2}{x-1}\right)$$

$$\times \frac{(x+7)^{\frac{2}{3}} + 2(x+7)^{\frac{1}{3}} + 4}{(x+7)^{\frac{2}{3}} + 2(x+7)^{\frac{1}{3}} + 4}$$

$$= 4\lim_{x\to 1} \frac{\left((x+7)^{\frac{1}{3}}\right)^3 - 2^3}{(x-1)\left((x+7)^{\frac{2}{3}} + 2(x+7)^{\frac{1}{3}} + 4\right)}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= 4\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{(x+7)^{\frac{2}{3}} + 2(x+7)^{\frac{1}{3}} + 4}\right)$$

$$= 4 \times \left(\frac{1}{(1+7)^{\frac{2}{3}} + 2(1+7)^{\frac{1}{3}} + 4}\right) = \frac{1}{3}$$

2) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1} - 2x\right)$

$$= \lim_{x\to +\infty} (x^3+x^2+1)^{\frac{1}{3}} - 2x$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \left(x^3\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)\right)^{\frac{1}{3}} - 2x$$

$$= \lim_{x\to +\infty} (x^3)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} - 2x$$

$$= \lim_{x\to +\infty} x\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} - 2x$$

$$= \lim_{x\to +\infty} x\left(\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} - 2\right)$$

$$= (+\infty)\left((1+0+0)^{\frac{1}{3}} - 2\right) = -\infty$$

3) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^2-x} - x - 1\right)$

$$= \lim_{x\to +\infty} (x^2-x)^{\frac{1}{3}} - x - 1$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \left(x^3\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)\right)^{\frac{1}{3}} - x - 1$$

$$= \lim_{x\to +\infty} x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} - x - 1$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} - 1 - \frac{1}{x}\right)$$

$$= (+\infty)\left((0-0)^{\frac{1}{3}} - 1 - 0\right) = -\infty$$

4) $\lim\limits_{x\to4} \dfrac{(5-x)^{\frac{1}{3}}-1}{2-(x+4)^{\frac{1}{3}}}$

$$= \lim_{x\to4} \frac{\left((5-x)^{\frac{1}{3}}\right)^3 - 1^3}{2^3-\left((x+4)^{\frac{1}{3}}\right)^3} \times \frac{2^2+2(x+4)^{\frac{1}{3}}+(x+4)^{\frac{2}{3}}}{(5-x)^{\frac{2}{3}}+(5-x)^{\frac{1}{3}}+1}$$

$$= \lim_{x\to4}\left(\frac{4-x}{4-x}\right) \times \frac{2^2+2(8)^{\frac{1}{3}}+(8)^{\frac{2}{3}}}{(5-4)^{\frac{2}{3}}+(5-4)^{\frac{1}{3}}+1}$$

$$= 1 \times \frac{4+4+4}{(1)^{\frac{2}{3}}+(1)^{\frac{1}{3}}+1} = 4$$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1} - x\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left((x^3+x^2+1)^{\frac{1}{3}} - x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left((x^3+x^2+1)^{\frac{1}{3}}\right)^3 - x^3}{(x^3+x^2+1)^{\frac{2}{3}} + x(x^3+x^2+1)^{\frac{1}{3}} + x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{\left(x^3\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)\right)^{\frac{2}{3}} + x\left(x^3\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)\right)^{\frac{1}{3}} + x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{2}{3}} + x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} + x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} + 1\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1+\frac{1}{x^2}}{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} + 1}\right)$$

$$= \left(\frac{1+0}{(1+0+0)^{\frac{2}{3}}+(1+0+0)^{\frac{1}{3}}+1}\right) = \frac{1}{3}$$

6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt[3]{x^4+5} + 2x\right)$

$$= \lim_{x\to-\infty} (x^4+5)^{\frac{1}{3}} + 2x$$

$$= \lim_{\substack{t\to+\infty \\ t=-x}} (t^4+5)^{\frac{1}{3}} - 2t$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left(t^4\left(1+\frac{5}{t^4}\right)\right)^{\frac{1}{3}} - 2t$$

$$= \lim_{t\to+\infty} t^{\frac{4}{3}}\left(1+\frac{5}{t^4}\right)^{\frac{1}{3}} - 2t$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left(t^{\frac{4}{3}}\right)\left(\left(1+\frac{5}{t^4}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{t^{\frac{1}{3}}}\right)$$

$$= (+\infty)\left((1+0)^{\frac{1}{3}} - 0\right) = +\infty$$

Solution N° 108 :

