OFFICE DU BACCALAUREAT DU CAMEROUN

....

DIRECTION

....

DIVISION DES EXAMENS

République du Cameroun

....

Paix – Travail - Patrie

....

CORRIGE HARMONISE NATIONAL

EXAMEN : BACCALAURÉAT
EPREUVE : MATHEMATIQUES
SERIE : D – TI

SESSION: 2021
DUREE: 4H
COEFFICIENT: 4

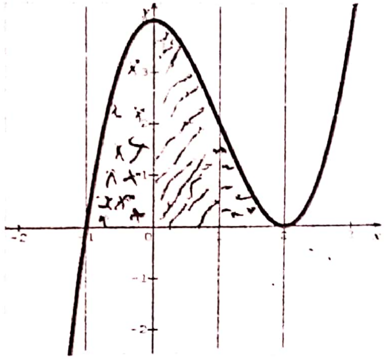
<table>
<tr><th colspan="2">REFERENCES</th><th>SOLUTIONS</th><th>BARÈMES</th><th>COMMENTAIRES</th></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>Partie A : ÉVALUATIONS DES RESSOURCES</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>EXERCICE 1</td><td>1.</td><td>On donne la fonction f définie sur IR par $f(x) = 36x^2 - 2x^3$
Montrons que f est une solution sur IR de l'équation différentielle
$(\boldsymbol{E}): \boldsymbol{36y'' + 6y' + y = 2592 - 2x^3}$
Nous avons $f(x) = 36x^2 - 2x^3$, $f'(x) = 72x - 6x^2$ et $f''(x) = 72 - 12x$
Pour tout $x \in IR$, on a :
$36f''(x) + 6f'(x) + f(x) = 36(72 - 12x) + 6(72x - 6x^2) + 36x^2 - 2x^2$
$= 2592 - 432x + 432x - 36x^2 + 36x^2 - 2x^3$
$= 2592 - 2x^3$. f est donc une solution de l'équation différentielle (E).</td><td>(1pt)</td><td>0,25 pt par dérivée
0,5 pt pour la démarche</td></tr>
<tr><td></td><td>2.</td><td>Étudions les variations de $\boldsymbol{f}$ sur l'intervalle $[0, 18]$ et déterminons la valeur de x pour laquelle $\boldsymbol{f}$ atteint son maximum
On a : $f'(x) = 72x - 6x^2 = 6x(12 - x)$. Et $f'(x) = 0 \iff x = 0 \ ou \ x = 12$.
D'où :
<table><tr><td>x</td><td>0</td><td></td><td>12</td><td></td><td>18</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>−</td><td></td></tr></table>f est strictement croissante sur $[0,12]$ et strictement décroissante sur $[12, 18]$.</td><td>(1.5pt)</td><td>0,5 pt pour chaque intervalle de variation
0,5 pt pour le maximum</td></tr>
</table>

