TD MATHEMATIQUES

" Le maître force l'exclave à travailler et en travaillant, l'exclave devient le maître de la nature."
Travaillez, travaillez pour vous-même, c'est là la clé du succcès.

❶ EVALUATIONS DES RESSOURCES

Exercice 1 :

A- Dans cet exercice, $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes et Re(z) la partie réelle du complexe z.
On note P$(z) = z^3 - (6+5i)z^2 + (3+20i)z + 10 - 15i$.

1. Déterminer les racines carrées du nombre complexe $w = -2i$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (3+3i)z + 5i = 0$.
3. (a) Montrer que : $3+2i$ est racine de P(z).
   Déterminer les réels a, b et c tels que P$(z) = (az^2 + bz + c)(z - (3+2i))$
   (b) Déduire dans l'ensemble $\mathbb{C}$, les solutions de l'équation (E) :
   $z^3 - (6+5i)z^2 + (3+20i)z + 10 - 15i = 0$.
   On notera z_1, z_2, z_3 les trois solutions de (E) telles que : Re(z_1) < Re(z_2) < Re(z_3)

B- Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct (O ; $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$).
On considère les points A, B, C d'affixes respectives $z_A = 1 + i\sqrt{3}$, $z_B = -1 - i$ et $z_C = (2+\sqrt{3}) + i$.

1. Calculer les distances AB, BC et AC. Quelle est la nature du triangle ABC ?
2. **a.** Ecrire z_A, z_B et $\frac{z_A}{z_B}$ sous formes trigonométriques.
   b. Ecrire $\frac{z_A}{z_B}$ sous forme algébrique.
   c. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

C- Le plan complexe est muni du repère orthonormé (O ; $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$). On considère pour tout complexe $z = x + iy$ différent de 1, avec x et y réels, le nombre complexe Z tel que $z' = \frac{z-1}{\bar{z}-1}$ On note M le point d'affixe z et M' le point d'affixe z'.

1. Calculer z'. Donner une interprétation géométrique du résultat de ce calcul.
2. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y.
3. Donner et construire l'ensemble des points M pour lesquels z' est un réel.

Exercice 2 :

1. P est un polynôme à variable complexe z défini par : P$(z)=z^3 + 3iz - 5 + 5i$
   (a) Vérifier que le nombre complexe $-1-i$ est une racine de P.
   (b) Déterminer les complexes a et b tels que : P$(z)=(z+1+i)(z^2+az+b)$.
   (c) Resoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation P(z)=0.
2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct On donne trois points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -1-i$, $z_B = 2-i$ et $z_C = -1+2i$.
   (a) Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des points M d'affixes z tels que : $|z-2+i| = |z+1-2i|$, puis vérifier que le point A appartient à $\mathcal{D}$.
   (b) Déterminer un argument du nombre complexe $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$, puis en déduire la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}})$.
   (c) En déduire la nature exacte du triangle ABC.
3. On considère la similitude directe S de centre B qui transforme A en C.
   (a) Déterminer le rapport et l'angle de la similitude S.
   (b) Donner l'écriture complexe de S.
   (c) $\mathcal{C}$ est un cercle circonscrit au triangle ABC. Déterminer les caractéristiques de $\mathcal{C}'$ image de $\mathcal{C}$ par S.

Exercice 3 :

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$).

1. On considère l'équation (E) :
   $z^3 + (-4\sqrt{3} + 8i)z^2 + (16 - 32\sqrt{3}i)z + 128i = 0$
   (a) Montrer que $-8i$ est solution de (E).
   (b) Déterminer a et b tels que :
   $z^3 + (-4\sqrt{3}+8i)z^2 + (16 - 32\sqrt{3}i)z + 128i = (z+8i)(z^2 + az + b)$.
   (c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation(E).
2. Soient A,B et C les points d'affixes $z_A = 2\sqrt{3} - 2i$, $z_B = 2\sqrt{3} + 2i$ et $z_C = -8i$.
   Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ qui transforme C en un point D.
   Soit h l'homothétie de centre O qui transforme B en D.
   (a) Montrer que OAB est un triangle équilatéral.

(b) Montrer que l'affixe du point D est $z_D = 4\sqrt{3} + 4i$.

