RECURRENCE ET SUITES

Exercice 1 :
Démontrer par récurrence que :

(a) Pour tout entier naturel n, le nombre $5^n - 2^n$ est divisible par 3.

(b) Pour tout entier naturel n, le nombre $4^n - 1$ est divisible par 3. Et qu'en est-il de $4^n + 1$?

(c) Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 2u_n^2 + 1$. Pour tout entier naturel $n \geq 4$, $u_n \geq 2^n$.

(d) Pour tout entier naturel n, le nombre $n^2 + n + 2$ est pair.

(e) Soit la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1}$. Pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{1}{n}$.

(f) La somme des carrés des n premiers entiers est égale à $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(g) Pour tout entier plus grand que 1, on a $n! < n^n$.

(h) Pour tout entier naturel n, on a $n \leq 2^n$.

(i) Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

(j) Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$

Exercice 2 :
Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$

(a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

(b) $1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{n+1} n^2 = (-1)^{n+1} \dfrac{n(n+1)}{2}$

(c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

(d) $4^n - 1$ est divisible par 3.

(e) $3^{3n+2} + 2^{n+4}$ est un multiple de 5.

(f) $8^n - 1$ est divisible par 7.

(g) $n^3 + 5n$ est un multiple de 6.

Exercice 3 :

1) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 2^{n+1} - 1$.

2) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = -1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n + 4$. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n - 2$.

sujetexa.com

3) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 3$, $2^n > n+3$.

4) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2$. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leq u_n$.

5) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

6) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n,
$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

Exercice 4 :

A- Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2}(3^n - 2n + 5)$ et $v_n = \frac{1}{2}(3^n + 2n - 5)$

1) Calculer $u_n + v_n$ et $u_n - v_n$ en fonction de n.
On donne $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ et $T_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$

2) Calculer $S_n + T_n$ et $S_n - T_n$ en fonction de n.

3) En déduire l'expression de S_n et T_n en fonction de n.

B- (u_n) est une suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{2}{3} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{n+2}{2\sqrt{2}} \end{cases}$

1) Calculer u_1 et u_2.

2) (v_n) la suite définie par pour tout entier naturel n, $v_n = u_n\sqrt{2} - n$.

   (a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

   (b) Calculer v_n puis u_n en fonction de n.

   (c) Etudier la convergence de la suite (u_n).

   (d) On pose $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$
   Exprimer s_n en fonction de n et calculer sa limite.

Exercice 5 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{2u_n - 16}{u_n - 6}$.

I. Soit h la fonction définie par $h(x) = \frac{2x-16}{x-6}$. $(\mathcal{C}_h)$ la courbe représentative de h dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Tracer la courbe de $(\mathcal{C}_h)$.

2) Représenter sur l'axe (OI) les quatre premiers termes de la suite (u_n).

3) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leq 4$.

4) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

II. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = \frac{1}{u_n - 4}$.

sujetexa.com

1) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique. Préciser son premier terme.

2) Exprimer v_n et u_n en fonction de n.

3) En déduire la limite de la suite (u_n)

Exercice 6 :

1) Soit (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{1+u_n} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

   (a) Calculer u_1 et u_2.

   (b) Montrer par récurrence que pour tout $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 3$.

2) Soit la suite (v_n) définition sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n}$.

   (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.

   (b) Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.

   (c) Calculer la limite de la suite (u_n).

3) On considère la suite (w_n) définie par : $w_n = 3u_n$ et on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} w_k$

   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = 1 - v_n$.

   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = n + 1 + \dfrac{8}{3}(1 - (\dfrac{1}{4})^{n+1})$.

   (c) Calculer la limite de $\dfrac{S_n}{n}$ quand $n \longrightarrow +\infty$

Exercice 7 :

1) Soit la suite (u_n) à termes positifs définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{4 + 3u_n} \end{cases}$

   (a) Montrer par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 4 .

   (b) Montrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.

   (c) En déduire que la suite (u_n) converge et préciser sa limite .

2) Soit la suite (v_n) définie par : $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{3v_n + 4}{v_n + 3} \end{cases}$

   (a) Démontrer par récurrence que , pour tout entier naturel n , $0 \leq v_n \leq 2$.

   (b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $v_{n+1} \geq v_n$ et conclure.

   (c) Déduire que la suite (v_n) converge .

3) On donne : $\begin{cases} w_0 = 2, w_1 = 3 \\ w_{n+1} = 3w_n - 2w_{n-1} \end{cases}$

sujetexa.com

(a) Calculer w_2 et w_3.

(b) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^{\star}$, $w_n = 2^n + 1$.

Exercice 8 :

1) Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, tracer la courbe représentative de la fonction u définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par : $u(x) = \dfrac{2x+1}{x+2}$.

2) Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2} \end{cases}$

   (a) Représenter sur l'axe des abscisses les termes : u_1, u_2 et u_3.

   (b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

   (c) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n < 2$

   (d) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3) Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \dfrac{1+u_n}{2-2u_n}$.

   (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.

   (b) Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.

   (c) En déduire la limite de (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

4) On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots.. + v_n$.
   Exprimer S_n en fonction de n et déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 9 :

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies par $u_1 = 1$, $v_1 = 12$ et pour tout $n \geq 1$: $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n + 2v_n) \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{4}(u_n + 3v_n) \end{cases}$

1) Soit (w_n) la suite définie par $w_n = v_n - u_n$.

   (a) Montrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

   (b) En déduire l'expression de w_n en fonction de n. Quelle est sa limite ?

2) (a) Montrer que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.

   (b) En déduire que ces deux suites sont convergentes.

3) Soit (t_n) la suite définie par $t_n = 3u_n + 4v_n$. Montrer que (t_n) est une suite constante.

4) (a) En déduire u_n, puis v_n en fonction de n.

   (b) En déduire les limites des suites (u_n) et (v_n).

sujetexa.com