PROGRAMME AIMS DE FORMATION DES ENSEIGNANTS DE MATHEMATIQUE DU SECONDAIRE (TTP) EN PARTINARIAT AVEC LA FONDATION MASTERCARD ET LE GOUVERNEMENT DU CAMEROON

OLYMPIADES NATIONALES AIMS DE MATHÉMATIQUES

NIVEAU : NATIONAL

DATE : le 15 mai 2021

Cher Candidat,

Vous prenez ainsi part aux Olympiades Nationales de Mathématiques organisés par l'Institut Africain des Sciences Mathématiques (AIMS). Nous vous félicitons pour votre volonté d'y prendre part et vous encourageons. Ce niveau National est composé de 2 épreuves de 2 heures chacune.

CONSIGNES AUX CANDIDATS :

- Les téléphones portables NE SONT PAS AUTORISÉS dans la salle d'examen
- Vous devez essayer de répondre à toutes les questions
- On vous rappelle la nécessité d'une présentation ordonnée et d'une bonne rédaction de votre travail
- Dans les calculs, il vous est conseillé de montrer toutes les étapes de votre travail et d'afficher les réponses à chaque étape
- Les calculatrices électroniques non programmables sont autorisées
- Du papier quadrillé sera fourni

OLYMPIADES NATIONALES AIMS DE MATHEMATIQUES 2021

PREMIERE EPREUVE	NIVEAU : Terminale	DUREE : 2 heures

EXERCICE 1 :

1. Les nombres $a = (40122)_7$ et $b = (126)_7$ sont donnés en base 7. Diviser a par b.
2. Trouver l'inverse de l'entier 160 modulo 801.
3. Calculer $2^{1000000}$ mod 77.

EXERCICE 2 :

1. Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} dx$ et $J = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} dx$.
2. Déterminer parmi tous les rectangles du plan d'aire fixé K>0, ceux dont le périmètre est minimal.

EXERCICE 3 :

Soient f et g deux fonctions continues sur le segment $I = [0; 1]$ et à valeurs dans $[0; 1]$telles que $gof = fog$. Le but de l'exercice est de démontrer qu'alors, il existe un réel l de $[0; 1]$ tel que $f(l) = g(l)$.

1. Question préliminaire

   Soit φ la fonction définie sur $[0; 1]$ par $\varphi(x) = f(x) - x$.

   Démontrer qu'il existe un réel $a \in [0; 1]$ tel que : $\varphi(a) = 0$.

   On a donc $f(a) = a$. On dit que a est un point fixe de f.

Dans la suite du problème (questions 2, 3 et 4), on suppose qu'il n'existe pas de réel l dans $[0; 1]$ tel que $f(l) = g(l)$ et on déduit une contradiction.

2. On note h la fonction définie sur I par $h = f - g$.

   Démontrer que h est de signe constant.

3. Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$
   a) Démontrer que la suite (u_n) est bornée.
   b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est un point fixe de f.

c) En déduire que la suite (u_n) est monotone.
d) En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel l de $[0;1]$. (On ne cherchera pas à calculer l)

4. Dans cette question, nous allons en déduire une contradiction
   a) Démontrer que $f(l) = l$
   b) Démontrer que $g(l) = l$
   c) En déduire une contradiction
5. Conclure.

EXERCICE 3 :

Pour chacune des 5 propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$

1. On considère la transformation du plan qui à tout point d'affixe z associe le point d'affixe z définie par : $z' = 2iz + 1$.

   Proposition 1 : « Cette transformation est la similitude directe de centre A d'affixe $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$ d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport 2

2. Dans l'espace muni du repère orthonormal (O;i,j,k), on note S la surface d'équation $z = x^2 + 2x + y^2 + 1$

   Proposition 2 : « La section de S avec le plan d'équation z=5 est un cercle de centre A de coordonnées $(-1,0,5)$ et de rayon 5 ».

   Proposition 3 : « $5^{750} - 1$ est un multiple de 7 ».

   Proposition 4 : « Si un entier naturel n est congru à 1 modulo 7 alors le PGCD de 3n +4 et de 4n +3 est égal à 7 ».

3. Soient a et b deux entiers naturels.

   Proposition 5 : « S'il existe deux entiers relatifs u et v tels que au $+$ bv $= 2$ alors le PGCD de a et b est égal à 2 ».

EXERCICE 4 :

Pour chacune des 5 questions suivantes, une seule des trois propositions est exacte.

Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n’est demandée.

Une réponse exacte rapporte I point une réponse inexacte enlève 0,5 point : l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; i. j. k)$.
On considère les points $A(3, 1, 3)$ et $B(-6,2, 1)$. Le plan (P) admet pour équation cartésienne : $x + 2y + 2z = 5$.

1. L'ensemble des points M de l'espace tels que $|4MA - MB| = 2$ est
   a) un plan de l'espace
   b) une sphère
   c) l'ensemble vide

2. Les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur le plan sont:
   a) $\left(\frac{11}{3}\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$
   b) $\left(\frac{8}{3}\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$
   c) $\left(\frac{7}{3}\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$

3. La sphère de centre B et de rayon I:
   a) coupe le plan S suivant un cercle
   b) est tangente au plan J
   c) ne coupe pas le plan

4. On considère la droite (D) de l'espace passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(1; 2; -1)$ et la droite (D') d'équations paramétriques
$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in IR)$$

5. Les droites (D) et (D') sont :
   a) coplanaires et parallèles ;
   b) coplanaires et sécantes ;
   c) non coplanaires

6. L'ensemble des points M de l'espace équidistants des points A et B est :
   a) la droite d'équations paramétriques
$$\begin{cases} x = -\frac{3}{2} - t \\ y = \frac{3}{2} - 7t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad (t \in IR)$$
   b) le plan d'équation cartésienne $9x - y + 2t + 11 = 0$
   c) le plan d'équation cartésienne$7y - z - 7 = 0$