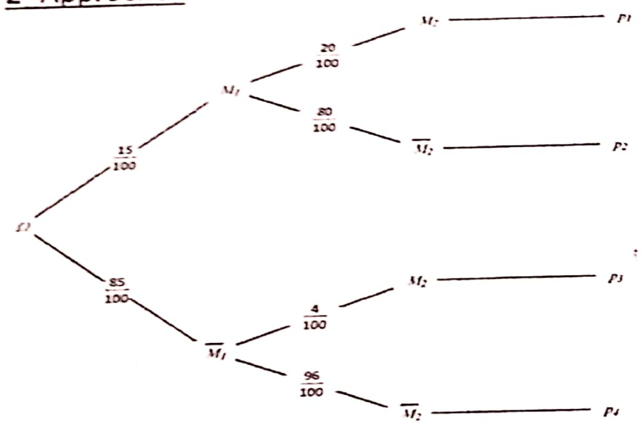
EXERCICE 1 (Suite)	2. (Suite)	f étant croissante sur $[0,12]$ et décroissante sur $[12,18]$, alors $f(12)$ est le maximum de f sur $[0,18]$. La fonction f atteint donc sur $[0,18]$, le maximum en $x = 12$.		
	3.a)	**Démontrons que le nombre de tirages donnant une dose de chaque firme est $f(n)$** On choisit *une* dose par firme A, B et C. Ces firmes ayant respectivement n, n et $36-2n$ dose. Le tirage étant simultané, le nombre de tirages possibles donnant une dose de chaque firme est : $C_n^1 \times C_n^1 \times C_{36-2n}^1 = n^2(36-2n) = f(n)$ ■	**(0.5pt)**	0,25 pt pour la démarche 0,25 pt pour le résultat
	3.b)	**Donnons l'expression de $P(n)$ en fonction de $f(n)$ et déterminons la valeur de n pour laquelle $P(n)$ est maximale** $P(n)$ est la probabilité de tirer une dose de chaque firme. D'où $P(n) = \frac{C_n^1 \times C_n^1 \times C_{36-2n}^1}{C_{36}^3} = \frac{f(n)}{7140}$. La valeur de n qui rend $P(n)$ maximale est la même que celle qui rend $f(n)$ maximale. Et d'après la question 2., une telle valeur de n est 12.	**(1pt)**	0,5 pt pour la démarche 0,5 pt pour le résultat
EXERCICE 2		(O, I, J) est un repère orthonormé du plan. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): \ z^3 - (6+i\sqrt{3})z^2 + (11+4i\sqrt{3})z - 6 - 3i\sqrt{3} = 0$		
	1.	**Montrons que l'équation $(E) \Leftrightarrow (z^2-4z+3)(z-2-i\sqrt{3}) = 0$** Soit $P(z) = (z^2-4z+3)(z-2-i\sqrt{3})$. On a : $P(z) = (z^2-4z+3)(z-2-i\sqrt{3})$ $= z^3 - 2z^2 - i\sqrt{3}z^2 - 4z^2 + 8z + 4i\sqrt{3}z + 3z - 6 - 3i\sqrt{3} = 0$ $= z^3 - (6+i\sqrt{3})z^2 + (11+4i\sqrt{3})z - 6 - 3i\sqrt{3}$ D'où l'équivalence attendue.	**(0.5pt)**	NB :apprécier toute autre méthode
	2.	**Résolvons dans C l'équation (E)** $(E) \Leftrightarrow (z^2-4z+3)(z-2-i\sqrt{3}) = 0$ $\Leftrightarrow z = 2+i\sqrt{3}$ ou $z^2-4z+3 = 0$ Or z^2-4z+3 de discriminant $\Delta = 4$, a pour racine 1 et 3. L'ensemble solution de l'équation (E) est donc $\{\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{2}+\boldsymbol{i}\sqrt{\mathbf{3}}\}$.	**(0.75pt)**	0,25 pt pour chaque solution trouvée
	3.a)	On donne les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 3$, $z_B = 2+i\sqrt{3}$, $z_C = 7$ et $z_D = 11+4i\sqrt{3}$ **Démontrons que le triangle IAB est équilatéral**		

