2 : LIMITE ET CONTINUITE

LISTE DES COMPTENCES	
CODE	**DENOMINATION**
L101	Savoir calculer la limite en un point d'un monôme
L102	Savoir calculer la limite en l'infini d'un monôme
L103	Savoir calculer la limite en un point d'ne fonction polynôme
L104	Savoir calculer la limite l'infini d'une fonction polynôme
L105	Savoir calculer la limite en un point d'une fonction homographique
L106	Savoir calculer la limite l'infini d'une fonction homographique
L107	Savoir calculer la limite l'infini d'une fonction rationnelle
L108	Savoir exploiter le nombre dérivé en un point
L109	Savoir lever une indétermination sur les radicaux
L110	Savoir exploiter le nombre dérivé pour certaines limites trigonométriques
L111	Savoir détermination de l'asymptote d'équation $x=a$
L112	Savoir détermination de l'asymptote d'équation $y=b$
L113	Savoir montrer qu'une droite $y=ax+b$ est asymptote à une courbe
L114	Savoir exploiter la décomposition d'une expression rationnelle pour avoir l'asymptote
L115	Savoir établir la continuité d'une fonction polynôme
L116	Savoir établir la continuité d'une fonction rationnelle
L117	Savoir manipuler la fonction partie entière $E(x)$
L118	Savoir remarquer une fonction qui n'est pas continue sur son domaine de définition
L119	Savoir établir la continuité d'une fonction sur un intervalle.
L120	Savoir déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue
L121	Savoir calculer des limites complexes
L122	
L123	

Exercice n°1

Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes

1) $f(x)=\sqrt{x^2-3x+4}$
2) $f(x)=\dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}}$
3) $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x^2+4x+3}$
4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}$
5) $f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}$
6) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-2x^2}-\sqrt{1+2x}}{x^2}$
7) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x^2+3x+5}}{x-4}$
8) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x}}{\sin\left(\sqrt{2x}\right)}$
9) $f(x)=\sqrt{\dfrac{2+3x}{2-2x}}$
10) $f(x)=\sqrt{x^2-2x-5}$

Exercice n°2

Déterminer les limites suivantes

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2$
2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x$
3) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2+1)$
4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1-x^2\right)$
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x+1}$
6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-7}{5}$
7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-2+x\right)$
8) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(4-3x^2\right)$
9) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2}{x^2+1}$
10) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(3+\dfrac{9}{x^2}\right)$
11) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2+x+3\right)$
12) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x+x^2\right)$
13) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(2x^2+3x-1\right)$
14) $\lim\limits_{x\to+\infty} -5x$
15) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{8}{x+1}$
16) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-5x+\dfrac{8}{x+1}\right)$
17) $\lim\limits_{x\to-\infty} (-3x)$
18) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2-3x)$
19) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2-3x+7)$
20) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2$
21) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2-3)$
22) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2-3}$
23) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-7}{x^2-3}$

Exercice n°3

Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer leur ensemble de définition puis aux bornes de leur ensemble de définition, déterminer les limites “ à gauche” et “ à droite”.

1) $f : x \mapsto \dfrac{3x+1}{x-2}$
2) $g : x \mapsto \dfrac{1}{(2x-1)(3x+5)}$
3) $h : x \mapsto \dfrac{x+2}{4x^2+4x+1}$
4) $j : x \mapsto \dfrac{2x-4}{x^2-1}$
5) $k : x \mapsto \dfrac{x+2}{2x^2+5x+2}$

Exercice n°4

Déterminer les limites ci-dessous :

1) $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} x(2x+1)$
2) $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} 3x^2+2x+\dfrac{3}{2x+1}$
3) $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \dfrac{3}{2x-1}$
4) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} (3-4x)(x+1)$
5) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{3x-4}{5+\dfrac{1}{x}}$
6) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{x^2+x}{x^3-2x}$
7) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{3x+2}{5-3x}$
8) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{x^2+3x-1}{2x+1}$
9) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{5x^2-3}{5-3x^2}$
10) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{x^{100}-5x^{44}+x^{14}}{3x^{102}-5x^{56}}$

Exercice n°5

Parmi les limites proposées ci-dessous, donner celles représentant une forme indéterminée ; donner la valeur des autres limites :

1) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} 2x^4-x^3$

2) $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} 5x^3-2x^2$

3) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{3}{5-2x}$

4) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{x+\sqrt{x}}{x^2}$

5) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \sqrt{2+x^2}$

6) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{x^2+1}{-x^4+x}$

Exercice n°6

Déterminer les limites ci-dessous :

1) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} -5x^3-7x$

2) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} 2x^3-3x^2$

3) $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \dfrac{x^7-5x^6}{2}$

4) $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \dfrac{x^3-x^2+5}{x^4+3x+1}$

5) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{x^5-x^3+2}{-2x^2-x+2}$

6) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{x^2-5x+2}{-3x^2+5x-1}$

Exercice n°7

Déterminer les limites ci-dessous :

1) $\lim\limits_{x\mapsto\frac{1}{2}^-} \dfrac{3}{2x-1}$

2) $\lim\limits_{x\mapsto3^-} \dfrac{-2}{3-x}$

3) $\lim\limits_{x\mapsto\frac{3}{2}^+} \dfrac{4-x}{3-2x}$

4) $\lim\limits_{x\mapsto5^-} \dfrac{(x-5)(7-x)}{2x-10}$

5) $\lim\limits_{x\mapsto0} \left(2x^2+x\right)\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}\right)$

