

**Mini session n°5**  
**Epreuve de mathématiques Tle c**

Durée : 4h      coef :7

**Partie A : Evaluation des ressources 15 points**

**Exercice1: 5 points**

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

1- On donne les points  $A(0, 1, -2)$ ,  $B(-2, 1, 0)$ ,  $C(-1, 0, -2)$  et  $D(2, -1, 1)$

a- Justifier que A, B et C forment un plan dont on déterminera l'équation cartésienne. 0,75pt

b- Montrer que A, B, C et D ne sont pas coplanaires puis calculer le volume du tétraèdre ABCD. 1,25pt

2- Déterminer l'expression analytique de la réflexion  $s$  du plan  $(p) : x + y + z + 3 = 0$ . 0,75pt

3- A tout point  $M(x, y, z)$  l'application  $f$  de l'espace associe le point  $M'(x', y', z')$  tel

$$\text{que : } \begin{cases} x' = \frac{1}{3}(x + 2y - 2z - 6) \\ y' = \frac{1}{3}(2x + y + 2z + 6) \\ z' = \frac{1}{3}(-2x + 2y + z - 6) \end{cases}$$

a- Quel est l'ensemble  $(E)$  des points invariants par  $f$ ? 0,5pt

b- Démontrer que si  $M' = f(M)$  alors le milieu  $I$  de  $[MM']$  appartient à  $(E)$  et que  $\overline{MM'}$  a une direction fixe. 0,75pt

c- Déduire la nature et les éléments caractéristiques de  $f$ . 0,5pt

d- Vérifier que  $f$  est une involution. 0,5pt

**Exercice 2: 5 points**

La fonction  $f$  est définie dans  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (x - 2)^2 e^{-x}$ .

$(C)$  est sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, I, J)$ .

1-a) Résoudre l'équation différentielle  $(E') : y'' + 2y' + y = 0$ . 0,5pt

b) Vérifier que la fonction  $g$  définie par  $g(x) = x^2 e^{-x}$  est une solution particulière de l'équation différentielle  $(E) : y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$  0,5pt

2- Soit  $h$  une fonction deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

a) Montrer que  $h$  est solution de  $(E)$  si et seulement si  $h - g$  est solution de  $(E')$ .

**0,5pt**

b) Déterminer la solution  $h$  de  $(E)$  dont la courbe admet au point  $K(0, 4)$  une tangente parallèle à  $(OI)$ . 1pt

3- a) Etudier les variations de  $f$  et tracer  $(C)$ . 1pt

b) En remarquant que  $f$  est une solution de  $(E)$ , déterminer une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ . 0,5pt

4- On pose  $U_n = \int_0^n (x + 2)^2 e^{-x} dx$  pour tout entier naturel  $n$ .

a) Montrer que  $U_n = 10 - (n^2 + 6n + 10)e^{-n}$ . 0,5pt

b) Justifier que la suite  $(U_n)$  est convergente. 0,25pt

c) En déduire l'aire du domaine  $D = \{M(x; y) \text{ tels que } x \geq 0, 0 \leq y \leq f(x)\}$ . 0,25pt

### Exercice 3 : 5 points

$\varphi$  est la courbe d'équation  $y^2 = 4x$  dans un repère orthonormé  $(O, I, J)$ .

- 1) Donner la nature et les éléments caractéristiques de  $\varphi$ . 0,75pt
- 2) On donne le point  $A(1, 0)$ . Les points  $M(x, y)$  et  $M'(x', y')$  de  $\varphi$  sont tels que le segment  $[MM']$  passe par A. Montrer que:
  - a)  $xx' = 1$  et  $yy' = -4$ . 0,5pt
  - b) Pour le milieu  $K(X, Y)$  du segment  $[MM']$  on a :  
 $Y^2 = 2(X - 1)$ . 0,5pt
- 3-a) Construire l'ensemble  $(\omega)$  des milieux des segments  $[MM']$  qui passent par A. 0,5pt
- b) Montrer que  $AM = x + 1$  et  $\frac{1}{AM} + \frac{1}{AM'} = 1$ . 0,5pt
- 4- Soit  $h$  l'application du plan d'écriture complexe  $z' = -2iz + 1 + 2i$ 
  - a) Déterminer une équation cartésienne de  $\varphi' = h(\varphi)$ . 0,75pt
  - b) Quel est l'ensemble des points M d'affixe  $z = x + iy$ .  
tels que :  $|z - 1| = \frac{1}{2}|z - \bar{z} - 8i|$  ? 0,5pt
- 5- a) Déterminer une représentation paramétrique de  $\varphi$ . 0,5pt
- b) Ecrire les équations des tangentes à  $\varphi$  aux points d'abscisse 1. 0,5pt

### PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES 5 points

Un joueur de damier a un carré qui possède 16 cases. Sur ce damier, il répartit au hasard 4 pions indiscernables au toucher à raison d'un pion au plus par case. Et il dit qu'il a 50% de chances pour obtenir au moins une colonne sans pion. Il enlève ensuite ces 4 pions sur ce damier en cherchant le nombre d'anagrammes du mot colonne. Enfin sur ce damier, il lance simultanément trois dés parfaits dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

- 1- Ce jour, a-t-il raison sur le % de chances d'obtenir au moins une colonne sans pion ? 1,5pt
- 2- Aider ce joueur à calculer le nombre d'anagrammes du mot colonne. 1,5pt
- 3- Pourquoi lorsqu'on lance simultanément ces trois dés on obtient le plus souvent la somme des chiffres 10 que la somme 9 ? 1,5pt

Présentation : 0,5pt