EXERCICE 2 (Suite)	3.a)	• Première approche : On a : $IA = \|z_A - z_I\| = \|3-1\| = 2, IB = \|z_B - z_I\| = \|1+i\sqrt{3}\| = 2$ et $AB = \|z_B - z_A\| = \|2+i\sqrt{3}-3\| = \|-1+i\sqrt{3}\| = 2$. D'où $AI = IB = AB$. IAB est donc un triangle équilatéral. • Deuxième approche : on a $\frac{z_B - z_I}{z_A - z_I} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$. De cette relation, on a $AI = IB$ et $mes(\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}}) = 60°$. IAB est donc un triangle équilatéral.	**(0.5pt)**	0,25pt pour la méthode 0,25pt pour des bons calculs
	3.b)	**Déterminons l'affixe du point F centre de la rotation et montrons que $r(C) = D$** - La rotation r a pour expression complexe $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 2\sqrt{3} + \frac{3}{2} + \left(2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)i$. Comme F est le centre de r, on a $r(F) = F$. D'où $z_F = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_F + 2\sqrt{3} + \frac{3}{2} + \left(2 - \frac{3\sqrt{3}}{3}\right)i$ **et donc :** $z_F = \frac{(3+4\sqrt{3})+i(4-3\sqrt{3})}{1-i\sqrt{3}} = \frac{[(3+4\sqrt{3})+i(4-3\sqrt{3})](1+i\sqrt{3})}{4} = \frac{12+16i}{4} = \mathbf{3+4i}$ - On pourra remarquer à travers des calculs que $r(C) \neq D$	**(1.5pt)**	0,5pt pour l'affixe de F **1 pt pour le reste à attribuer à tous les candidats présents** **NB : Tenir compte des autres méthodes dans la recherche de z_F**
	3.c)	**Donnons l'expression complexe de l'homothétie h telle $h(I) = D$ et $h(B) = C$** L'homothétie h a pour expression complexe : $z' = az + b$ (où $a \in IR$) $h(I) = D \Leftrightarrow a + b = 11 + 4i\sqrt{3}$ et $h(B) = C \Leftrightarrow a(2+i\sqrt{3}) + b = 7$ D'où le système : $\begin{cases} a + b = 11 + 4i\sqrt{3} \\ a(2+i\sqrt{3}) + b = 7 \end{cases}$. Ce qui donne : $\begin{cases} \mathbf{a = -4} \\ \mathbf{b = 15 + 4i\sqrt{3}} \end{cases}$ $\mathbf{z' = -4z + 15 + 4i\sqrt{3}}$ **est l'expression complexe de h.**	**(1pt)**	0,5 pt pour chaque constante trouvée NB : apprécier toute autre méthode
	3.d)	**Déterminons l'expression complexe de $s = h \circ r$** r a pour expression complexe $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 2\sqrt{3} + \frac{3}{2} + \left(2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)i$ et celle de h est $z' = -4z + 15 + 4i\sqrt{3}$; Celle de $s = h \circ r$ est donc $z' = -4\left[\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 2\sqrt{3} + \frac{3}{2} + \left(2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)i\right] + 15 + 4i\sqrt{3}$ $= \mathbf{(-2 - 2i\sqrt{3})z + 9 - 8\sqrt{3} + i(-8 + 10\sqrt{3})}$	**(0.75pt)**	0,5 pt pour la première ligne du calcul 0,25 pt pour le résultat
EXERCICE 3		On donne $h(x) = e^{\frac{x+1}{x}}$ et $k(x) = -x + x\ln x$ définies sur $]0, +\infty[$		