6) $\lim\limits_{x\mapsto0} \dfrac{2x^2+x}{\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3}}$

7) $\lim\limits_{x\mapsto4^-} \dfrac{1}{\sqrt{8-2x}}$

8) $\lim\limits_{x\mapsto-2^-} \dfrac{3x^2+4x-4}{2x+4}$

Exercice n°8

Déterminer, si possible, les limites ci-dessous :

1) $\lim\limits_{x\mapsto0^+} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

2) $\lim\limits_{x\mapsto0^-} \dfrac{3x^4-2x^2}{5x^2-x}$

3) $\lim\limits_{x\mapsto0^-} \dfrac{6x^{12}+5x^6-3}{3x^8-5x^2}$

4) $\lim\limits_{x\mapsto0^+} \dfrac{1}{x\sin x}$

Exercice n°9

Parmi les limites proposées ci-dessous, déterminer celles représentant une forme indéterminée ; donner la valeur des autres limites :

1) $\lim\limits_{x\mapsto0^+} \dfrac{x^2+2}{x}$

2) $\lim\limits_{x\mapsto\frac{3}{2}^-} \sqrt{3-2x}$

3) $\lim\limits_{x\mapsto0^+} \dfrac{5}{\sqrt{x^2+x}}$

4) $\lim\limits_{x\mapsto2} \dfrac{x^2-4x+4}{2x^2+x-6}$

5) $\lim\limits_{x\mapsto0} \dfrac{x^3-2x}{2x^2-3x+1}$

6) $\lim\limits_{x\mapsto4^-} 5x+3-\dfrac{2}{x-4}$

Exercice n°10

Déterminer la valeur des limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\mapsto0} \dfrac{x^4-x^3}{x^2}$

2) $\lim\limits_{x\mapsto2^+} \dfrac{x+5}{4-2x}$

3) $\lim\limits_{x\mapsto-1} \dfrac{x+1}{x^2-1}$

4) $\lim\limits_{x\mapsto3^+} \dfrac{x-5}{3x^2-11x+6}$

5) $\lim\limits_{x\mapsto2^+} \dfrac{-2x^2+7x-6}{x^2-4x+4}$

6) $\lim\limits_{x\mapsto\frac{1}{3}^+} \dfrac{3x^2+2x-1}{x-1}$

Exercice n°11

Etudier les limites suivantes :

1) $\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}$ en 0
2) $\frac{x\sin x}{1-\cos x}$ en 0
3) $\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ en 1
4) $\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$ en 0
5) $\frac{\sin x-\sin 2x}{x^2}$ en 0
6) $\frac{x^3+x+5}{5x^3+7x^2+8}$ en $+\infty$
7) $\sqrt{x^2+2x}$ - x en $+\infty$
8) $\frac{\tan 4x}{\sin x}$ en 0
9) $\frac{\sin x-\sin(5x)}{\sin x+\sin(5x)}$ en 0

Exercice n°12

Evaluez les limites suivantes, en utilisant des manipulations algébriques

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+6x-7}{x^2-1}$
2) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}$
3) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\frac{4}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)$
4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$
5) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-1}{\sqrt{5+x}-2}$
6) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^4+2x^2+1}{2x^4-3x^3+x}$
7) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^2+2x+1}{x^3-x^2-x-1}$
8) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x^3+x^2-x-1}{2x+3}$
9) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{|2x-5|}{3x+1}$

Exercice n°13

Soit f et g les fonctions définies dans IR par : $f(x)=\frac{x^2-x+3}{2-x}$ et $g(x)=\frac{x-2}{1-\sqrt{2x-3}}$.

On désigne par 3D_f et D_g les ensembles de définition des fonctions f et g respectivement.

1) Déterminer D_f et D_g
2) a) Déterminer les limites de f aux bornes de D_f.
   b) Déterminer la limite de g en 2.

Exercice n°14

Démontrer que, dans chacun des cas suivants, la courbe Cf admet une asymptote parallèle à l'axe des abscisses :

1) $f:x\mapsto\frac{3x^2-2}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$
2) $f:x\mapsto\frac{2-3x}{x^2+x+1}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice n°15

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\frac{x^2+3x+2}{x}$

Démontrer que la droite D d'équation $y=x+3$ est une asymptote à la courbe C_f en $+\infty$ et en $-\infty$

Exercice n°16

Déterminer la valeur des limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{x^5-2x^2}{x^2+\sqrt{x}}$

2) $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\dfrac{2x^2+3x-1}{3x^3-2}$

3) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\sqrt{x^2-4}-x$

4) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{1}{x-2}$

5) $\lim\limits_{x\mapsto-2^-}\dfrac{2x-\sqrt{x+3}}{2+x}$

6) $\lim\limits_{x\mapsto3}\dfrac{4x^2-12x+9}{-x^2+5x-6}$

7) $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}x-\sqrt{2x^2+1}$

8) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}x-\sqrt{2x^2+1}$

9) $\lim\limits_{x\mapsto4^-}\dfrac{4-2\sqrt{x}}{x-4}$

10) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\sqrt{x^2+2}-x$

11) $\lim\limits_{x\mapsto1^-}\dfrac{\sqrt{1-x}}{2x^2-4x+2}$

12) $\lim\limits_{x\mapsto-5}\dfrac{x^2}{(x+5)^2}$

13) $\lim\limits_{x\mapsto-2^-}\dfrac{1}{\sqrt{-x-2}}$

14) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}x^2-x+1$

15) $\lim\limits_{x\mapsto-1^+}\dfrac{x-3}{2x+2}$

16) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{x^2-3}{x-\sqrt{x}}$

17) $\lim\limits_{x\mapsto1^+}\dfrac{\frac{1}{x}-x^2}{x-1}$

18) $\lim\limits_{x\mapsto0^+}\dfrac{1}{x\sin x}$

19) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\sqrt{x^2+1}-x$

20) $\lim\limits_{x\mapsto-3^-}\dfrac{\sqrt{6-x}-3}{2x^2+5x-3}$

21) $\lim\limits_{x\mapsto0^+}\dfrac{1}{x-x\sqrt{x}}$

22) $\lim\limits_{x\mapsto2}\dfrac{2x+1}{3x^2-3x-2}$

23) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2}-3\sqrt{x}$

24) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{2x^2-1}{x}}$

25) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{3x-1}{x+5}}$

26) $\lim\limits_{x\to+\infty}x-\sqrt{x}$

27) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x$

28) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x$

29) $\lim\limits_{x\to1}\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x-1}}$

30) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}}$

31) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2-5x+1}+x$

Exercice n°17

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+x}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1}$

3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1}$

4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{|x-1|}}{x-1}$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{|x-1|}}{x-1}$

6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{|x-1|}}{x-1}$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+4}}{\sqrt{4x^2-4x+8}}$

8) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+4}}{\sqrt{4x^2-4x+8}}$

9) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2x^2-5x+1}+x$

10) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4}-x+2$

11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4}-x+2$

12) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2x+5}-3}$

13) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{1+x}}{x}$

14) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$

15) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$

16) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-x+\sqrt{x}}{x-1}$

17) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x+\sqrt{x}}{x-1}$

18) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{\sqrt{x+1}-1}$

19) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

20)

Exercice n°18

Soit $f(x)=\dfrac{1+2\sin x}{1+\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$

1) Montrer que si $x>0$ alors $-\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}\leq f(x)\leq\dfrac{3}{1+\sqrt{x}}$

2) En déduire que f admet une limite en $+\infty$ dont on précisera la valeur

Exercice n°19

Soit f une fonction décroissante sur $]0;+\infty[$ telle que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

Démontrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}^+$ on a $f(x)\geq 0$.

Exercice n°20

Calculer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition:

1) $f(x)=\dfrac{x-3}{1-x}$ 2) $f(x)=\dfrac{x+2}{2x^2-18}$ 3) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{(x-1)^2}$ 4) $f(x)=1-\dfrac{3x-5}{4-x^2}$

Exercice n°21

Calculer:

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\dfrac{2}{\cos x}$ 2) $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2}{\sin x}$ 3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan x)^2$ 4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sin\dfrac{1}{x}$

Exercice n°22

Calculer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition

1) $f(x)=\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2-3x+2}$
2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}-\dfrac{1}{x^2-9}$
3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$
4) $f(x)=\sqrt{4x^2-2x-2}-2x+1$

Exercice n°23

Calculer:

1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin\left(x^2-1\right)}{x^2-1}$
2) $\lim\limits_{x\to1}\cos\pi x+\dfrac{1}{x-1}$
3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}$
4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{3x}$
5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$
6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\tan 2x}$
7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$
8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$
9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos 3x}}$
10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\tan x$
11) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{2\sin x-1}$
12) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\tan\dfrac{1}{x}$
13) $\lim\limits_{x\to2}(x-2)\tan\dfrac{\pi}{x}$
14) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{3+2\sin x}$
15) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}$
16) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{3+2\sin x}$
17) $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)$
18) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
19) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3(2+\cos x)$
20) $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3(2+\cos x)$
21) $\lim\limits_{x\to+\infty}2x+\sin x$
22) $\lim\limits_{x\to-\infty}2x+\sin x$

Exercice n°24

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin 6x}{2\cos x-\sqrt{3}}$

2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\tan x}{\sin 2x-1}$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x+\tan 2x}{\tan x-\tan 2x}$

4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin x}{5\cos^2 x+\sin^2 x-4\cos x}$

5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin 2x-2+2\sin x-2\cos x}$

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\cos x+1)^2}{(\cos x-1)^2}$

7) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{1-\cos 4x}$

8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sqrt{1-\cos 4x}}$

9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$

10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^3}$

11) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}$

12) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

13) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)$

14) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{\sin 2x}$

15) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{1+\cos x}+\sqrt{1-\cos x}$

16) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x}{\sin x}$

17) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x\sin x}$

18) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}$

19) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-1}{x+\frac{\pi}{2}}$

20) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$

Exercice n°25

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+1}{\sin^2 x}$

2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x-\cos x}{\sin 4x}$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x+\sin 2x}{\sin x-\sin 2x}$

4) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin x+\sqrt{3}\cos x}{-\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x}$

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\sin^2 5x}$

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^2 4x}{\sin^2 3x}$

Exercice n°26

Soit f la fonction définie par $f(x)=2-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}$

1/ déterminer le domaine de définition de f .

