PROGRAMME AIMS DE FORMATION DES ENSEIGNANTS DE MATHEMATIQUE DU SECONDAIRE (TTP) EN PARTINARIAT AVEC LA FONDATION MASTERCARD ET LE GOUVERNEMENT DU CAMEROON

OLYMPIADES NATIONALES AIMS DE MATHÉMATIQUES

NIVEAU : NATIONAL

DATE : le 15 mai 2021

Cher Candidat,

Vous prenez ainsi part aux Olympiades Nationales de Mathématiques organisés par l'Institut Africain des Sciences Mathématiques (AIMS). Nous vous félicitons pour votre volonté d'y prendre part et vous encourageons. Ce niveau National est composé de 2 épreuves de 2 heures chacune.

CONSIGNES AUX CANDIDATS :

- Les téléphones portables NE SONT PAS AUTORISÉS dans la salle d'examen
- Vous devez essayer de répondre à toutes les questions
- On vous rappelle la nécessité d'une présentation ordonnée et d'une bonne rédaction de votre travail
- Dans les calculs, il vous est conseillé de montrer toutes les étapes de votre travail et d'afficher les réponses à chaque étape
- Les calculatrices électroniques non programmables sont autorisées
- Du papier quadrillé sera fourni

OLYMPIADES NATIONALES AIMS DE MATHEMATIQUES 2021

DEUXIEME EPREUVE	NIVEAU : Terminale	DUREE : 2 heures

EXERCICE 1 :

1. Soit la suite numérique (b_n) définie par : $\begin{cases} b_0 = \frac{1}{2} \\ b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{b_k}{n-k} \end{cases}$.

   Montrer pour tout entier naturel n qu'il existe deux entiers naturels non nuls m et p tels que $b_n = \frac{m}{p}$.

2. Considérons deux suites numériques (u_n) et (v_n) vérifiant les propriétés :

   P_1 : (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante ;

   P_2 : Pour chaque n, $u_n \leq v_n$.

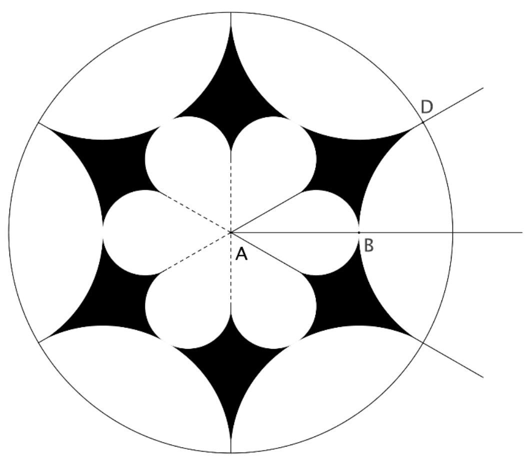
   a) Montrer que (u_n) et (v_n) sont convergentes.

   b) Construire deux exemples de suites différentes (u_n) et (v_n) convergeant vers π .

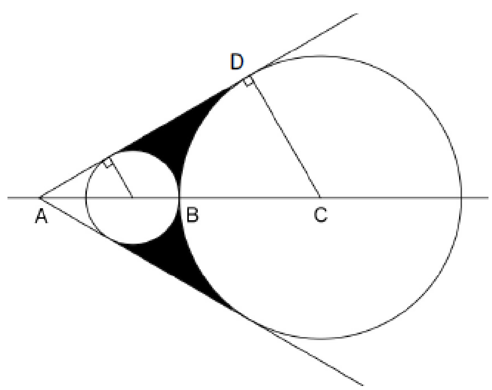
EXERCICE 2 :

Un architecte cherche à intégrer une rosace particulière dans le bâtiment dont il étudie actuellement les plans. Voici son idée : la rosace a été tracée à partir du motif ci-dessous construit à l'aide de deux cercles.

Rosace :



Motif :



1. Dans le motif ci-dessus :
    a. Quelle est la mesure de l'angle formé par les tangentes aux cercles issues de A ?
    b. Montrer que $AB = BC$
    c. Comment le rayon du plus grand des deux cercles s'exprime-t-il en fonction du rayon du plus petit des deux cercles ?
2. D'après ses plans, l'architecte souhaite inscrire sa rosace dans un disque de rayon $3\sqrt{3}$.
    a. Comment doit-il alors choisir le rayon de chacun des cercles du motif ?
3. On suppose que le petit cercle a un diamètre égal à une unité.
    a. Quelle est l'aire de la partie colorée de la rosace ?

EXERCICE 3 :

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes et sont notées sur un point chacune.

Pour chaque question, il y'a exactement deux propositions correctes. Le candidat doit indiquer sur sa copie les deux propositions vraies. Aucune justification n'est demandée.

Chaque réponse exacte rapporte 0,5 point, chaque réponse fausse enlève 0,25 point. Donner trois propositions ou plus à une question, ou bien n'en donner aucune, ne rapporte aucun point. Si, par application de ce barème, le total des points de l'exercice est négatif, il est ramené à zéro.

1) Les suites suivantes sont convergentes :

a) $\left(\frac{2^n}{n^{100}}\right)_{n>1}$; b) $\left(\frac{2n+(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}\right)_{n\in IN}$; c) $\left(n\sin\frac{1}{n}\right)_{n>0}$; d) $\left(\frac{\sqrt{n}}{\ln n}\right)_{n>1}$

2) On considère trois suites (u_n) ; (v_n) et (w_n) ayant, pour tout enlier naturel n, les propriétés suivantes :

$u_n < v_n < w_n$ et $\lim(u_n) = -1$; $lim(w_n) = 1$ Alors

a) $lim(v_n) = 0$.
b) La suite (v_n) est minorée.
c) Pour tout n de N, on a : $(-1 < v_n < 1)$
d) On ne sait pas dire si la suite (v_n) a une limite ou non.

3) Soient les suites x_n et y_n

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \qquad y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$; Alors

a) Les suites (x_n) et (y_n) sont toutes les deux croissantes.
b) $x_3 = \frac{19}{20}$; $y_3 = \frac{37}{60}$
c) Les suites (x_n) et (y_n) ne sont pas majorées.
d) Les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes.

EXERCICE 5 :

Sur cette île chaque jour et dans cet ordre, chaque loup tue un mouton, chaque mouton tue un serpent et chaque serpent tue un loup. Après dix jours il ne reste plus sur l'île qu'un mouton et aucun autre animal.

Combien y avait-il d'animaux de chaque espèce au départ ?