Corrigé : Théorie des graphes I

Exercice 1

Peut-on construire un graphe simple ayant :

a) 4 sommets et 6 arêtes

b) 5 sommets et 11 arêtes

c) 100 sommets et 4956 arêtes

Solution

a) Oui, K_4

b) Si le graphe simple contient 5 sommets, chacun de ceux-ci est de degré au maximum 4, d'où une somme total des degrés égale au plus à 20. Puisque cette somme est égale au double du nombre d'arêtes, ce nombre d'arêtes ne peut excéder 10, donc ne peut être égal à 11.

c) Si le graphe simple contient 100 sommets, chacun de ceux-ci est de degré au maximum 99, d'où une somme total des degrés égale au plus à 9900. Puisque cette somme est égale au double du nombre d'arêtes, ce nombre d'arêtes ne peut excéder 4950, donc ne peut être égal à 4956.

Exercice 2

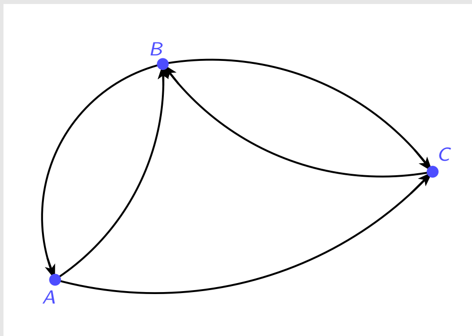
Considérons le graphe G ci-contre :

a) Quelle est la matrice d'adjacence associée à G

b) Combien y a-t-il de chaînes de longueur 4 entre A et B ? Lesquelles ?

c) Combien y a-t-il de chaînes de longueur 4 entre B et A ? Lesquelles ?

d) Combien y a-t-il de chaînes de longueur 4 entre B et B ? Lesquelles ?



Solution

a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad M^4 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Il y a donc 3 chaînes de longueur 4 de A à B.

ABACB ACBAB ACBCB

c) Il y a donc 1 chaîne de longueur 4 de B à A. BACBA

d) Il y a donc 4 chaînes de longueur 4 de B à B.

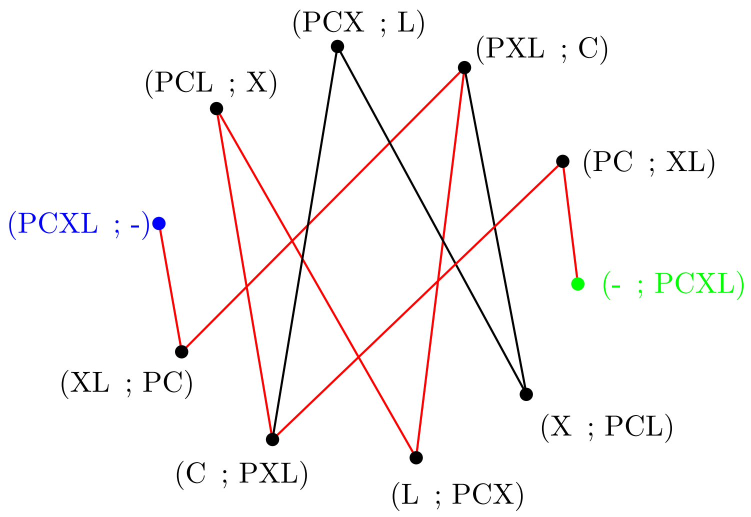
BABAB BCBAB BABCB BCBCB

Exercice 3

Une chèvre C, un chou X et un loup L se trouvent sur la rive d'un fleuve ; un passeur P souhaite les transporter sur l'autre rive mais, sa barque étant trop petite, il ne peut transporter qu'un seul d'entre eux à la fois. Comment doit-il proceder afin de ne jamais laisser ensemble et sans surveillance le loup et la chèvre, ainsi que la chèvre et le chou ?

Modélisez d'abord la situation par un graphe dont les sommets correspondent à l'ensemble des couples possibles dont le 1er élément indique qui est sur la rive A et le 2e, qui est sur la rive B. (Par exemple (PCX ; L) signifie que le passeur, la chèvre et le chou sont sur la rive A et le loup sur la rive B. Tracez les arêtes qui peuvent relier deux sommets de ce graphe. Enfin, trouvez un chemin permettant de passer du sommet (PCXL ; -) au sommet (- ; PCXL)

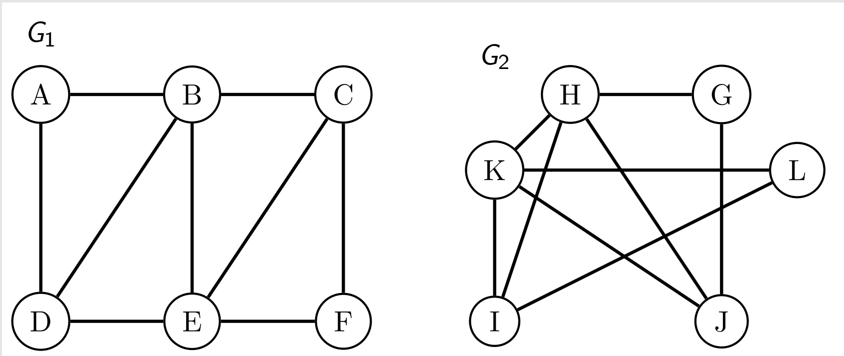
Solution



1. P amène C sur la rive B.
2. P revient sur la rive A.
3. P amène X sur la rive B.
4. P ramène C sur la rive A.
5. P amène L sur la rive B.
6. P revient sur la rive A.
7. P amène C sur la rive B.