2/ déterminer les limites de f aux borne de son domaine de définition et interpréter géométriquement les résultats obtenus.

Exercice n°27

Soit la f la fonction définie par $f(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ Interpréter géométriquement les résultats obtenus.

Exercice n°28

Soit la fonction définie par $f(x)=2x+5-\sqrt{x^2+2x}$.

On désigne par ζ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

a) déterminer le domaine de définition de f.

b) calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

c) montrer que la droite $\Delta: y=x+4$ est asymptote oblique de ζ au voisinage de +∞.

d) Montrer que ζ possède une asymptote oblique que l'on précisera au voisinage de -∞ .

Exercice n°29

Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{3-2x+5}{x-2} & \text{si} \quad x\neq 2 \\ f(2)=m \end{cases}$

Déterminer m pour que f soit continue en 2.

Exercice n°30

Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x+1}{x-3} \ \text{si } x\leq 1 \\ f(x)=\dfrac{2m-x}{2-x} \ \text{si } 1<x\leq \dfrac{3}{2} \\ f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+2x-4} \ \text{si } x>\dfrac{3}{2} \end{cases}$

1/ déterminer m pour que f soit continue en 1.

2/ pour la valeur de m trouver:

a) étudier la continuité de f en $\dfrac{3}{2}$

b) déterminer le domaine de continuité de f

Exercice n°31

Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)}{x-1} \\ f(1)=-\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

1/ Étudier la continuité de f en 1.

2/ déterminer le domaine de continuité de f.

Exercice n°32

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=x+a+\sqrt{x^2+x+1} \ \text{si } x\leq 0 \\ f(x)=x^2-x \ \text{si } 0<x\leq 1 \\ f(x)=bx-\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} \ \text{si } x>1 \end{cases}$

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2/ déterminer a et b pour que f soit continue en 0 et 1.

Exercice n°33

Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{(a-1)x^2+x+3}{x-2}$

1/ étudier suivant a les limites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

2/ soit la fonction g définie par $g(x)=\sqrt{x^2-x}-2x$

a) déterminer le domaine de définition de g.

b) calculer les limites : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)+x)$

c) en déduire une équation de l'asymptote à ζ_g au voisinage de $+\infty$.

Exercice n°34

Soit la fonction f définie par: $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x^2+x+2}-\dfrac{3}{2}x \text{ si } x\le 1 \\ f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} \text{ si } x>1 \end{cases}$

1/ Quel est le domaine de définition de f ?.

2/ f est-elle continue en 1?

3/ calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Exercice n°35

1-soit la fonction f définie par:

$f(x)=\dfrac{-x^2+10x+11}{2x^2+x-1}$

a) déterminer le domaine de définition de f.

b) calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$.

2/ déterminer suivant les valeurs du réel a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{9x^2+2}-ax$

3/ soit la fonction g définie par: $g(x)=\dfrac{3x-1-\sqrt{x^2-7x+10}}{x-1}$

a) déterminer le domaine de définition de g.

b) déterminer les limites respectives de g en $+\infty$, en $-\infty$ et en 1.

a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} xg(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{g(x)}{x}$

Exercice n°36

Soit $f(x)=\dfrac{-2x^2-3x+5}{x+2}$

1) Quel est le domaine de définition de f
2) Etudier la limite de f en chacune des bornes de son domaine de définition
3) Déterminer les trois réels a, b et c tels que pour tout $x\ne -2$, $ax+b+\dfrac{c}{x+2}$
4) Donner une équation des asymptotes éventuelles. Justifier
5) Pour $x\ne -2$ étudier le signe de $f(x)+2x-1$. Interpréter graphiquement le résultat
6) Dresser le tableau de variation de f
7) Montrer que le point $I(-2;5)$ est un centre de symétrie pour la courbe représentative de f

Exercice n°37

Pour chacune des fonctions déterminer le domaine de définition et calculer la limite en $+\infty$ et en $-\infty$

1) $f(x)=\dfrac{2x^3+x^2+1}{-x^2+3x-2}$
2) $f(x)=\dfrac{1-4x^2}{x^2}$
3) $f(x)=\dfrac{2x-3}{(x+1)(x-2)}$
4) $f(x)=\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-x}$
5) $f(x)=\sqrt{4x^2+1}-2x$

Exercice n°38

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{\cos(x)}{x^2}$

1) Démontrer que pour tout réel $x\neq 0$, on a $-\dfrac{1}{x^2}\leq f(x)\leq \dfrac{1}{x^2}$
2) En déduire la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$

Exercice n°39

Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x+\sin x}{x-1}$

1) Trouver un encadrement de la fonction f sur $]1;+\infty[$
2) En déduire la limite de f en $+\infty$

Exercice n°40

Dans chacun des cas suivants, étudier la limite de f aux bornes de son domaine de définition.

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$
2) Soit f la fonction définie sur $\left[\dfrac{1}{5};1\right[\cup]1;+\infty]$ par $f(x)=\dfrac{\sqrt{5x-1}-2}{x-1}$

Exercice n°41

On considère la fonction f : $\begin{cases} Pour\ x<0, f(x)=2x^2-1 \\ Pour\ x\geq 0, f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1} \end{cases}$

1. Quel est le l'ensemble de définition de f ?
2. Etudier la continuité de f en 0.
3. la fonction f est-t-elle dérivable en 0?
4. Déterminer une équation de la demi - tangente à gauche et la demi - tangente à droite de (C_f) au point d'abscisse 0.