En utilisant les puissances rationnelles, l'équation (E) devient :

$$x^{\frac{2}{3}} - 3(x^2-x)^{\frac{1}{3}} + 2(x-1)^{\frac{2}{3}} = 0$$

D'abord l'équation est définie si :

$x \in \mathbb{R}^+$; $(x^2-x) \in \mathbb{R}$; $(x-1) \in \mathbb{R}^+$

c-à-d : $x \geq 1$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$(E) \iff x^{\frac{2}{3}} - 3\left(x^2(1-x^{-1})\right)^{\frac{1}{3}} + 2\left(x(1-x^{-1})\right)^{\frac{2}{3}} = 0$$

$$\iff x^{\frac{2}{3}} - 3(x^2)^{\frac{1}{3}}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} + 2\,x^{\frac{2}{3}}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}} = 0$$

$$\iff x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{2}{3}}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} + 2\,x^{\frac{2}{3}}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}} = 0$$

$$\iff x^{\frac{2}{3}}\left(1 - 3\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} + 2\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\right) = 0$$

$$\iff \left(1 - 3\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} + 2\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\right) = 0$$

$$\iff 1 - 3t + 2t^2 = 0 \quad ; \quad t = \left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\iff t = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{4} \quad ; \quad \Delta = 1$$

$$\iff t \in \left\{1\,;\frac{1}{2}\right\}$$

$$\iff t = \frac{1}{2} \quad sinon \quad \left| \begin{array}{l} si \quad t = 1 \\ alors \quad \frac{-1}{x} = 0 \\ (contradiction) \end{array} \right.$$

$$\iff \left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\iff 1 - \frac{1}{x} = \frac{1}{8} \quad \iff \quad x = \frac{8}{7}$$

■ un passage aux puissances rationnelles nous permet d'écrire :

$$(F) : \quad (1+x)^{\frac{2}{3}} - 4(1-x)^{\frac{2}{3}} - 4(1-x^2)^{\frac{1}{3}} = 0$$

Cette équation est définie si on aurait :

$$1 + x \geq 0 \quad ; \quad 1 - x \geq 0 \quad ; \quad (1-x^2) \in \mathbb{R}$$

c-à-d on devrait avoir $x \in [-1\,;1]$

$$(1+x)^{\frac{2}{3}} - 4(1-x)^{\frac{2}{3}} - 4(1-x)^{\frac{1}{3}}(1+x)^{\frac{1}{3}} = 0$$

$$\iff (1+x)^{\frac{2}{3}}\left(1 - \frac{(1-x)^{\frac{2}{3}}}{(1+x)^{\frac{2}{3}}} - \frac{4(1-x)^{\frac{1}{3}}(1+x)^{\frac{1}{3}}}{(1+x)^{\frac{2}{3}}}\right) = 0$$

$$\iff (1+x)^{\frac{2}{3}}\left(1 - \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{2}{3}} - 4\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{3}}\right) = 0$$

$$\iff \left(1 - \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{2}{3}} - 4\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{3}}\right) = 0$$

$$\iff 1 - t^2 - 4t = 0 \quad ; \quad t = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{3}} \in \mathbb{R}$$