Exercice 4

Les graphes G_1 et G_2 sont-ils isomorphes ?



Solution

La liste des degrés des sommets de G_1 est, par ordre croissant : 2, 2, 3, 3, 4, 4.

La liste des degrés des sommets de G_2 est : 2, 2, 3, 3, 4, 4.

Ces listes sont identiques, on vérifie encore que :

$A \to L \quad B \to K \quad C \to J \quad D \to I \quad E \to H \quad F \to G$ est une bijection entre les deux graphes

$\Rightarrow$ G_1 et G_2 sont isomorphes.

Exercice 5

Peut-il exister une molécule contenant 2 atomes **C** , un atome **O** et 5 atomes **H** vérifiant la règle suivante : les atomes de carbone (**C**) sont liés à 4 autres atomes, les atomes d'oxygène (**0**) sont liés à 2 autres atomes et les atomes d'hydrogène (**H**) sont liés à un autre atome.

Solution

La question se traduit en termes de graphe de la façon suivante : existe-t-il un graphe de 8 sommets avec 2 sommets de degré 4, 1 sommet de degré 2 et 5 atomes de degré 5 ?

Si un tel graphe existait, la somme des degrés de ses sommets serait égale à
$2 \times 4 + 1 \times 2 + 5 \times 1 = 15$, qui est un nombre impair.

Or, par le théorème des poignées de mains, la somme des degrés des sommets d'un graphe est toujours paire, donc ce graphe n'existe pas.

Conclusion : il n'existe pas de molécule contenant 2 atomes $\boldsymbol{C}$, un atome $\boldsymbol{O}$ et 5 atomes $\boldsymbol{H}$.

Exercice 6

Considérons un graphe G dont les degrés de ses sommets sont 4, 4, 4, 4, 3, 3.

a) Combien d'arêtes possède G ? Justifier.

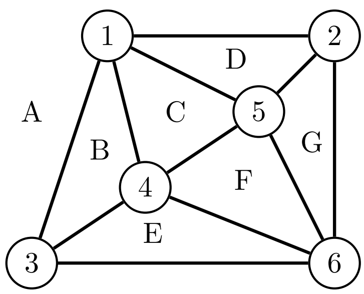
b) Donner une représentation planaire de G en déterminant d'abord le nombre de faces.

c) Vérifier que la somme des degrés des faces est égal au double du nombre d'arêtes.

Solution

a) Comme la somme des degrés = 22, alors le nombre d'arêtes vaut la moitié (théorème des poignées de main), c'est à dire 11.

b) Euler $\Rightarrow$ $s + f - a = 2$
$\Leftrightarrow$ $f = a + 2 - s = 11 + 2 - 6 = 7$
Il y a 7 faces.

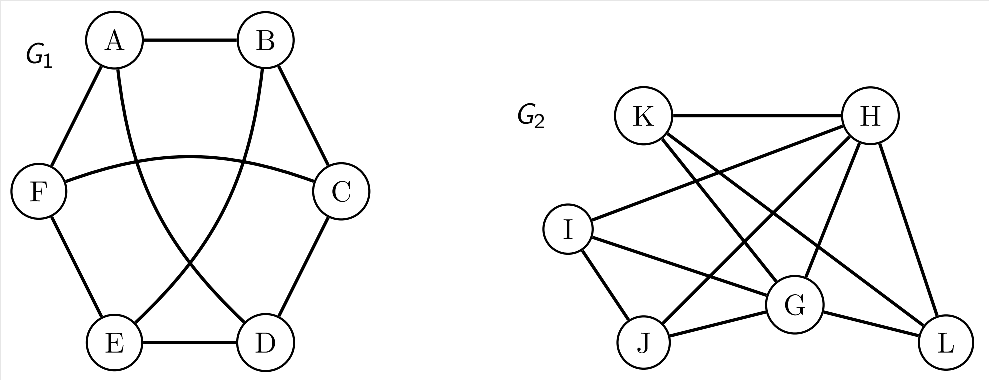


c) deg (A) = 4 Le degré de toutes les autres faces est 3. La somme des degrés des faces $= 4 + 6 \times 3 = 22$ qui est bien le double de 11 arêtes.

Exercice 7

a) Est-ce que le graphe G_1 est planaire ? Si oui, représentez un graphe isomorphe à G_1 et dont les arêtes ne se croisent pas.

b) Est-ce que le graphe G_2 est planaire ? Si oui, représentez un graphe isoomorphe à G_2 et dont les arêtes ne se croisent pas.



Solution

a) Pour le 1er graphe, $s = 6$ et $a = 9$. De plus, c'est un graphe connexe sans triangle.
S'il était planaire, il devrait vérifier le 2e critère de graphes planaires, à savoir : $a \leq 2s - 4$.
Mais $9 > 2 \cdot 6 - 4 = 8 \Rightarrow$ le G_1 ne peut pas être planaire.

b) Le graphe ci-contre est isoomorhe à G_2
G_2 est donc planaire.