

TS : Propriétés algébriques des nombres complexes

I Produit

1. Soit a et b deux réels quelconques.
Montrer que $(a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab$.
2. Calculer $(1 + i)^2$, $(1 + i)^3$ et $(1 + i)^4$.
3. On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
 - (a) Calculer j^2 puis j^3 .
 - (b) Pour n quelconque, que vaut j^n ?

II Conjugué d'une nombre complexe

Pour tout nombre complexe $z = x + iy$, on appelle conjugué de z le nombre $\bar{z} = x - iy$

Définition

1. Calculer $2 + 3i$ et $5 - 7i$.
2. Pour un nombre z quelconque, calculer $\bar{\bar{z}}$.
3. Soit z l'affixe d'un point M et soit M' le point d'affixe $\bar{z}$. Quel lien y a-t-il entre M et M' ?
4. Soit $z = x + iy$. Montrer que $z\bar{z} \in \mathbb{R}$.
5. Soit M un point d'affixe $z = x + iy$ dans un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Quel lien y a-t-il entre $z\bar{z}$ et la distance OM ?

6. Soit $z = 3 + 4i$; calculer $z\bar{z}$.

7. Soit $z = \cos \theta + i \sin \theta$. Calculer $z\bar{z}$.

III Inverse d'un nombre complexe

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul.

1. Donner la forme algébrique de $\frac{1}{z}$. (indication : utiliser la définition vue dans le I pour avoir un nombre réel au dénominateur).
2. Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants : $\frac{1}{i}$, $\frac{1}{2 + 3i}$, $\frac{1}{7 - 4i}$, $\frac{1}{j}$ où $j = -\frac{1}{2} + i\sqrt{\frac{3}{2}}$.

IV Quotient de deux nombres complexes

1. Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes, avec $z' \neq 0$.
En remarquant que $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$, trouver la forme algébrique de $\frac{z}{z'}$.
2. Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants : $\frac{2 + 3i}{5 - 7i}$, $\frac{5 + 9i}{5 - 9i}$

TS : Propriétés algébriques des nombres complexes

I Produit

1. Soit a et b deux réels quelconques.
Montrer que $(a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab$.
2. Calculer $(1 + i)^2$, $(1 + i)^3$ et $(1 + i)^4$.
3. On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
 - (a) Calculer j^2 puis j^3 .
 - (b) Pour n quelconque, que vaut j^n ?

II Conjugué d'une nombre complexe

Pour tout nombre complexe $z = x + iy$, on appelle conjugué de z le nombre $\bar{z} = x - iy$

Définition

1. Calculer $2 + 3i$ et $5 - 7i$.
2. Pour un nombre z quelconque, calculer $\bar{\bar{z}}$.
3. Soit z l'affixe d'un point M et soit M' le point d'affixe $\bar{z}$. Quel lien y a-t-il entre M et M' ?
4. Soit $z = x + iy$. Montrer que $z\bar{z} \in \mathbb{R}$.
5. Soit M un point d'affixe $z = x + iy$ dans un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Quel lien y a-t-il entre $z\bar{z}$ et la distance OM ?

6. Soit $z = 3 + 4i$; calculer $z\bar{z}$.

7. Soit $z = \cos \theta + i \sin \theta$. Calculer $z\bar{z}$.

III Inverse d'un nombre complexe

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul.

1. Donner la forme algébrique de $\frac{1}{z}$. (indication : utiliser la définition vue dans le I pour avoir un nombre réel au dénominateur).
2. Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants : $\frac{1}{i}$, $\frac{1}{2 + 3i}$, $\frac{1}{7 - 4i}$, $\frac{1}{j}$ où $j = -\frac{1}{2} + i\sqrt{\frac{3}{2}}$.

IV Quotient de deux nombres complexes

1. Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes, avec $z' \neq 0$.
En remarquant que $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$, trouver la forme algébrique de $\frac{z}{z'}$.
2. Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants : $\frac{2 + 3i}{5 - 7i}$, $\frac{5 + 9i}{5 - 9i}$