OFFICE DU BACCALAURÉAT DU CAMEROUN

DIRECTION

DIVISION DES EXAMENS

RÉPUBLIQUE DU CAMEROUN

Paix – Travail - Patrie

CORRIGÉ HARMONISÉ NATIONAL

EXAMEN: **BACCALAURÉAT**

ÉPREUVE : **MATHÉMATIQUES**

SÉRIES : **C/E**

SESSION : **2021**

DUREE : **4 Heures**

COEFFICIENTS : **7 (C) / 6 (E)**

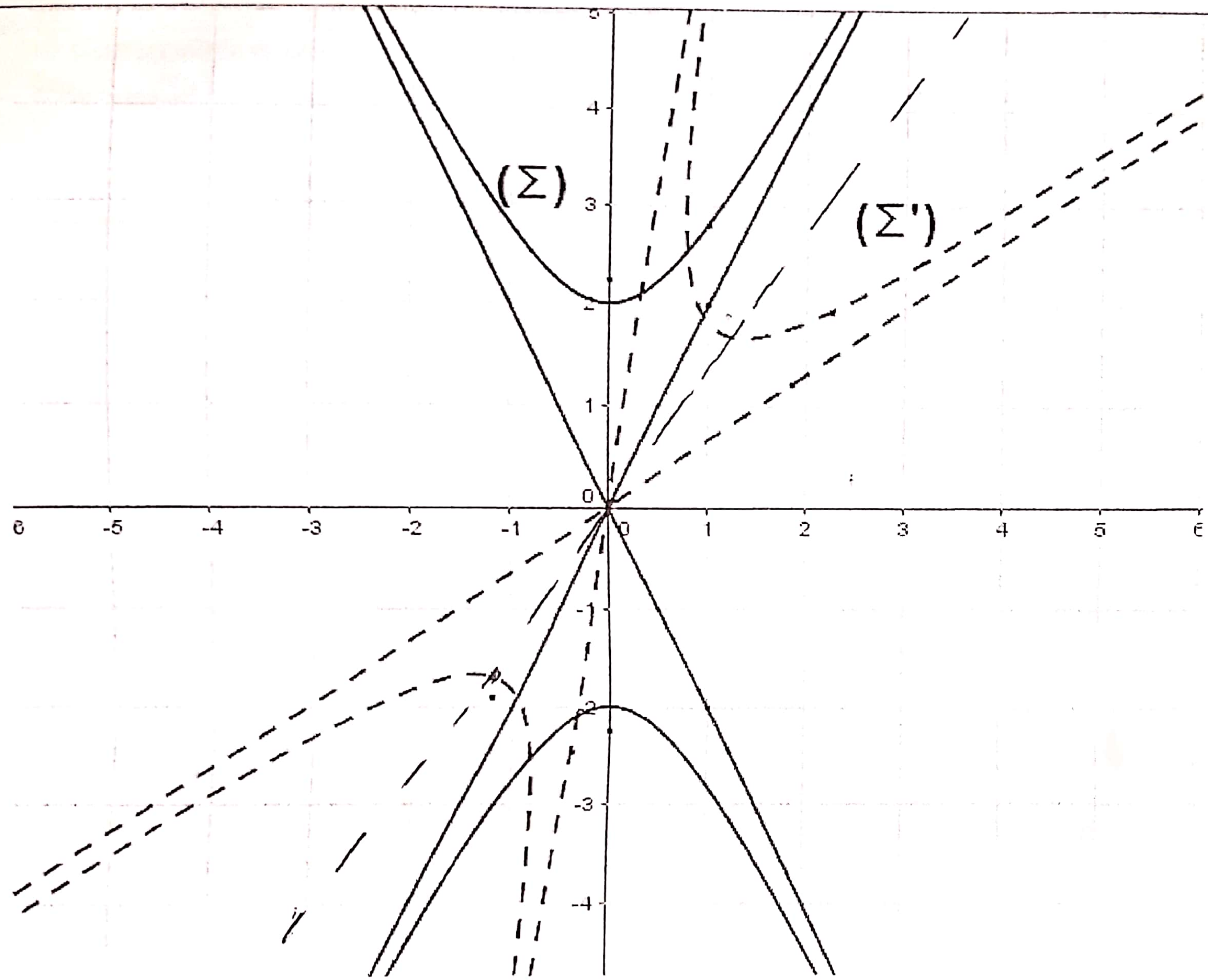
PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES (15 points)		
RÉFÉRENCES ET SOLUTIONS	BARÈMES	COMMENTAIRES
EXERCICE 1 : 5,5 points (C) / 4 points (E)		
I- (Série C exclusivement) 1. **Démontrons que (D) passe par au moins un point M dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs.** Soit M$(x\,;y)$ un point du plan.	**0,25 pt**	Donner 0,25 pt à tout candidat ayant proposé au moins un couple solution juste.