$$\iff t = \frac{-4 \pm 2\sqrt{5}}{2} \quad ; \quad \Delta = 20$$

$$\iff \begin{cases} oubien \quad \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{3}} = -(2+\sqrt{5}) \\ oubien \quad \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{3}} = -2+\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} oubien \quad \frac{1-x}{1+x} = -(2+\sqrt{5})^3 \\ oubien \quad \frac{1-x}{1+x} = (-2+\sqrt{5})^3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} oubien \quad \frac{1-x}{1+x} = -38 - 17\sqrt{5} \\ oubien \quad \frac{1-x}{1+x} = 17\sqrt{5} - 38 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} oubien \quad x = \dfrac{-38 - 17\sqrt{5}}{37 - 17\sqrt{5}} > 1 \\ \\ oubien \quad x = \dfrac{39 - 17\sqrt{5}}{17\sqrt{5} - 37} \ \epsilon \ [-1\,;1] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad Solutions(F) = \left\{ \frac{39 - 17\sqrt{5}}{17\sqrt{5} - 37} \right\}$$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[4]{x-1}\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\left((x+1)^{\frac{1}{4}} - (x-1)^{\frac{1}{4}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\, x^{\frac{1}{4}}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{4}} - \left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{4}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{7}{4}}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{4}} - \left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{4}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{7}{4}}\left(\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 - \left(\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2\right)}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{4}} + \left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{4}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{7}{4}}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right)}{(1+0)^{\frac{1}{4}} + (1-0)^{\frac{1}{4}}}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{7}{4}}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \times \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{7}{4}}\left(\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2\right)}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{7}{4}}\left(\frac{2}{x}\right)}{(1+0)^{\frac{1}{2}} + (1-0)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{7}{4}}\left(\frac{2}{x}\right) = \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{3}{4}}\right) = +\infty$$

■ d'abord on doit calculer la limite :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{x^4+x} - x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left((x^4+x)^{\frac{1}{4}} - x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left((x^4)^{\frac{1}{4}}\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{4}} - x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(x\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{4}} - x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{4}} - 1\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\left(\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 - 1^2\right)}{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{4}} + 1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right)}{(1+0)^{\frac{1}{4}} + 1}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x\to+\infty} x\left(\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\left(\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 - 1^2\right)}{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}} + 1}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\frac{1}{x^3}\right)}{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}} + 1}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\frac{1}{x^2}}{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}} + 1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{0}{(1+0)^{\frac{1}{2}} + 1}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[4]{x^4+x} - x\right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[4]{x^4+x} - x - 2\right) = -2$$

3) $Soit \quad l = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1} + mx\right)$

$si \ m \geq 0 \quad alors \quad l = (+\infty) + m(+\infty) = +\infty$

$Si \quad m < 0 \quad alors \quad n = -m > 0$

$D'où \quad : \quad l = \lim_{x\to+\infty} (x^3+x^2+1)^{\frac{1}{3}} - nx$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left((x^3+x^2+1)^{\frac{1}{3}}\right)^3 - (nx)^3}{(x^3+x^2+1)^{\frac{2}{3}} + nx(x^3+x^2+1)^{\frac{1}{3}} + n^2x^2}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist. it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(1-n^3)x^3 + x^2 + 1}{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{2}{3}} + nx^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} + n^2x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left((1-n^3)x + 1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{2}{3}} + n\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} + n^2\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(1-n^3)x + 1 + \frac{1}{x^2}}{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{2}{3}} + n\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} + n^2}$$

$Si \quad (1-n^3) = 0 \quad alors \quad l = \frac{1}{1+n+n^2} = \frac{1}{3}$

$Si \quad (1-n^3) > 0 \quad alors \quad l = \frac{+\infty}{1+n+n^2}$

$Si \quad (1-n^3) < 0 \quad alors \quad l = \frac{-\infty+1+0}{1+n+n^2}$

$$Conclusion \quad : \quad l = \begin{cases} -\infty \ ; \ si \quad m < -1 \\ \frac{1}{3} \quad ; \ si \quad m = -1 \\ +\infty \quad si \quad m > -1 \end{cases}$$

Solution N° 109 :

1) soit $x \geq -1$ une solution de l'équation :

$$(E) \ : \ \sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+1)^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{3}} = 1 \quad ; \quad x \geq -1$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+1)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{3}} + 1 \quad ; \quad x \geq -1$$

$$\Leftrightarrow \quad \left((x+1)^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(x^{\frac{1}{3}} + 1\right)^2 \quad ; \quad x \geq -1$$

$$\Leftrightarrow \quad x+1 = x^{\frac{2}{3}} + 2\,x^{\frac{1}{3}} + 1 \quad ; \quad x \geq -1$$

$$\Leftrightarrow \quad x - x^{\frac{2}{3}} - 2\,x^{\frac{1}{3}} = 0 \quad ; \quad x \geq -1$$

$$\Leftrightarrow \quad t^3 - t^2 - 2t = 0 \quad ; \quad t = x^{\frac{1}{3}} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad t(t-2)(t+1) = 0 \quad ; \quad t \geq -1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} oubien & t = 0 \\ oubien & t = 2 \\ oubien & t = -1 \end{cases} \quad ; \quad t \geq -1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} oubien & x^{\frac{1}{3}} = 0 \\ oubien & x^{\frac{1}{3}} = 2 \\ oubien & x^{\frac{1}{3}} = -1 \end{cases} \quad ; \quad x \geq -1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} oubien & x = 0 \\ oubien & x = 8 \\ oubien & x = -1 \end{cases} \quad ; \quad x \geq -1$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in \{-1 \ ; \ 0 \ ; \ 8\} \quad ; \quad x \geq -1$$