Exercice n°42

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. L'équation $f(x)=0$ a-t-elle une solution ?

Exercice n°43

Donner des exemples de fonctions f et g telles que :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to1} f(x)=+\infty$
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+g(x)\right)=1$
4) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+g(x)\right)$ n'existe pas

Exercice n°44

Répondre par **Vrai** ou **Faux**

Pour chaque affirmation, on demande une justification (contre – exemple ou preuve). Il peut être utile, pour aider la réflexion, de chercher des exemples graphiquement.

Soit f une fonction définie sur $[0;+\infty[$

1) Si f n'est pas majorée, alors f $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
2) Si f est une fonction croissante sur $[0;+\infty[$ alors, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
3) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, alors f n'est pas majorée
4) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, alors il existe au moins un intervalle de la forme $]A;+\infty[$ avec $A\in\mathbb{R}$, sur lequel f est croissante.

Exercice n°45

soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue ayant le tableau de variations suivants :

x	$-\infty$		-5		0		1		3		10		$+\infty$
$f(x)$	1	↘	-5	↗	3	↘	-10	↗	3	↘	2	↗	$+\infty$

quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x)=1$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice n°46

Démontrer que $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=1$

2. Soient m; n des entiers positifs. Étudier $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m}}{x^n}$.

3. Démontrer que $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\left(\sqrt{1+x+x^2}-1\right)=\dfrac{1}{2}$.

Exercice n°47

Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2|x|}{x}$

2) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2+2|x|}{x}$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\pi\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x}$

8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^n-1}$

9) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{x^{n+1}-\alpha^{n+1}}{x^n-\alpha^n}$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin x(\cos 2x-\cos x)}$

11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$

12) $\lim\limits_{x\to\alpha^+}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}-\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}$

13) $\lim\limits_{x\to 0}xE\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Exercice n°48

On étudie la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+3}$

1) Montrer que lorsque $x\geq 0$ et $b\geq a>0$, alors : $\dfrac{1}{x+b}\leq\dfrac{1}{x+a}$

2) Déduisez – en que pour $x\geq 0$: $\dfrac{3}{x+3}\leq f(x)\leq\dfrac{3}{x+1}$

3) a) Tracer la courbe (C) représentant la fonction $x\mapsto\dfrac{3}{x+3}$ et la courbe (C') représentant la fonction $x\mapsto\dfrac{3}{x+1}$

b) où se situe C_f courbe représentative de f par rapport à (C) et (C')

c) vérifiez que f est croissante sur $[0;+\infty[$. Tracez C_f

4) a) Quelle est la limite de f en ?

b) quelle est la limite de f en $+\infty$?

c) Précisez l'asymptote à C_f

Exercice n°49

Calculer les limites des fonctions suivantes en 0, en $+\infty$ et en $-\infty$ (si cela est possible !) :

$x\mapsto\sin x$

1) $x\mapsto\dfrac{3x^2-1}{x}$

2) $x\mapsto x+\dfrac{1}{x^2}$

3) $x\mapsto\dfrac{2x-3}{\sqrt{x}}$

4) $x\mapsto\dfrac{2x-1}{x}$

5) $x\mapsto\dfrac{2x-1}{x}\sin x$

6) $x\mapsto\sqrt{x^2+1}-x$

7) $x\mapsto\sqrt{x^2+x+1}+x+2$

8) $x\mapsto\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

Exercice n°50

Calculer la limite de $\dfrac{\sqrt{x^2-1}+3+x}{x}$ en $+\infty$ et $\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$ en 3.

Exercice n°51

Après avoir déterminé leur ensemble de définition, déterminer les asymptotes aux courbes représentatives des fonctions suivantes :

1) $f(x)=\dfrac{5x^2-2x+1}{2x+3}$ 2) $f(x)=\dfrac{2x+5}{x-3}$ 3) $h(x)=\dfrac{x^3+4x-1}{x^2+1}$ 4) $j(x)=3x-1+\dfrac{2x+1}{x^2+3}$

Exercice n°52

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}$; montrer que la droite d'équation $y=x+1$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f . Y a-t-il une autre asymptote ?

Exercice n°53

On considère la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$; déterminer son ensemble de définition et déterminer les limites de cette fonction aux bornes de cet ensemble. Montrer que les droites d'équation $y=x-2$ et $y=-x+2$ sont asymptotes à la courbe représentative de la fonction f

Exercice n°54

1) En utilisant les théorèmes de comparaison sur les limites de fonctions, calculer les limites des fonctions suivantes en $+\infty$ et en $-\infty$:

a) $f(x)=\cos x-3x$

b) $g(x)=\dfrac{\sin x}{x}$

c) $h(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$

d) $j(x)=\dfrac{x}{2\sin x+3x}$

2) Etudier la limite en 0 des fonctions g, h, j et de la fonction k définie par $k(x)=\dfrac{\cos x-1}{x}$

Exercice n°55

Etudier la continuité des fonctions suivantes en la valeur 0 :

1) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{|x|}{x} & \text{si } x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} g(x)=\dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x\neq 0 \\ g(0)=1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x} & \text{si } x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

Exercice n°56

a) On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition. Quelles sont les valeurs de m pour lesquelles l'équation $f(x)=m$ a une unique solution ?

b) Résoudre l'équation x^3-3x^2+1 (montrer l'existence de solutions et donner des valeurs exactes ou approchées des solutions).

c) Résoudre l'équation $\cos x=x$ (montrer l'existence de solutions et donner des valeurs exactes ou approchées des solutions).

d) Résoudre l'équation $|x^3-12x|=1$ (montrer l'existence de solutions et donner des valeurs exactes ou approchées des solutions).