(c) Montrer que OAD est un triangle rectangle.

(d) Déterminer l'écriture complexe de l'homothétie h.

3. Soit S la similitude directe de centre D qui transforme B en A.

(a) Démontrer que l'écriture complexe de S est : $z' = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{3}i)z - 8i$.

(b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S.

(c) Soit M(x,y) un point du plan et M$_0(x_0,y_0)$ son image par S.

(i) Déterminer l'expression analytique de S.

(ii) Déterminer l'image (D') par S de la droite (D) : $x - 2y + 1 = 0$.

Exercice 4 :

1. On considère l'équation (E) : $z^3 - 6z^2 + 12z - 16 = 0$ où z est un nombre complexe.

(a) Montrer que (E) admet une solution réelle z_0.

(b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$), on considère les points A, B et C d'affixes respectives 4, $1 + i\sqrt{3}$ et $1 - i\sqrt{3}$.

(a) Représenter A, B et C.

(b) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

3. Soit K le point d'affixe $-\sqrt{3} + i$. F l'image de K par la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et G l'image de K par la translation t de vecteur $\vec{OB}$.

(a) Déterminer les écritures complexes de la rotation r et de la translation t.

(b) Quelles sont les affixes respectives de F et de G.

(c) Montrer que les droites (OC) et (OF) sont perpendiculaires.

4. Soit H le quatrième sommet du parallélogramme COFH.

(a) Calculer l'affixe de H.

(b) Montrer que COFH est un carré.

Exercice 5 :

1. On considère h la transformation du plan qui à tout M$(x\,;y)$ associe le point M$_0(x_0\,;y_0)$ tel que :
$$\begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} + \frac{3}{2} \\ y' = x\sqrt{3} + y + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$
Soient z et z_0 les affixes respectifs des points M et M$_0$.

(a) Écrire z_0 en fonction de z.

(b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de h.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit la suite (z_n) par :
$$\begin{cases} z_0 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_{n+1} = (1 + i\sqrt{3})z_n \end{cases}$$
Soit M$_n$ le point d'affixe z_n, on pose $r_n = |z_n|$ et β_n=Arg(z_n) ainsi on a $z_n = r_n e^{i\beta_n}$

(a) Écrire z_0 et z_1 sous forme exponentielle.

(b) Déterminer les racines cubiques de z_1.

Exercice 6 :

L'exercice comporte trois (03) parties I/, II/ et III/.

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) d'unité graphique 1 cm.

Soient A, B, C et D quatre points du plan complexe d'affixes respectives :

$$z_A = -1 - i,\ z_B = 2 - 4i,\ z_C = 5 - i, \text{ et } z_D = 2 + 2i.$$

I/ On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E) définie par :

$$(E) : z^3 + (-3 + 5i)z^2 - (4 + 8i)z + 12 - 4i = 0.$$

1. Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle z_0 que l'on déterminera.

2. Déterminer deux nombres complexes a et b tels que pour tout nombre complexe z, on ait :

$$z^3 + (-3 + 5i)z^2 - (4 + 8i)z + 12 - 4i = (z - 2)(z^2 + az + b)$$

3. (a) Vérifier que $(3 - 3i)^2 = -18i$.

(b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

4. (a) Calculer sous forme algébrique les rapports $\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C}$ et $\frac{z_D - z_A}{z_D - z_C}$.

(b) Déduire la nature exacte des triangles ABC et ADC.

(c) Déduire que les points A, B, C et D sont cocycliques puis, déterminer le rayon et les coordonnées du centre du cercle $(\mathcal{C})$ circonscrit au quadrilatère ABCD (On désignera par E son centre)

(d) Placer les points A, B, C, D et E dans le plan puis, tracer le cercle $(\mathcal{C})$.

II/ Soit f la similitude directe qui laisse B invariant et qui transforme C en A.

1. (a) Déterminer le centre de la similitude f.

(b) Déterminer l'argument principal et le rapport de la similitude f.

2. (a) Donner l'écriture complexe de la similitude f.

(b) Déterminer les caractéristiques (centre et rayon) du cercle $(\mathcal{C}')$ image du cercle $(\mathcal{C})$ de centre E d'affixe $2-i$ et de rayon 3 par la similitude f.

