Épreuve de Mathématiques

L'épreuve est sur deux pages, deux grandes parties A et B , toutes obligatoires. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation de la copie du candidat. Soyez précis et propre.

PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES : 15,5 PTS

Exercice 1 : 03,75 points

On considère le polynôme $P(z) = z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i$ avec $z \in \mathbb{C}$.

1. Calculer $P(i)$ et conclure . **0,5 pt**
2. Déterminer a et $b \in \mathbb{C}$, tel que $P(z) = (z-i)(z^2 + az + c)$. **0,5 pt**
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. **0,75 pt**
4. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. A , B et C les points d'affixes $z_A = i$, $z_B = 2+3i$ et $z_C = 2-3i$. r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
   (a) Déterminer l'affixe $z_{A'}$ du point A' tel que $A' = r(A)$. **0,25 pt**
   (b) Calculer $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_{A'}}$ et déduire l'existence d'une homothétie h de centre B tel que $h(A') = C$ et préciser le rapport de h . **0,75 pt**
5. On considère la transformation s du plan définie par $s = h \circ r$.
   (a) Déterminer $s(A)$. **0,25 pt**
   (b) Préciser l'écriture complexe de s puis ses éléments caractéristiques . **0,75 pt**

Exercice 2 : 03,5 points

1. Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = cosxcos(3x)$ et $g(x) = sinxsin(3x)$
   (a) Montrer que : $f(x) + g(x) = cos(2x)$ et $f(x) - g(x) = cos(4x)$. **0,5 pt**
   (b) Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions : $f - g$ et $f + g$. **0,5 pt**
   (c) En déduire les primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions f et g . **0,75 pt**
   (d) Déterminer la primitive sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en π de $h(x) = (1 + cosx)sin(4x)$. **1 pt**
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $ln(\sqrt{2x-3}) = ln(6-x) - \frac{1}{2}lnx$. **0,75 pt**

Exercice 3 : 03 points

Soient les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définie par : $u_0 = 2$ et $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{(u_n)^2}{2u_n - 1} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ v_n = ln(\frac{u_n - 1}{u_n}) \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Calculer u_1 , u_2 , v_0 et v_1 . **0,75 pt**
2. Montrer que la suite $(v_n)_n$ est une suite géometrique de raison $q = 2$. **0,75 pt**
3. Exprimer v_n en fonction de n . **0,25 pt**
4. Déduire l'expression de (U_n) en fonction de n . **0,5 pt**
5. Exprimer $S_n = v_2 + v_3 + ... + v_{n-1}$ en fonction de n et déduire $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} S_n$. **0,75 pt**

Exercice 4 : 04,25 points

Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ pat $f(x) = 2 - x + \dfrac{lnx}{x}$.

1. Calculer $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$. **0,5 pt**
2. Étudier les branches infinies relative à la courbe $(\mathcal{C})$ de f . **0,5 pt**
3. Soit la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = 1 - x^2 - lnx$.
   (a) Étudier les variations de g . et dresser son tableau de variation de . **0,75 pt**
   (b) Calculer $g(1)$ et déduire le signe de g . **0,5 pt**
4. Vérifier que $\forall x \in]0;+\infty[$ on a : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$. **0,5 pt**
5. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation . **0,5 pt**
6. Étudier la positions relatives de $(\mathcal{C})$ et la droite $(\delta) : y = -x + 2$. **0,25 pt**
7. Représenter $(\mathcal{C})$ et (Δ) dans un repère . **0,75 pt**

Exercice 5 : 01,5 points

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = ln(e^{2x} - e^{-2x})$.

1. Montrer que $D_f =]0;+\infty[$. **0,25 pt**
2. Montrer que $f(x) = 2x + ln(1 - e^{-4x})$. **0,25 pt**
3. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition . **0,5 pt**
4. Étudier les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C}_f)$. **0,5 pt**

PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES :04,5 PTS

Suite à des coupures récurrentes de lumières à **MOKOLO** le **lamido** fait commander des lampe solaire toutes identiques venant du **Nigéria** voisin pour partager à des couches les plus défavorables de sa population . Ces lampes ont la forme d'un triangle rectangle isocèle ABC tels que les points A, B et C sont les points images solution de l'équation suivante : $(E) : z^3 - 6iz^2 - 18z + 40i = 0$ (avec z_A imaginaire pure) . Il a oublié le nombre de lampe à commander mais se souvient néanmoins que ce nombre **n** était égal à l'aire d'une lampe élevée à la puissance 4 ($n = A^4$) . Son fils **YAYA** dit qu'il y'aura en tout **6561 lampes** .

Pour le transport de ces lampes , il cherche Un camion qui doit faire un trajet de $150Km$. La consommation de gasoil du camion est de $6 + \dfrac{v^2}{30}$litres par heure , ou v désigne sa vitesse en Km/h . Le prix du gasoil est de $540Frs$ le litre et on paie le chauffeur $7200Frs$ par heure. On suppose que la durée du trajet en heure est t et $P(v)$ le prix de revient de toute la course .

Le lamido aimerait un peu visité quelques pays **D'AFRIQUE** situé dans la zone hors **CFA**. Il aimerait partir du **CAMEROUN** avec une somme de **675000 FCFA** et doit visiter **m** $(m \in \mathbb{N}^*)$ pays . Sachant que le taux de change est de 15%¸ à chaque frontière et que tous les frais de séjours et de transport y compris le transport au **CAMEROUN** sont pris en charges par ses amis . À son retour du **CAMEROUN** le **Lamido** aimerait avoir moins de **200000 FCFA** en poche . Son fils **YAYA** lui dit qu'il devrait visiter au moins **8 pays** pour rentrer avec moins de $200000FCFA$ dans sa poche .

Taches :

Tache 1 : YAYA a t-il raison par rapport aux nombres de lampes . **1,5 pt**

Tache 2 : Calculer la vitesse **v** du camion pour que $P(v)$ de la course soit minimal . **1,5 pt**

Tache 3 : YAYA a t-il raison par rapport aux nombres de pays ? . **1,5 pt**