

Partie A : Evaluation des ressources

EXERCICE 1: / 4pts

Soit $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et f_n la fonction définie par $f_n(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$.

1. Démontrer que pour tout $x \in [0; 1]$, $|f'_n(x)| \leq \frac{1}{n!}$. **0,5pt**

2. On pose : $F_n(x) = \frac{1}{n!}x - f_n(x)$.

a) En utilisant les variations de F_n sur $[0; 1]$, montrer que pour tout $x \in [0; 1]$, $-1 \leq F_n(x) \leq \frac{1}{n!} - \frac{u_n}{e}$. **0,75pt**

b) En déduire que : $\frac{u_n}{e} - 1 \leq \frac{1}{n!}$. **0,25pt**

3. On pose $G_n(x) = -\frac{1}{n!}x + f_n(x)$.

Etudier les variations de G_n sur $[0; 1]$, et en déduire que : $-\frac{1}{n!} \leq \frac{u_n}{e} - 1$. **0,75pt**

4. Trouver la limite de u_n . **0,25pt**

5. On pose $v_n = u_n + \frac{1}{n \times (n!)}$.

a) Démontrer que (u_n) et (v_n) sont deux suite adjacentes. **0,5pt**

b) On suppose que e est un nombre rationnel. On pose donc : $e = \frac{p}{q}$ avec $\text{pgcd}(p; q) = 1$, $p \in \mathbb{N}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$. Justifier que $q! u_q \in \mathbb{N}^*$. **0,5pt**

c) Montrer que e n'est pas un nombre rationnel. **0,5pt**

EXERCICE 2: / 4,5pts

On muni le plan complexe du repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Soient les points A et B d'affixes respectives 3 et $6i$. On note C le milieu du segment $[AB]$. A tout point M du plan distinct de C, on associe les points N et M' tels que N soit l'isobarycentre des points A, B, M ; le triangle CNM' soit rectangle isocèle direct en C.

1. Justifier que $\vec{CN} = \frac{1}{3}\vec{CM}$. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la transformation h du plan telle que $h(M)=N$. Donner les éléments caractéristiques de la similitude directe f telle que $f(M)=M'$. **1,5pt**

2. Soit (H) la courbe du plan d'équation $4x^2 + y^2 - 12x - 4y - 23 = 0$. Donner la nature et les éléments caractéristiques de (H) dans un repère orthonormé convenablement choisi. Dessiner (H). **1,5pt**

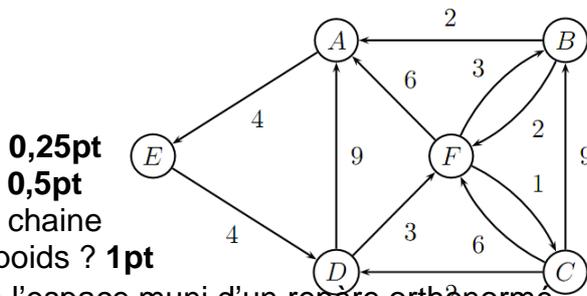
3. Déterminer et construire (Γ) le lieu géométrique des points M' lorsque M décrit (H). **1pt**

4. Calculer l'aire de la partie du plan située à l'intérieur de (H) et à l'extérieur de (Γ). **0,5pt**

EXERCICE 3: / 3,5pts

I- On considère le graphe ci-contre.

1. Quel est l'ordre ce graphe ? **0,25pt**
2. Ce graphe est-il simple ? Justifier. **0,5pt**
3. Déterminer en utilisant l'algorithme de Dijkstra la chaîne la plus courte pour aller de C à E. Quel est son poids ? **1pt**



II- $A(2; 1; 3)$ et $B(-3; -1; 7)$ désignent deux points de l'espace muni d'un repère orthoènormé

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit (D) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -7 + 2\beta \\ y = -3\beta \\ z = 4 + \beta \end{cases}$. On considère l'ensemble

X des points M de l'espace tels que $MA^2 + MB^2 = 45$.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de X. **0,75pt**

2. Soit $S_{(D)}$ le demi-tour d'axe (D). Donner la nature et les éléments caractéristiques de Γ , image de X par $S_{(D)}$. 1pt