M ∈ (D) équivaut à $y = \frac{65}{16}x - \frac{5}{16}$ équivaut à $65x - 16y = 5$. Et puisque PGCD(65 ; 16) = 1, alors l'équation diophantienne $65x - 16y = 5$ admet au moins une solution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.		
2. Déterminons l'ensemble (E) des points de (D) à coordonnées entières. (E) est l'ensemble des points dont les coordonnées sont les solutions de l'équation $65x - 16y = 5$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. (5 ; 20) est une solution particulière de l'équation $65x - 16y = 5$ et par conséquent $65(x-5) = 16(y-20)$. D'après le théorème de Gauss, il existe $k \in \mathbb{Z}$, tel que $x = 16k + 5$ et $y = 65k + 20$. Donc (E) = $\{M(16k+5;\ 65k+20),\ k \in \mathbb{Z}\}$.	**0,75 pt**	0,25 pt pour une solution particulière de $65x - 16y = 5$, 0,25 pt pour chaque coordonnée juste.
3. Déterminons les points de (D) dont les coordonnées sont des entiers compris entre −126 et 134. Il s'agit des points M(x ; y) tels que $x = 16k + 5$ et $y = 65k + 20$ avec $-126 \leq y \leq 134$. De $-126 \leq y \leq 134$ on a $k \in \{-2;\ -1; 0; 1\}$ et par conséquent, ces points ont pour coordonnées $(-27;\ -110)$, $(-11;\ -45)$, $(5; 20)$et $(21; 85)$.	**0,5 pt**	0,25 pt pour deux couples de coordonnées justes, Sinon, 0,25 pt pour toutes les valeurs justes de k.
II- **1. Déterminons une équation du plan (P) contenant le point A et de vecteur normal $\vec{n}$.** Soit M(x ; y ; z) un point de l'espace $\mathcal{E}$. M ∈ (P) de vecteur normal $\vec{n}(1;\ -2; 3)$ équivaut à $x - 2y + 3z + d = 0$, où d est un réel. Par ailleurs A$(-2\ ;\ 1\ ;\ 1)$ ∈ (P) équivaut à $-2 - 2 + 3 + d = 0$, d'où $d = 1$. Donc $x - 2y + 3z + 1 = 0$ est une équation du plan (P).	**0,5 pt**	0,25 pt *pour la démarche*, 0,25 pt pour le résultat.
2. Donnons une expression analytique de la réflexion de plan (P). Soient M(x ; y ; z) et M'(x' ; y' ; z') deux points de l'espace$\mathcal{E}$. M' est l'image de M par cette réflexion $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM'} = \alpha\vec{n}, & \alpha \in \mathbb{R} \\ \text{milieu}[MM'] \in (P) \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \alpha + x;\ y' = -2\alpha + y;\ z' = 3\alpha + z, & \alpha \in \mathbb{R} \\ \frac{x+x'}{2} - 2 \times \frac{y+y'}{2} + 3 \times \frac{z+z'}{2} + 1 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \alpha + x;\ y' = -2\alpha + y;\ z' = 3\alpha + z \\ \alpha = -\frac{1}{7}x + \frac{2}{7}y - \frac{3}{7}z - \frac{1}{7} \end{cases}$	**1 pt**	0,25 pt pour la démarche, 0,25 pt pour chacune des expressions justes de x', y' et z'. Sinon, donner 0,25 pt pour l'expression juste de α.