(c) Donner une équation cartésienne de la droite $(\mathcal{D}')$ image de la droite $(\mathcal{D})$: $2x-y=1$ par f.

III/ Soit g la transformation du plan qui a tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe Z tel que Z=$\dfrac{z+1}{z+i}$
On considère les points G et H d'affixes respectives z_{G} =-1 et $z_{\text{H}}=-i$.

1. (a) Déterminer sous forme algébrique les racines carrées du nombre complexe $4-2i$

   (b) En déduire l'ensemble des points invariants par g.

2. On pose $z=x+iy$.

   (a) Exprimer en fonction de x et y les parties réelles et imaginaires de Z.

   (b) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan d'affixe z tel que Z soit réel.

   (c) Déterminer l'ensemble (D) des points M du plan d'affixe z tel que |Z|= 1.

❷ EVALUATIONS DES COMPETENCES

❶

M. MOUAFFO possède trois terrains dont il veut absolument clôturer car il lui set rapporté que des personnes mal intentionnées utilisent ces espaces non occupés à des mauvais fins. **M. MOUAFFO** décide donc d'acheter du fil barbelé pour clôturer ses trois terrains. Le rouleau de 5m de fil barbelé est vendu à 3500 frs.
Le premier terrain : est formé de l'ensemble de tous les points $M(x;y)$ du plan complexe vérifiant $|2iz-1-3i|=8$.
Le second terrain quant à lui est de forme rectangulaire et dont les dimensions sont la partie réelle et la partie imaginaire solution de l'équation $(1+4i)z+(3-4i)\bar{z}=4-8i$ où $\bar{z}$ est le conjugué de z.
Le troisième terrain est formé de l'ensemble des points M d'affixe z du plan complexe tels que $Re(z)=0$ avec $Z=\dfrac{z}{z+2i}$
NB : Les distances dans tous ces terrains sont exprimés en décamètre.

1. Quel est le montant à dépenser par **M. MOUAFFO** pour l'achat du fil barbelé permettant de clôturer entièrement le premier terrain ?
2. Quel est le montant à dépenser par **M. MOUAFFO** pour l'achat du fil barbelé permettant de clôturer entièrement le deuxième terrain ?
3. Quel est le montant à dépenser par **M. MOUAFFO** pour l'achat du fil barbelé permettant de clôturer entièrement le troisième terrain ?

❷

M. Roma est copté par le P.C.O d'un événement sportif olympique pour réaliser les patrons des nouvelles aires de jeu de certains sports.

— L'aire de jeu de basket est donnée par l'ensemble des nombres complexes d'affixes z privé de 1 tels que $\dfrac{z-1-2i}{z-1}$ soit imaginaire pur.

— L'aire de jeu de la course de résistance est donnée par l'ensemble des nombres complexes d'affixe z tels que $z^4=-4$.

— L'aire de jeu du lancer de javelot est donnée par l'ensemble des nombres complexes d'affixes z tels que : $(z-1)(z^2-(1+4i)z-5+5i)=0$.

Tâches :

1. Déterminer la nature exacte puis représenter dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) l'aire de jeu de basket.
2. Déterminer la nature exacte puis représenter dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) l'aire de jeu de la course de résistance.
3. Déterminer la nature exacte puis représenter dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) l' aire de jeu du lancer de javelot.

❸

Mme FOPA veut clôturer son champ. Un expert en topographie lui conseil ceci :

— Il faut prévoir une entrée délimitée par deux poteaux définis par deux points d'affixes respectives a et b, solutions de l'équation $z^2+(3-3i)z-2-6i=0$ dans $\mathbb{C}$

— Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$), construire la clôture suivant l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z tels que :
a) arg $\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right)=\dfrac{\pi}{3}+k\pi$; **b)** arg $\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right)=-\dfrac{\pi}{5}+2k\pi$; **c)** $\left|\dfrac{z-a}{z-b}\right|=\dfrac{3}{2}$

Tâches :

1. Déterminer et représenter la clôture et l'entrée prévue par le topographe en **a)**.
2. Déterminer et représenter la clôture et l'entrée prévue par le topographe en **b)**.
3. Déterminer et représenter la clôture et l'entrée prévue par le topographe en **c)**.