	1.	**Démontrons que l'équation $k(x) = 1$ admet une unique solution $\alpha \in [3,4]$** la fonction k est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $k'(x) = -1 + 1 + lnx = lnx$. D'où $k'(x) > 0$ pour x appartenant à l'intervalle $[3,4]$. k est continue et strictement croissante sur $[3,4]$ avec 1 appartenant à $k([3,4]) = [k(3), k(4)] = [-3 + 3ln3, -4 + 4ln4]$ **puisque** $-3 + 3ln3 = 0{,}29$ ... et $-4 + 4ln4 = 1{,}54$ .... L'équation $k(x) = 1$ admet alors une unique solution α appartenant à l'intervalle $[3,4]$.	**(1pt)**	0,25 pt pour le calcul de la dérivée 0,25 pt pour le sens de variation. 0,25 pt pour les hypothèses du TVI 0,25 pt pour la conclusion NB : Apprécier les autres démarches
EXERCICE 3	2.	**Démontrons que $k(x) = 1$ si et seulement si $h(x) = x$** Soit $x > 0$. On a : $k(x) = 1 \Leftrightarrow -x + xlnx = 1$ $\Leftrightarrow lnx = \frac{x+1}{x}$ $\Leftrightarrow x = e^{\frac{x+1}{x}}$ $\Leftrightarrow h(x) = x$.	**(0.25pt)**	
	3.	**Démontrons que si $x \in [3,4]$, alors $h(x) \in [3,4]$** Soit $x \in [3,4]$. h est une fonction dérivable sur $[3,4]$ et $h'(x) = \frac{-1}{x^2}e^{\frac{x+1}{x}} < 0$. h est donc strictement décroissante sur $[3,4]$. De $3 \leq x \leq 4$, on a $h(4) \leq h(x) \leq h(3)$ soit $e^{\frac{5}{4}} \leq h(x) \leq e^{\frac{4}{3}}$. D'où $3{,}49 \leq h(x) \leq 3{,}80$ et donc $3 \leq h(x) \leq 4$.	**(0.5pt)**	0,25 pt pour le calcul de la dérivée de h 0,25 pt pour la démarche
	4.	**Démontrons que $\lvert h'(x)\rvert \leq \frac{1}{2}$ pour tout $x \in [3,4]$** On a $h'(x) = \frac{-1}{x^2}h(x)$ et donc $\lvert h'(x)\rvert = \frac{h(x)}{x^2}$. $3 \leq x \leq 4$ entraine $\frac{1}{16} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{9}$ et $3 \leq h(x) \leq 4$. D'où $\frac{3}{16} \leq \frac{1}{x^2}h(x) \leq \frac{4}{9}$ C'est-à-dire $\frac{3}{16} \leq \lvert h'(x)\rvert \leq \frac{4}{9}$. D'où $\lvert h'(x)\rvert \leq \frac{1}{2}$ car $\frac{4}{9} \leq \frac{1}{2}$.	**(0.5pt)**	Tenir compte des autres démarches
	5.	On donne la suite U définie par $u_0 = 3\ et\ u_{n+1} = h(u_n)$		
	5.a)	**Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [3,4]$** Procédons par récurrence. - Au rang $n = 0$, on a $u_n = u_0 = 3$ appartenant à $[3,4]$. - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \in [3,4]$. On a d'après la question 3, on a $h(u_n) \in [3,4]$. D'où $u_{n+1} \in [3,4]$. Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [3,4]$.	**(0.5pt)**	0,25 pt pour le rang initial 0,25 pt pour le reste
	5.b)	**Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lvert u_{n+1} - \alpha\rvert \leq \frac{1}{2}\lvert u_n - \alpha\rvert$**		0,25 pt pour le