Exercice n°57

Dans un repère orthonormal, on considère le cercle (C) d'équation $x^2+y^2=1$ et le point I de coordonnées (1;0). M et N sont deux points du cercle (C) tels que (MN) et (OI) soient perpendiculaires et H est le point d'intersection des droites (OI) et (MN). On pose $OH=x$.

1. Calculer l'aire du triangle MNI en fonction de x.

2. f est la fonction définie sur $[-1;+1]$ par : $f(x)=(1-x)\sqrt{1-x^2}$.

   a) Trouver les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

   b) Etudier la dérivabilité de la fonction en -1 et +1.

   En déduire une équation des tangentes à la courbe représentative de f aux points d'abscisses -1 et +1.

   c) Etudier le sens de variation de la fonction f et donner son tableau de variation.

   d) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (unité graphique: 10 cm).

3. Pour quelle valeur de x l'aire du triangle MNI est-elle maximale? Quelle est cette aire?

4. Déterminer à 0,01 près, pour quelle valeur de x, autre que zéro, l'aire du triangle MNI est égale à 1.

Exercice n°58

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x^2-2x+5}{x-1}$ et (C) sa courbe représentative.

1. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que, pour tout x de D_f : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$. Dans la suite du problème, vous pourrez utiliser, suivant les questions, la forme initiale de $f(x)$ ou la forme établie dans cette première question.

2. a) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.

   b) Déterminer les limites de f en 1 et +1.

   c) Etablir le tableau de variations de f.

3. a) Donner une équation de l'asymptote verticale à (C).

   b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y=x-1$, est asymptote oblique à (C).

Exercice n°59

Soit f la fonction définie par $f(x)=\sqrt{x^2+2x}$.

1. Vérifier que f est définie sur $]-\infty;-2]\cup[0;+\infty[$.

2. Montrer que la droite d'équation $x=-1$ est un axe de symétrie pour la courbe (C) représentative de f.

3. a) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

   b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

   c) La fonction f est-elle dérivable en 0 et en -2 ?

4. Montrer que la droite d'équation $y=x+1$ est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$.

Exercice n°60

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x^2-12x+27}{x^2-4x+5}$.

1. Déterminer f' et étudier son signe.

2. Etudier les limites de f en +1 et en -1. Montrer que la courbe (C) représentative de f admet une asymptote dont vous préciserez l'équation.

3. Dresser le tableau de variation de la fonction f .

4. Déterminer une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 0.

5. Préciser la position de la courbe (C) par rapport à l'asymptote.

6. Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, construire la courbe (C), la tangente et l'asymptote.

Exercice n°61

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x^3+x^2+3x+3}{x^2+1}$.

1) Montrer que f peut s'écrire sous la forme $x+1+2+\dfrac{x+1}{x^2+1}$.

2) Calculer la dérivée f' de la fonction f. Montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme

$f'(x)=\dfrac{(x-1)^2\left(x^2+ax+b\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$ avec a et b que l'on déterminera. En déduire son signe.

3) Calculer les limites de la fonction f en +1 et en -1.

4) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

5) Montrer que la droite d'équation $y=x+1$ est asymptote à la courbe (C) représentative de f.

6) Déterminer une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 1. Donner une interprétation géométrique.

7) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse -1. Préciser la position de (T) par rapport à (C)

Exercice n°62

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x)=\dfrac{2x^3-x^2-4x+5}{(x-1)^2}$.

1. Déterminer les réels a, b, c tels que $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{(x-1)^2}$ pour tout $x\neq 1$.

2. a) Montrer que la dérivée de la fonction f peut s'écrire sous la $f'(x)=\dfrac{2(x-2)\left(x^2+dx+e\right)}{(x-1)^3}$, pour des réels d et e que l'on déterminera et étudier son signe.

 b) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

 c) Montrer que la courbe représentative (C) de f admet une asymptote oblique (D) dont on donnera une équation. Préciser la position de (C) par rapport à (D).

 d) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

3. a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

 b) Déterminer l' abscisse du point de (C) où la tangente a pour coefficient directeur $\dfrac{9}{4}$.

4. Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α . Montrer que α ∈] -2; -1[.
5. Tracer la courbe (C), les asymptotes et la tangente (T).

