COLLEGE DE LA RETRAITE
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

ANNEE SCOLAIRE 2020-2021

MATHEMATIQUES-TC

Durée : 04 h Coef. : 7

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES 15 Points

EXERCICE 1 3.5 Points

On donne les nombres complexes $a = -\sqrt{3} + i$ et $b = 7 - 2i$

1-a) Déterminer de deux façons différentes les racines carrées de a. 1pt

b) En déduire les valeurs exactes de $cos\frac{5\pi}{12}$ et $sin\frac{5\pi}{12}$. 0.5pt

2- Quels sont les entiers relatifs n pour lesquels a^n est :

a) Un nombre réel ? 0.5pt

b) Un nombre imaginaire pur ? 0.5pt

3- Dans le plan complexe, on considère les points $A(a)$ et $B(b)$.

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

a) $|z - 7 + 2i| = |z + \sqrt{3} - i|$ 0.5pt

b) $2|z - 7 + 2i| = |-\sqrt{3} + i|$ 0.5pt

EXERCICE 2 : 5.5 Points

La fonction g est définie pour tout réel x par $g(x) = (2 - x)e^x$. (C) est sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

1- Etudier les variations de g et dresser son tableau de variations. 1.5pt

2- Montrer que g est une bijection de $I = [1, +\infty[$ vers un intervalle J à déterminer. 0.5pt

3- Etudier les branches infinies de (C) puis tracer (C). 1pt

4- Soit t un réel négatif

a) Calculer l'aire $A(t)$ du domaine (D) délimité par (C), l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = t$ et $x = 2$. 0.75pt

b) Calculer la limite de $A(t)$ lorsque t vers $-\infty$. 0.25pt

5- Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction $H: x \to (ax^2 + bx + c)e^{2x}$ soit une primitive de la fonction $h: \to (2 - x)^2e^{2x}$. 0.75pt

6- On fait tourner le domaine (D) autour de l'axe des abscisses pour obtenir un solide de révolution S.

a) Calculer le volume $V(t)$ de S. 0.5pt

b) Calculer la limite de $V(t)$ quand t vers $-\infty$. 0.25pt

EXERCICE 3 **6 Points**

1- L'espace vectoriel E a pour base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Soit f l'endomorphisme de E tel que $f\left(\vec{i}\right) = \vec{j}$, $f\left(\vec{j}\right) = -2\vec{j}$ et $f(\vec{k}) = \vec{k}$.

a) Montrer que $(f\left(\vec{i}\right), f\left(\vec{j}\right), f\left(\vec{k}\right))$ n'est pas une base de E. 0.5pt

b) Déterminer le noyau et l'image de f en donnant une base pour chacun d'eux. 1.5pt

c) Quelle est la matrice M de fof dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$? 0.5pt

2- L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points $A(-1, 1, 4), B(1, 1, 0)$ et $C(1, 2, 1)$.

a) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés. 1pt

b) Ecrire une équation cartésienne du plan (ABC). 0.5pt

c) Déterminer l'expression analytique de la réflexion s du plan (P) d'équation $2x - y + z = 1$. 1pt

d) Quels sont la nature et les éléments caractéristiques de l'image (E) de la sphère (S) de centre O et de rayon 3 cm par s? 1pt

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES **5 Points**

La population d'un pays était de 4.75 millions d'habitants en 1990 et 5.5 millions d'habitants en 1995. On désigne par $P(t)$ son nombre d'habitants à l'instant t. Une étude a montré que la vitesse d'accroissement de cette population est $P'(t) = aP(t)$ pour tout réel t avec a une constante à déterminer. Des microbes dangereux proliféraient dans une ville de ce pays. La vitesse d'accroissement $h'(t)$ du nombre $h(t)$ de microbes à l'instant t était proportionnelle à chaque instant à la quantité $h(t)$. Un jour, le nombre de ces microbes a évolué de 10^4 au bout de 3 heures et de 4×10^4 au bout de 5 heures. Un habitant de cette ville veut montrer que si la concentration en ions hydroniums d'une solution aqueuses est divisée par 100 alors son potentiel d'hydrogène augmente de 2.

1- Aidez cet habitant à faire cette démonstration. 1.5pt

2- Déterminer dans ces conditions en quelle année la population de ce pays atteindra 20 millions d'habitants. 1.5pt

3- Combien y avait-il initialement de microbes dans cette ville ce jour-là ? 1.5pt

Présentation : 0.5pt