Remarque : On peut très facilement vérifier que chaque éventualité de l'ensemble $\{-1\,;\,0\,;\,8\}$ vérifie bien (E)

$$Donc \quad solution(E) = \{-1\,;0\,;8\}$$

2) On considère la fonction φ définie par : $\forall\, x \in [0,2]$; $\varphi(x) = h(x+1) - h(x)$
On a φ est continue sur $[0,2]$ car h et x et $x+1$ sont continues sur $[0,2]$ et que la composition $h(x+1)$ est bien définie. Donc φ est continue sur $[0,1] \subset [0,2]$. Or on a :

$$\begin{aligned} \varphi(0)\cdot\varphi(1) &= \big(h(1)-h(0)\big)\big(h(2)-h(1)\big) \\ &= \big(h(1)-h(0)\big)\big(h(0)-h(1)\big) \\ &= -\big(h(1)-h(0)\big)^2 \leq 0 \end{aligned}$$

$$Ainsi \quad : \quad \begin{cases} \varphi \ continue \ sur \ [0,1] \\ \varphi(0) \times \varphi(1) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \exists\, \alpha \in [0,1] \quad ; \quad \varphi(\alpha) = 0 \quad ; \quad (TVI)$$
$$\Rightarrow \quad \exists\, \alpha \in [0,1] \quad ; \quad h(\alpha+1) = h(\alpha)$$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x}} - 1\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}-1\right)\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^2 + \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} + 1\right)}{\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^2 + \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} + 1\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}\right)^3 - 1^3\right)}{\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^2 + \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} + 1\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x\cdot\frac{1}{x}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2 + \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} + 1}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2 + \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} + 1}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{(1+0)^2 + (1+0)^{\frac{1}{3}} + 1}\right) = \frac{1}{3}$$

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Solution N° 110 :

Voici les résultats de mes calculs :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\cos x}{tan^2(2x)}\right)=\dfrac{1}{8}$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{4x}\right)=\dfrac{1}{8}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x-\sqrt{1+\sin x}}{x}\right)=\dfrac{-1}{2}$

4) $\lim\limits_{x\to \frac{2}{\pi}}\left(\dfrac{\pi x-2}{1-\sin\left(\frac{1}{x}\right)}\right)=-\infty$

5) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\left(\dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}\right)=\dfrac{-\sqrt{3}}{3}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{sin^2 x}-\dfrac{1}{1-\cos x}\right)=\dfrac{1}{2}$

7) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\cos x}{\sqrt{x}(2x-\pi)}\right)=0$

8) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}+x+1\right)=\dfrac{-1}{2}$

9) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2+x-6}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}\right)=10\sqrt{2}$

10) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{x^2+x}}{x}\right)=\sqrt{3}-1$

11) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x-x^2}\right)=\dfrac{1}{4}$

12) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{\dfrac{x^3}{x+1}}-x\right)=\dfrac{-1}{2}$

ROYAUME DU MAROC

SÉRIES D'EXERCICES

« 2ème Année Bac – SM »

You're not supposed to create new methods or new techniques. Just understand those that already exist . it's not about intelligence it's about hard work. It's about the amount of work per day dudes.

Projet de livre 2021-2022

Tome 2 : Suites Numériques

- **Monotonie d'une suite numérique**
- **Suites arithmétiques et géométriques**
- **Limite d'une suite numérique**
- **Critères de convergence**
- **Suites récurrentes**
- **Démontrer une proposition par récurrence**
- **Suites adjacentes**
- **Sommes finies et infinies**

Professeur Badr Eddine EL FATIHI
Ouarzazate 2021
Pour Octobre 2021