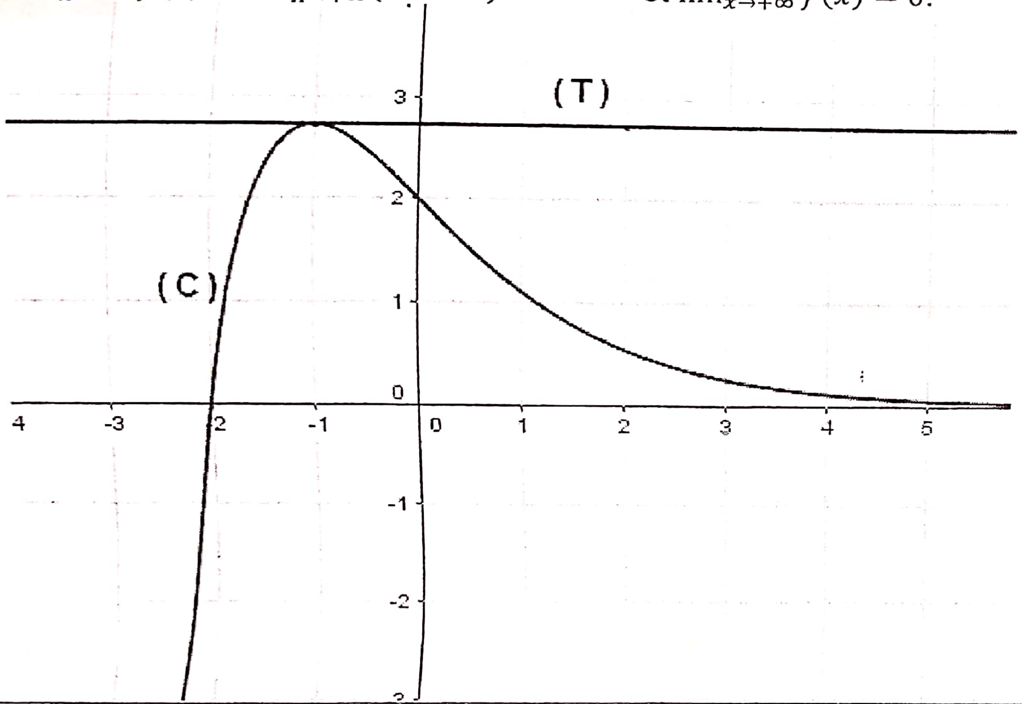
$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{6}{7}x + \frac{2}{7}y - \frac{3}{7}z - \frac{1}{7} \\ y' = \frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y + \frac{6}{7}z + \frac{2}{7} \\ z' = -\frac{3}{7}x + \frac{6}{7}y - \frac{2}{7}z - \frac{3}{7} \end{cases}$, qui est l'expression analytique de cette réflexion.		
III- **1. Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de g.** Nature : g est une similitude directe. Eléments caractéristiques : - Centre : c'est le point d'affixe $w = \frac{-2}{-1+i} = 1 + i$. Donc le point Ω est le centre. - Rapport : $k = \left\lvert\frac{1+i}{2}\right\rvert = \frac{\sqrt{2}}{2}$ - Angle : $\theta = Arg\left(\frac{1+i}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.	**1 pt**	0,25 pt pour la nature et aucune justification n'est exigée, 0,25 pt pour chaque élément caractéristique juste.
2. a) Montrons que pour tout entier naturel n, les points Ω, A_n et A_{n+4} sont alignés. Soit n un entier naturel. 1ère méthode : $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega A_n};\overrightarrow{\Omega A_{n+4}}}\right) = \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega A_n};\overrightarrow{\Omega A_{n+1}}}\right) + \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega A_{n+1}};\overrightarrow{\Omega A_{n+2}}}\right) + \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega A_{n+2}};\overrightarrow{\Omega A_{n+3}}}\right) + \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega A_{n+3}};\overrightarrow{\Omega A_{n+4}}}\right)$ $= 4 \times \frac{\pi}{4} = \pi$. Donc $\Omega \in [A_nA_{n+4}]$. Ainsi les points Ω, A_n et A_{n+4} sont alignés. 2e méthode : De proche en proche, on établit que $z_{n+4} = -\frac{1}{4}z_n + \frac{5+5i}{4}$. Ainsi A_{n+4} est l'image de A_n par l'homothétie de rapport $-\frac{1}{4}$ et de centre Ω. Ainsi les points Ω, A_n et A_{n+4} sont alignés.	**0,5 pt**	0,25 pt pour la démarche, 0,25 pt pour la conclusion.
b) Montrons que pour tout entier naturel n, le triangle ΩA_nA_{n+1} est rectangle et isocèle. Soit n un entier naturel. $\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}-z_\Omega} = \frac{1+\frac{1+i}{2}z_n-z_n}{1+\frac{1+i}{2}z_n-1-i} = \frac{2+(-1+i)z_n}{-2i+(1+i)z_n} = \frac{2+(-1+i)z_n}{-2i+(1+i)z_n} \times \frac{i}{i} = i$. Donc le triangle ΩA_nA_{n+1} est rectangle et isocèle en A_{n+1}.	**1 pt**	0,75 pt pour la démarche, 0,25 pt pour la conclusion. N.B : apprécier d'autres démarches.
EXERCICE 2 : 5,25 points (C et E)		
I- **1. Déterminons la loi de probabilité de λ.**	**0,75 pt**	0,25 pt pour l'univers image, 0,25 pt pour deux probabilités justes.