Exercice n°63

Déterminer les limites suivantes et donner l'équation de l'asymptote à la courbe que l'on peut déduire de cette limite.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^6-4x+1}{1-x^4}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x}{1-x}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-4x^2}{3+2x^2}$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-1}{(x-1)^2}$

5) $\lim\limits_{x\to5}\left(2x^3+5x^2-x+1\right)$

6) $\lim\limits_{x\to0}\left(x+\sqrt{x}\right)$

7) $\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{2x^2+x-1}{x-3}$

8) $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{2x^2+x-1}{x-3}$

9) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$

10) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x}{x^2-1}$

11) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x}{x^2-1}$

12) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x^2-3x+2}$

Exercice n°64

Soit la fonction $f(x)=2x-3+\dfrac{x+1}{x+2}$

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f.

2) Déterminer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.

3) En déduire l'équation de l'asymptote verticale.

4) Calculer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ $f(x)-(2x-3)$

Exercice n°65

Dans chacun des cas, pour chacune des fonctions, dire si sa courbe représentative admet la droite Δ proposée comme asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$, et précise la position de la courbe par rapport à la droite Δ.

1) $f(x)=2x+3+\dfrac{10}{x+1}$; $\Delta: y=2x+3$

2) $f(x)=x+\dfrac{\sin x}{x}$; $\Delta: y=x$

3) $f(x)=3x+7-\dfrac{5}{\sqrt{|x|}}$; $\Delta: y=3x+7$

4) $f(x)=\dfrac{2x^2-7x-3}{x-4}$; $\Delta: y=2x+1$

5) $f(x)=\dfrac{x^3-3x-5}{(x+1)^2}$; $\Delta: y=x-2$

6) $f(x)=\dfrac{-x^2-4x+\sin x}{x}$; $\Delta: y=-x-4$

7) $f(x)=\dfrac{x^2+\frac{5}{2}x+\sqrt{x}+1}{2x+1}$; $\Delta: y=\dfrac{1}{2}x+1$

Exercice n°66

Voici le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-x^2+x-2$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Pourquoi l'équation $f(x)=0$ admet –elle une unique solution dans l'intervalle $]1;2[$

Exercice n°67

Voici le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-3x^2+1$
pourquoi l'équation $f(x)+1=0$ a-t-elle trois solutions distinctes et trois seulement

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice n°68

f est la fonction définie sur $I=[-3;2]$ par : $f(x)=x^2+1$

1) Construire la courbe représentative (C) de f
2) a) Précisez $f(I)$

   b) combien l'équation $f(x)=4$ a-t-elle de solutions dans I ?

Exercice n°69

1) prouver que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\dfrac{1}{3+2\sin x}$ est bornée
2) déduisez – en les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{3+2\sin x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{3+2\sin x}$

Exercice n°70

Dans chacun des cas, étudier la limite de la fonction f aux endroits indiqués

1) $f(x)=\sqrt{x^2+2x}-x$ en $+\infty$
2) $f(x)=\sqrt{4x^2+x}+2x$ en $-\infty$
3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ en 3
4) $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x+1}-1}$ en 0
5) $f(x)=\dfrac{-x+\sqrt{x}}{x-1}$ en $+\infty$, en 1
6) $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ en $+\infty$, en -1
7) $f(x)=\dfrac{\sin 5x}{x}$ en 0
8) $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ en 0, en $+\infty$
9) $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ en 0
10) $f(x)=\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$ en 0
11) $f(x)=\dfrac{2-\sqrt{3x+2}}{\sqrt{2x+5}-3}$ en 2

Exercice n°71

La fonction f est définie sur $[0;2]$ par $f(x)=x-E(x)$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x

1) Représentez graphique f sur $[0;2]$
2) f est – elle continue sur $[0;2]$

Exercice n°72

m est un réel. f_m est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_m(x)=x^3+mx^2-8x-m$

(C_m) est la courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) a) Démontrer que les courbes (C_0) et (C_1) se coupent en deux points A et B. précisez leurs coordonnées.

   b) déduisez – en que toutes courbes (C_m) passent par les points A et B
2) Déterminer la limite de f_m en $+\infty$ et en $-\infty$
3) Déduisez des questions précédentes que pour tout réel m, l'équation $f_m(x)=0$ a trois solutions distinctes dans $\mathbb{R}$

Exercice n°73

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+\sqrt{x^2+x+1}$ et (C) sa courbe représentative. Démontrer que (C) admet deux droites asymptotes (D) et (Δ) d'équations respectives $y=-\dfrac{1}{2}$ et $y=2x+\dfrac{1}{2}$

Exercice n°74

Etudier en $+\infty$ et $-\infty$ les limites des fonctions suivantes :

1) $x \mapsto \dfrac{E(x)}{x}$

2) $x \mapsto xE(x)$

3) $x \mapsto \dfrac{E(x)}{x-1}$

4) $x \mapsto \dfrac{E(x)}{x^2-3x+1}$

Exercice n°75

En utilisant le résultat $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{3x}$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^2}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(x^2\right)}{x}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x-\sqrt{x}}$

Exercice n°76

Déterminer suivant les valeurs du réel m les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction définie par :

$f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-mx$

Exercice n°77

Déterminer suivant les valeurs du réel m les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction définie par :

$f(x)=\sqrt{4x^2+x+1}+mx+1$

Exercice n°78

Soit $f(x)=\dfrac{\sqrt{|x|}+\cos x}{x-\sin x}$

1) Montrer que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$
2) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

Exercice n°79

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x^3+x^2+3x-2}{x^2+1}$

1) Montrer que $f(x)$ peut se mettre sous la forme $ax+b+\dfrac{cx+d}{x^2+1}$
2) En déduire que la courbe représentative de f admet en $+\infty$ et $-\infty$ une asymptote oblique
3) Etudier la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

Exercice n°80

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=1-\dfrac{1}{x^2+1}$

Vérifier que f est continue sur $\mathbb{R}$ et déterminer $f\left(\mathbb{R}\right)$

Exercice n°81

La fonction f est définie par : $\begin{cases} f(x) = x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) Calculer la limite de f en 0
2) La fonction est – elle continue en 0 ? sur $\mathbb{R}$?