<table>
<tr><td></td><td></td><td>Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [3,4]$, $\boldsymbol{\alpha} \in [3,4]$ et $|h'(x)| \leq \frac{1}{2}$ pour x appartenant à $[3,4]$.
Des Inégalités des Accroissements Finis, on a alors $|\boldsymbol{h(u_n)} - \boldsymbol{h(\alpha)}| \leq \frac{1}{2}|\boldsymbol{u_n} - \boldsymbol{\alpha}|$. Or $u_{n+1} = h(u_n)$ et $h(\alpha) = \alpha$ car $k(\alpha) = 1$; donc $|\boldsymbol{u_{n+1}} - \boldsymbol{\alpha}| \leq \frac{1}{2}|\boldsymbol{u_n} - \boldsymbol{\alpha}|$.</td><td>(0.5pt)</td><td>0,25 pt pour le choix d'une bonne propriété à utiliser
0,5 pt pour la bonne uyilisation</td></tr>
<tr><td></td><td>5.c)</td><td>Déduisons-en que pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ $|\boldsymbol{u_{n+1}} - \boldsymbol{\alpha}| \leq (\frac{1}{2})^n$
Procédons par récurrence.
- Au rang $n = 0$, on a $|\boldsymbol{u_n} - \boldsymbol{\alpha}| = |\boldsymbol{u_0} - \boldsymbol{\alpha}| = |3 - \boldsymbol{\alpha}| \leq |3 - 4|$ car $\boldsymbol{\alpha} \in [3,4]$.
D'où $|\boldsymbol{u_n} - \boldsymbol{\alpha}| \leq (\frac{1}{2})^n$ pour $\boldsymbol{n} = 0$.
- Soit $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$. Supposons que $|\boldsymbol{u_n} - \boldsymbol{\alpha}| \leq (\frac{1}{2})^n$.
D'après la question 5.b), on a $|\boldsymbol{u_{n+1}} - \boldsymbol{\alpha}| \leq \frac{1}{2}|\boldsymbol{u_n} - \boldsymbol{\alpha}|$. Ce qui entraine $|\boldsymbol{u_{n+1}} - \boldsymbol{\alpha}| \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^n \leq (\frac{1}{2})^{n+1}$. D'où $|\boldsymbol{u_n} - \boldsymbol{\alpha}| \leq (\frac{1}{2})^n$</td><td>(0.5pt)</td><td>0,25 pt pour le rang initial
0,25 pt pour le reste</td></tr>
<tr><td>EXERCICE 3</td><td>5.d)</td><td>Démontrons que la suite $\boldsymbol{u}$ est convergente et déterminons sa limite
On a $|\boldsymbol{u_n} - \boldsymbol{\alpha}| \leq (\frac{1}{2})^n$ où la suite $((\frac{1}{2})^n)$ converge vers 0 ; Par la propriété d'encadrement, on en déduit que (u_n) converge vers $\boldsymbol{\alpha}$.</td><td>(0.5pt</td><td>0,25 pt pour la l'utilisation d'une propriété utile
0,25 pt pour la limite</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="3">Partie B : EVALUATION DES COMPETENCES</td></tr>
<tr><td>REFERENCES</td><td></td><td>SOLUTIONS</td><td>BAREMES</td><td>COMMENTAIRES</td></tr>
<tr><td>TÂCHE 1</td><td></td><td>Déterminons les nombres d'animaux de cette réserve
On procédera par les étapes suivantes :
• On étudie les variations de la fonction g définie sur $[-1, +\infty[$ par : $g(x) = x^3 - 3x^2 + 4$. La fonction g est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur IR. Sa dérivée est $g'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$. Les solutions de l'équation $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ ou \ x = 2$. Le tableau de variation de g
<table><tr><td>x</td><td>-1</td><td></td><td>0</td><td></td><td>2</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$g'(x)$</td><td></td><td>+</td><td></td><td>−</td><td></td><td>+</td><td></td></tr><tr><td>$g(x)$</td><td>0</td><td>↗</td><td>4</td><td>↘</td><td>0</td><td>↗</td><td>$+\infty$</td></tr></table></td><td>(2.25pt)</td><td>Interprétation :
0,25 pt pour l'idée d'étudier la fonction et de construire la courbe
0,25 pt pour l'idée de calculer les aires
0,25 pt pour l'idée d'utiliser la densité
Utilisation correcte des outils :
0,25 pt pour le tableau de variations et courbe ;
0,25 pt dès qu'une des 3 aires est trouvée</td></tr>
</table>

TÂCHE 1		• On **construit la courbe représentative (C) de g pour identifier les aires**  • Calculons les aires $A_1,\ A_2\ et\ A_3$ occupées respectivement par les macaques, les orang -outans et des chimpanzés (en unités d'aires) $A_1 = \int_{-1}^{0} g(x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x\right]_{-1}^{0} = \frac{11}{4}$, $Donc\ A_1 = 44\ km^2$, $A_2 = \int_{0}^{1} g(x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x\right]_{0}^{1} = \frac{13}{4}$ $Donc\ A_2 = 52\ km^2$ $A_3 = \int_{1}^{2} g(x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x\right]_{1}^{2} = \frac{3}{4}$ $Donc\ A_3 = 12\ km^2$ • On calcule le nombre d'animaux de la réserve en fonction des aires Le nombre de macaques est : $N_1 = 15 \times 44 = 660$ Le nombre des orangs- outangs est : $N_2 = 10 \times 52 = 520$ Le nombre de chimpanzés est de : $N_3 = 12 \times 12 = 144$ Le nombre total d'animaux de la réserve est donc $N = N_1 + N_2 + N_3 = \mathbf{1324}$		0,25 pt dès que le nombre d'animaux d'un des 3 espaces est trouvé **Cohérence :** 0,5 pt pour une bonne organisation des différents calculs 0,25 pt pour une conclusion donnant un nombre total d'animaux
TÂCHE 2		**Déterminons le volume de vaccin nécessaire pour la troisième vaccination** Soient $x, y\ et\ z$ le nombre respectif de macaques, des orangs outans et des chimpanzés qui doivent être vaccinés et soit D la troisième dose administrée aux animaux. La première dose est traduite par la relation : $2x + y + 3z = 1136$ E_1 La deuxième dose est traduite par la relation : $2x + 3y + 4z = 1540$ E_2 La troisième dose est traduite par la relation : $2x + 5y + 5z = D$ E_3 En effectuant la différence $E_1 - E_2$, on obtient la relation : $2y + z = 404$ En effectuant la différence E_3-E_2, on obtient la relation : $2y + z = D - 1540$ De ces deux dernières relations, on a $D - 1540 = 404$. La dose cherchée est donc $D = 1540 + 404 = \mathbf{1944\ ml} = \mathbf{1,944\ l}.$	**(2.25pt)**	**Interprétation :** 0,25 pt par équation posée **Utilisation correcte des outils :** 0,5 pt pour l'obtention de la troisième dose à partir de ses équations 0,25 pt pour la conversion du son résultat. **Cohérence :** 0,5 pt pour la méthode de résolution 0,25 pt pour la bonne utilisation de sa méthode