L'univers image est $\lambda(\Omega) = \{0;\ \sqrt{3};\ -\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\}$. $\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline k & -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ \hline P(\lambda = k) & \frac{2}{15} & \frac{4}{15} & \frac{6}{15} & \frac{3}{15} \\ \hline \end{array}$		
2. Calculons l'espérance mathématique et l'écart type de λ. L'espérance est : $E(\lambda) = \sum kP(\lambda = k) = \frac{6\sqrt{3}-2\sqrt{3}+6\sqrt{3}}{15}$. Donc $E(\lambda) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. La variance est : $V(\lambda) = \sum k^2 P(\lambda = k) - E(\lambda)^2 = \frac{3\times6+3\times2+12\times3}{15} - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{8}{3}$. Donc l'écart type est $\sigma(\lambda) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.	**0,75 pt**	0,25 pt pour l'espérance, 0,25 pt pour la variance, 0,25 pt pour l'écart type. N.B : si la loi de probabilité est fausse, donner 0,25 pt par formule juste de l'espérance et de la variance.
II- **1. Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de(Σ).** Nature :(Σ) est une hyperbole. Eléments caractéristiques : dans le repère $(O\ ; \vec{i}, \vec{j})$. - Centre : le point O. - Sommets : B $(0\ ;\ 2)$ et B'$(0\ ;\ -2)$. - Foyers : F$(0\ ;\ \sqrt{5}\ )$ et F'$(0\ ;\ -\sqrt{5}\ )$. - Directrices : $(\Delta) : Y = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ et $(\Delta') : Y = -\frac{4\sqrt{5}}{5}$. - Excentricité : $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$.	**1 pt**	0,25 pt pour la nature et aucune justification n'est exigée, 0,75 pt pour au moins trois éléments caractéristiques justes parmi les cinq.
2. a) Donnons l'expression analytique de r. Soient M$(X\ ;\ Y)$ et M'$(X'\ ;\ Y')$ deux points d'affixes respectives z et z'. $M' = r(M) \Leftrightarrow z' = e^{-\frac{\pi}{6}i}z$. $\Leftrightarrow X' + iY' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)(X + iY)$. $\Leftrightarrow \begin{cases} X' = \frac{\sqrt{3}}{2}X + \frac{1}{2}Y \\ Y' = -\frac{1}{2}X + \frac{\sqrt{3}}{2}Y \end{cases}$, qui est l'expression analytique de la rotation r.	**0,75 pt**	0,25 pt pour la démarche, 0,25 pt pour chacune des expressions justes de X'et Y'.
b) Déterminons une équation de l'ensemble (Σ'), image de (Σ) par r. Soient M$(X\ ;\ Y)$ et M'$(X'\ ;\ Y')$ deux points d'affixes respectives z et z'.	**0,5 pt**	0,25 pt pour la démarche, 0,25 pt pour le résultat.

<table>
<tr><td>M' = r(M) $\Leftrightarrow \begin{cases} X' = \frac{\sqrt{3}}{2}X + \frac{1}{2}Y \\ Y' = -\frac{1}{2}X + \frac{\sqrt{3}}{2}Y \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{\sqrt{3}}{2}X' - \frac{1}{2}Y' \\ Y = \frac{1}{2}X' + \frac{\sqrt{3}}{2}Y' \end{cases}$.
Ainsi, $4X^2 - Y^2 = -4 \Leftrightarrow 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}X' - \frac{1}{2}Y'\right)^2 - \left(\frac{1}{2}X' + \frac{\sqrt{3}}{2}Y'\right)^2 = -4$.
$\Leftrightarrow 11X'^2 + Y'^2 - 10\sqrt{3}X'Y' + 16 = 0$
Donc, une équation de l'ensemble (Σ'), image de (Σ) par r est :
$11X^2 + Y^2 - 10\sqrt{3}XY + 16 = 0$.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>c) Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de (Σ').
Nature : (Σ') est une hyperbole.
Eléments caractéristiques : dans le repère (O ; $\vec{i},\vec{j}$).
- Centre : le point O.
- Sommets : S(1 ; $\sqrt{3}$) et S'(-1 ; $-\sqrt{3}$) .
- Foyers : r(F) et r(F').
- Directrices : r(Δ) et r(Δ').
- Excentricité : $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$.</td><td>1 pt</td><td>0,25 pt pour la nature et aucune justification n'est exigée,
0,75 pt pour au moins trois éléments caractéristiques justes parmi les cinq.</td></tr>
<tr><td>d) Construisons dans le même repère (O ; $\vec{i},\vec{j}$), (Σ) et (Σ').</td><td>0,5 pt</td><td>0,25 pt pour (Σ),
0,25 pt pour (Σ').
N.B : les asymptotes ne sont pas exigibles.</td></tr>
</table>