Exercice n°82

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$
2) La fonction est – elle dérivable en 0 ?
3) La fonction est – elle continue en 0 ?

Exercice n°83

La fonction f est définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = m \end{cases}$

Quelle valeur faut – il donner à m pour que la fonction f doit continue sur $\mathbb{R}$

Exercice n°84

La fonction f est définie sur $[0;2]$ par $f(x) = E(x) + [x - E(x)]^2$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x

1) Ecrivez $f(x)$ sans le symbole $E(x)$
2) Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$

Exercice n°85

Démontrer les résultats suivants :

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$
2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan t}{t} = 1$
3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos t}{t} = 0$
4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos t}{t^2} = \dfrac{1}{2}$

Exercice n°86

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{3x}$
2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$
3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\tan x}$
4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{1-\cos x}$
5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$
6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos 3x}}$
7) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x)\tan x$
8) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)}{2\sin x - 1}$
9) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x+1)\tan\dfrac{1}{x}$
10) $\lim\limits_{x\to 2} (x-2)\tan\dfrac{\pi}{x}$

Exercice n°87

1) Représentez graphiquement la fonction $x \mapsto E(x)$ sur l'intervalle $\left[-4;4\right]$ et vérifier qu'elle n'est pas continue sur cet intervalle
2) Cette fonction est-elle continue sur l'intervalle $\left[0;1\right[$
3) Plus généralement, la fonction $x \mapsto E(x)$ est – elle continue sur l'intervalle $\left[k;k+1\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Exercice n°88

Représenter graphiquement les trois fonctions définies ci-dessous et utiliser le graphique pour conjecturer leur continuité.

1) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = -x \text{ si } x < 1 \\ f(x) = 2x-3 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$
2) La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} g(x) = x \text{ si } x \leq -2 \\ g(x) = \dfrac{1}{2}x \text{ si } x > -2 \end{cases}$
3) La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} h(x) = \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ h(0) = 1 \end{cases}$

Exercice n°89

Soit $\sin\left(\pi x\right) \times \sin\left(\pi(x-1)\right)$. Montrer que le graphe représentatif de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$

Exercice n°90

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x^3-12x+17}-\sqrt{x^3-3x^2+5}}{x^2-4x+4}$ 2) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{4}} \dfrac{\tan\left(\pi x\right)-1}{16x^2-1}$ 3) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos(2x)}{2\sin x - \sqrt{2}}$

Exercice n°91

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = x^2 - \dfrac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1} \text{ si } x \neq 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$

Etudier la continuité de la fonction f en 1 et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Exercice n°92

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = x^2 - \dfrac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1} \text{ si } x \neq 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$

Etudier la continuité de la fonction f en 1 et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Exercice n°93

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x^4-8x^2+16}}{(x-2)(x^2+1)} \text{ si } x\neq 2 \\ f(2)=\dfrac{4}{5} \end{cases}$

Etudier la continuité de la fonction f en 2 et en -2.

Exercice n°94

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x)=3x+\dfrac{|2x|}{x} \text{si } x\neq 0 \\ f(0)=2 \end{cases}$

Etudier la continuité de la fonction f en 0 et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé..

Exercice n°95

Dans chaque cas :

1) Etudier la continuité de la fonction en chaque point de son domaine de définition
2) Tracer , dans un repère orthonormé, la restriction à l'intervalle $[-3;3]$ de la courbe représentative de la fonction.

$x\mapsto \dfrac{x}{x+E(x)}$ $\qquad x\mapsto E(x)+E(-x)$ $\qquad x\mapsto E(x)+E(2x)$

Exercice n°96

Soit f la fonction réelle à valeurs réelles définie par $f(x)=\begin{cases} x \text{ si } x<1 \\ x^2 \text{ si } 1\leq x\leq 4 \\ 8\sqrt{x} \text{ si } x>4 \end{cases}$

1. Tracer le graphe de f .
2. f est elle continue ?
3. Donner la formule définissant f^{-1}

Exercice n°97

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue en 0 telle que pour chaque $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=f(2x)$. Montrer que f est constante.

Exercice n°98

Soit $f:[0;1]\to[0;1]$ croissante, montrer qu'elle a un point fixe.

Exercice n°99

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par : $f(x)=\dfrac{x^n+x^{n-1}+\cdots+x^2+x+1}{x^{n-1}-1}$, n étant un entier supérieur à 2.

Montrer que la courbe de f admet une asymptote verticale et une asymptote oblique d'équation $y=x+1$

Exercice n°100

Soit (C) la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3-x^2$ et (C') la courbe représentative de la fonction g définie sur [$[0;+\infty[$ par $g(x)=\sqrt{x}$. Quel est le nombre de points d'intersections de (C) et de (C') ? (Justifier)