Collège de la Retraite
Département de Mathématiques

Quatrième Mini-session
Niveau : Terminale D/TI
Durée : 4 heures ; coef 4
EPREUVE DE MATHEMATIQUES :

L'épreuve comporte trois exercices d'évaluation des ressources et un problème d'intégration obligatoires sur deux pages.

PARTIE A : Evaluation des ressources : 15 points

EXERCICE 1 : (6 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé$(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. S est la transformation du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{1}{2}(1+i)z + \frac{1}{2}(5-i).$$

1)- Montrer que l'équation(E): $(E)z^3 - z^2 - (5+4i)z - 12i + 21 = 0$ admet une unique solution réelle dans $\mathbb{C}$ puis résoudre (E). **1,5pt**

2)-Déterminer la nature puis les éléments caractéristiques de S. **1pt**

3-) Soient A, B, C et D les points d'affixes respectives $3+2i, -3, 1-2i$ et $5-4i$.

a) Faire la figure à compléter au fur et à mesure. **1pt**
b) Vérifier que $S(B) = C$. Quelle est la nature du triangle ABC ? **0,5pt**
c) Déterminer l'affixe du point E image de C par l'homothétie de centre A et de rapport 2. **0,5pt**
d) Démontrer que le quadrilatère ABED est un carré. **1pt**
4) On désigne par (C) le cercle de centre C passant par A. (C) coupe l'axe des abscisses en deux points K et L, l'affixe de K est positive. Démontrer que le triangle KCL est isocèle en C. **0,5pt**

EXERCICE 2 : (3 points)

1) Exprimer en fonction de ln2 les nombres suivants $A = -3ln32 + \frac{2}{3}ln\frac{1}{16}$ et B $= 5ln\sqrt{32} + \frac{1}{2}ln\frac{1}{\sqrt{8}}$**1pt**
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(C)\ln(2x-1) + \ln(-x+4) = \ln 2$ et $(D)(\ln 2x)^2 - 6\ln(2x) + 5 \leq 0$. **1pt**
3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système d'équations $\begin{cases} \ln(xy) = 4 \\ \ln x \ln y = -12 \end{cases}$ **1pt**

EXERCICE 3 : (6 points)

On donne la fonction f définie sur $]0, +\infty[$par $f(x) = \frac{x+lnx}{x^2}$ et (C) sa courbe representative dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) d'unité 2cm sur chaque axe.

I/On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$par$g(x) = 1 - x - 2lnx$
1) Calculer $g(1)$ et dresser le tableau de variation de g. **1pt**
2) En déduire le signe de gsuivant les valeurs de x. **0,5pt**

II/
1) a) Calculer la limite de f à droite en 0. **0,25pt**
b) Montrer que pour tout nombre réel $x \in]0, +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{x}(1 + \frac{lnx}{x})$. **0,25pt**
c) En déduire alors la limite de f en $+\infty$. **0,25pt**

2-a) Montrer que pour tout nombre réel $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$. **0,5pt**
b) Dresser le tableau de variation de f. **0,75pt**

c) Construire alors la courbe (C). **0,5pt**

3) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$admet une unique solution α telle que $0,5 < \alpha < 0,6$. Puis en déduire que :$-ln\alpha = \alpha$ **0,75pt**

4-a) Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ vers un intervalle J à préciser. **0,75pt**

b) Construire en pointillés sur le même graphique la courbe de la bijection réciproque f^{-1}.**0,5pt**

PARTIE B : Evaluation des compétences : 5 points

On a analysé les effets de la puissance sonore dans une discothèque. Le son se manifeste par des variations de pression de l'air. L'unité de mesure de la pression de l'air est le pascal. La pression de l'air s'exerce sur le tympan de l'oreille humaine. Pour une pression supérieure ou égale à 20×10^{-6}pascals s'exerçant sur son tympan, l'oreille humaine perçoit un son dont la puissance se mesure en décibels.

Pour une pression de $p$pascals s'exerçant sur le tympan, avec p≥ p_0, $p_0 = 20 \times 10^{-6}$. Lapuissance sonore perçue est égale à $f(P) = \frac{20}{ln10}\ln(50000p)$. A partir d'une puissance sonore de 120 décibels, on ressent une douleur qui peut causer un cancer sur le tympan. Par ailleurs des études cliniques ont montré que ce cancer peut augmenter son volume en moyenne de 2% par mois et si ce cancer multiplie son volume initial par 10, il envahit tout le tympan et le détruit.

1). Déterminer la pression p à partir de laquelleon peut ressentir des douleurs. **1,5pt**

2) Montrer quela puissance sonore augmente de 20 décibels quandla pression s'exerçant sur le tympan est multipliée par 10. **1,5pt**

3) Déterminer après combien de mois un discothécaire atteint de ce cancer peut perdre son sens auditif. **1,5pt**

Présentation 0,5pt