EXERCICE 3 : 3,25 points (C) / 4,75 points (E)		
1. a) Etudions les variations de f. La fonction f est dérivable sur IR et pour tout $x \in$IR, $f'(x) = \frac{(-x-1)e^x}{e^{2x}} = \frac{-x-1}{e^x}$. Ainsi, f est strictement décroissante sur $]-1;\ +\infty[$ et strictement croissante sur $]-\infty;\ -1]$.	**0,75 pt**	0,25 pt pour la dérivée, 0,25 pt par intervalle juste de variation.
b) Déterminons une équation cartésienne de la tangente (T) en(C) au point d'abscisse -1.	**0,25 pt**	

(T) : $y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$. Donc une équation de (T) est $y = e$.		
c) Construisons la courbe (C) de f et (T) dans le même repère. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{X\to+\infty}(-X+2)e^{X} = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. 	**1 pt**	0,25 pt pour le repère, 0,25 pt pour la tangente (T), 0,5 pt pour l'allure de (C).
2. a) Déterminons les constantes réelles a, b et c telles que la fonction F définie sur IR soit une primitive de f. F est une primitive de f sur IR si et seulement si F est dérivable sur IR et pour tout $x \in$IR, $F'(x) = f(x)$. Ainsi, pour tout $x \in$IR, $\frac{-ax+a-b+ce^{x}}{e^{x}} = \frac{x+2}{e^{x}}$. D'où $-a = 1, a - b = 2$ et $c = 0$. Donc $a = -1$, $b = -3$ et $c = 0$.	**0,75 pt**	0,25 pt par valeur juste de a, b et c. Sinon, 0,25 pt pour toute démarche juste menant au résultat.
b) Calculons $\int_{-1}^{0} f(x)dx$. $\int_{-1}^{0} f(x)dx = \left[\frac{-x-3}{e^{x}}\right]_{-1}^{0} = -3 + 2e$. Donc $\int_{-1}^{0} f(x)dx = -3 + 2e$.	**0,5 pt**	0,25 pt pour toute primitive juste, 0,25 pt pour le résultat.
3. (Série E exclusivement) **a) Résolvons (E).**	**0,75 pt**	0,25 pt pour l'équation caractéristique et sa solution,