TÂCHE 2		**2e Approche :** Déterminer x et y en fonction de z à partir des égalités E_1 et E_2 puis remplacer ces derniers dans l'égalité E_3 pour avoir $D = 2x + 5y + 5z = \cdots = 1944$. **3e Approche :** On a la situation suivante : $2x + y + 3z = 1136 \quad E_1$ $2x + 3y + 4z = 1540 \quad E_2$ $2x + 5y + 5z = ? \quad E_3'$ La combinaison linéaire $2E_2 - E_1$ donne $2x + 5y + 5z = 2(1540) - (1136)$ D. Et donc $D = 1944\ ml$		**Même gestion des points**
TÂCHE 3		**Déterminons la probabilité pour que le chimpanzé choisi soit atteint de la maladie M_2** On note $\overline{M_1}$ l'événement : ne pas avoir la maladie M_1. Les probabilités sonnées sont les suivantes : $p(M_1) = \frac{15}{100}$, $p(M_2/M_1) = \frac{20}{100}$ et $p(M_2/\overline{M_1}) = \frac{4}{100}$ $M_2 = (M_1 \cap M_2) \cup (\overline{M_1} \cap M_2)$ où $(\overline{M_1} \cap M_2)$ et $(M_1 \cap M_2)$ sont disjoints On a la probabilité $p(M_2) = p(M_1 \cap M_2) + p(\overline{M_1} \cap M_2)$ $= p(M_2/M_1) \times p(M_1) + p(M_2/\overline{M_1}) \times p(\overline{M_1})$ $= \frac{20}{100} \times \frac{15}{100} + \frac{4}{100} \times \frac{85}{100} = \frac{640}{10000} = \mathbf{0,064}$ **2e Approche :** Utilisation d'un arbre de probabilités  La probabilité attendue est : $p_1 + p_3 = \frac{15}{100} \times \frac{20}{100} + \frac{85}{100} \times \frac{4}{100} = \frac{640}{10000} = \mathbf{0,064.}$	**(2.25pt)**	**Interprétation :** 0,5 pt pour l'idée d'utiliser la probabilité conditionnelle 0,25 pour une bonne interprétation de l'une des données **Utilisation correcte des outils :** 0,5 pt pour une bonne expression de $p(M_2)$ 0,25 pour un résultat correct **Cohérence :** 0,5 pt pour un calcul cohérent à partir d'une expression de $p(M_2)$ 0,25 pt pour une bonne présentation des calculs **Pour la 2e approche :** .. 0,5 pt pour l'idée d'utiliser un arbre de choix et 0,25 pt pour la réalisation d'un arbre .. 0,75 pt pour le remplissage de l'arbre. (0,25 pt par paire de branches issue de chacun des trois nœuds) .. 0,75 pt pour les calculs (0,25ptx3 pour p_1, p_2 et $p_1 + p_3$) **NB :** Ne pas noter doublement un candidat s'il a utilisé les deux approches. **(Considérer l'approche rapportant le maximum de points)**

Yaoundé le : ....

Le Président du Jury d'Harmonisations

Abdou Koumchigham

Tel : 699897923

ou 677095556