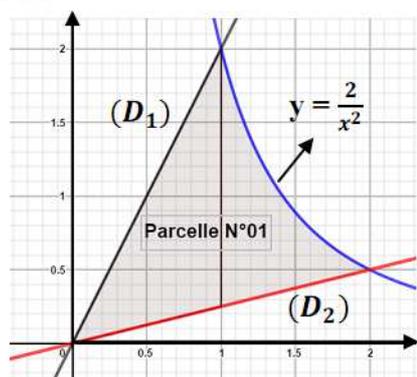
EXERCICE 4: / 3pts

Une urne contient 4 boules indiscernables au toucher, ces boules sont marquées par les numéros $-1 ; 0 ; 1$ et 2 . On tire successivement et avec remise deux boules de cette urne. On désigne par a le numéro de la première boule tirée et par b celui de la deuxième boule. Dans le plan vectoriel P dont la base $B = (\vec{i}; \vec{j})$ et on définit l'endomorphisme $\varphi_{a,b}$ par sa matrice dans la base $B : \begin{pmatrix} a-1 & 2a \\ 2ab & b(a-1) \end{pmatrix}$ (avec a et b qui sont les numéros des boules tirées)

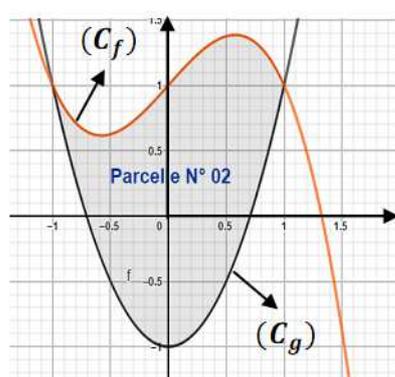
1. a) Pour quelles valeurs de a et b , $\varphi_{a,b}$ est un isomorphisme ? 0,5pt
 b) Calculer la probabilité pour que les endomorphismes $\varphi_{a,b}$ soient bijectifs. 0,5pt
2. Déterminer le noyau de $\varphi_{a,b}$. (On discutera suivant les valeurs du couple $(a ; b)$) 0,5pt
3. Préciser en particulier le noyau de $\varphi_{1,0}$ et donner une base de ce sous espace vectoriel. 0,5pt
4. Soit X la variable aléatoire qui associe aux deux boules tirées, la somme de leurs numéros.
 a) Donner la loi de probabilité de X. 0,5pt
 b) Calculer son espérance mathématique. 0,5pt

Partie B : Evaluation des compétences

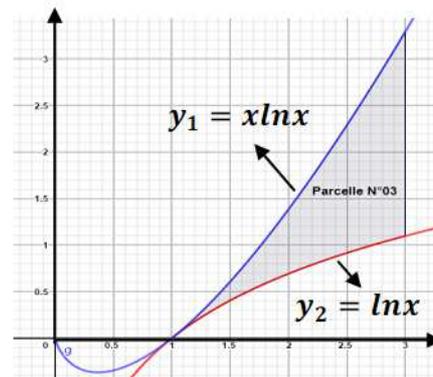
M. YOPA, propriétaire terrien dispose de trois parcelles de terrain comme l'indique les figures ci-dessous où (C_f) désigne la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = -x^3 + x + 1$.



Parcelle 1



Parcelle 2



Parcelle 3

Pour acheter les billets d'avion de ses trois fils Jean, Paul et Yves qui ont obtenu des bourses d'études universitaires à l'étranger, il souhaite vendre ses trois parcelles de terrain à raison de 8 000 FCFA le mètre carré. Les billets d'avion de Jean, Paul et Yves coûtent respectivement 800 000 FCFA, 1 000 000 FCFA et 1 200 000 FCFA. Sachant que chaque parcelle de terrain est située dans un plan muni du repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ et que l'unité d'aire est égale à $200 m^2$, traiter les tâches ci-dessous en prenant $\ln(3) \approx 1,1$.

Tâches :

- 1°) M. YOPA Pourra-t-il acheter le billet d'avion de Paul en vendant la **Parcelle 1** ? 1,5 pt
- 2°) M. YOPA Pourra-t-il acheter le billet d'avion de Jean en vendant la **Parcelle 2** ? 1,5 pt
- 3°) M. YOPA Pourra-t-il acheter le billet d'avion de Yves en vendant la **Parcelle 3** ? 1,5 pt