l'équation caractéristique de (E) est $r^2 - 2r + 1 = 0$, qui a pour solution $r = 1$. Donc les solutions de l'équation (E) sont les fonctions U telles que pour tout $x \in$ IR, $U(x) = (Ax + B)e^x$, avec A et B qui sont des constantes réelles par rapport à x.		0,5 pt pour la forme générale des solutions de l'équation différentielle.
b) Déterminons la solution de (E) dont la courbe passe par le point A(0 ; -1) et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 1. Désignons par G cette solution. Alors $G(0) = -1$ et $G'(0) = 1$, d'où $B = -1$ et $A + B = 1$. Ainsi $A = 2$, $B = -1$ et par conséquent $G(x) = (2x - 1)e^x$.	**0,75 pt**	0,5 pt pour la démarche, 0,25 pt pour le résultat.
PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (5 points)		
Références et solutions	**Critères**	**Indicateurs et barèmes**
Tâche 1 : Déterminons le coût de ce terrain entier que ABBA souhaite vendre. - Calculons en m², l'aire A₁ de ce terrain entier. $A_1 = \left(\int_0^4 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx\right) \times 1000 = [\ln(e^x + e^{-x})]_0^4 \times 1000 = \ln\left(\frac{e^4 + e^{-4}}{2}\right) \times 1000 \approx 3307{,}188$. Donc $A_1 \approx 3307{,}188$ m².	**C_1 : Interprétation correcte de la situation**	0,25 pt pour l'intégrale menant au calcul d'aire, 0,25 pt pour l'opération menant au calcul du coût.
- Calculons le coût de ce terrain entier. $\ln\left(\frac{e^4 + e^{-4}}{2}\right) \times 2000000 \approx 6\,614\,376$. Soit 6 614 376 F.	**C_2 : Utilisation correcte des outils**	0,25 pt pour toute valeur proche de 3307,188 0,25 pt pour toute valeur proche de 6 614 376.
	C_3 : Cohérence	0,5 pt pour un bon *enchainement du raisonnement.*
Tâche 2 : Déterminons le montant qu'aura ABBA s'il ne souhaite vendre que la portion réservée aux pastèques. - Calculons en m², l'aire A₂ de la portion réservée aux pastèques. $A_2 = \left(\int_0^4 \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} - \frac{1}{4}x\right) dx\right) \times 1000 = \left[\ln(e^x + e^{-x}) - \frac{1}{8}x^2\right]_0^4 \times 1000$	**C_1 : Interprétation correcte de la situation**	0,25 pt pour l'intégrale menant au calcul d'aire, 0,25 pt pour l'opération menant au calcul du coût.
$= \left(\ln\left(\frac{e^4 + e^{-4}}{2}\right) - 2\right) \times 1000 \approx 1307{,}188$. Donc $A_2 \approx 1307{,}188$ m². - Calculons le montant pour cette portion réservée aux pastèques. $\left(\ln\left(\frac{e^4 + e^{-4}}{2}\right) - 2\right) \times 2000000 \approx 2\,614\,376$. Soit 2 614 376 F.	**C_2 : Utilisation correcte des outils**	0,25 pt pour toute valeur proche de 1307,188 0,25 pt pour toute valeur proche de 2 614 376.
	C_3 : Cohérence	0,5 pt pour un bon enchainement du raisonnement.
Tâche 3 : Aidons ABBA à retrouver le nombre de sacs de chaque type des deux produits cultivés.	**C_1 : Interprétation correcte de la**	0,25 pt pour le choix d'inconnues, 0,25 pt pour le système qui

- <u>Effectuons le choix des inconnues et procédons à la mise en équations</u>. Désignons par x et y les nombres de sacs de pastèques et de carottes respectivement. Nombre total de sacs ; $x + y = 17$. A la fin de la vente : $6800(x-1) - 3000(y-1) = 4000$. - <u>Résolvons le système obtenu</u>. $\begin{cases} x+y=17 \\ 6800(x-1)-3000(y-1)=4000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=17 \\ 34x-15y=39 \end{cases}$. Ansi, $x = 6$ et $y = 11$. Donc il y'a 6 sacs de pastèques et 11 sacs de carottes.	situation	en découle.
	C$_2$: Utilisation correcte des outils	0,25 pt pour la valeur juste de x, 0,25 pt pour la valeur juste de y.
NB : Le nombre 17 n'étant pas visible sur l'épreuve (confondu à 47) d'une part et l'expression « différence entre ……… » d'autre part, accepter aussi l'un des systèmes ci-après : $\begin{cases} x+y=17 \\ 3000(y-1)-6800(x-1)=4000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=17 \\ -34x+15y=1 \end{cases}$ Ou bien $\begin{cases} x+y=47 \\ 6800(x-1)-3000(y-1)=4000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=47 \\ 34x-15y=39 \end{cases}$ Ou bien $\begin{cases} x+y=47 \\ 3000(y-1)-6800(x-1)=4000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=47 \\ -34x+15y=1 \end{cases}$. Et ces trois derniers systèmes ont respectivement pour couples solutions $\left(\frac{254}{49};\frac{579}{49}\right)$, $\left(\frac{744}{49};\frac{1559}{49}\right)$ ou $\left(\frac{704}{49};\frac{1599}{49}\right)$. Et dans ces trois derniers cas, le problème posé n'a pas de solution.	**C$_3$: Cohérence**	0,5 pt pour un bon enchainement du raisonnement.
N.B. : le point réservé à la présentation porte sur l'ensemble de toute la copie du candidat.	**Présentation**	0,25 pt pour la lisibilité ; 0,25 pt pour la connaissance de l'orthographe et la grammaire.
Consigne : Attribuer 1 point à tout candidat présent de chacune des deux séries C et E, car l'épreuve est notée sur 19 au lieu de 20 points.		

Yaoundé le 12/06/2021

Le Président du jury d'harmonisation

Echouaffi Romuald

PLEG - Hors Echelle
IPN / MATHS

Tel : 670579076