

PROBABILITES I

Pré requis

Pour faire un bon probabiliste, il faut maîtriser le cours sur **les dénombrements** (au programme en classe de première).

☺ Bonne nouvelle : Succès assuré vous met à disposition une fiche de cours sur **les dénombrements**. (Voir www.succes-assure.com)

Les probabilités

Soit A un évènement et Ω l'univers des cas possible.

$$P(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}$$

Soit A et B deux évènements. L'évènement A ou B se note $A \cup B$ tel que $\text{card}(A \cup B) = \text{card}A + \text{card}B - \text{card}(A \cap B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$A \cap B$ est l'évènement A et B

Exemple

Un dé cubique numéroté de 1 à 6

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

$$A = \{1; 2; 3; 4\}$$

$$B = \{4; 5; 6\}$$

$$A \cap B = \{4\}$$

$$\text{card}A = 4$$

$$\text{card}B = 3$$

$$\text{card}(A \cap B) = 1$$

$$\begin{aligned} \text{card}(A \cup B) &= \text{card}A + \text{card}B - \text{card}(A \cap B) \\ &= 4 + 3 - 1 \end{aligned}$$

$$\text{card}(A \cup B) = 6$$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\{1; 2; 3; 4\}) \\ &= P(1) + P(2) + P(3) + P(4) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$P(B) = P(\{4; 5; 6\}) = P(4) + P(5) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = P(4) = \frac{1}{6}$$



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$$

$$P(A \cup B) = \frac{4+3-1}{6} \Rightarrow P(A \cup B) = 1$$

L'évènement $A \cup B$ est égal à l'univers des cas possibles.

On parle d'équiprobabilité lorsque tout les évènements élémentaires de l'univers on la même chance de se réaliser.

Soit F " les chiffres paires "

G " les chiffres impaires "

$$G = \{1; 3; 5\}; F = \{2; 4; 6\}; \quad P(F) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}; P(G) = \frac{1}{2}$$

L'évènement impair est contraire à l'évènement pair.

$$\text{Si } P(F) = \frac{1}{2} \text{ alors } P(G) = 1 - P(F) = 1 - \frac{1}{2} \Rightarrow P(G) = \frac{1}{2}$$

Remarque :

Soit A un évènement et $\bar{A}$ l'évènement contraire de A

On a $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

-On dit que les évènements A et B sont incompatibles ou impossibles s'ils ont rien en commun.

C'est-à dire lorsque $A \cap B = \emptyset$

$$CARD(A \cap B) = CARD(A) + CARD(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \text{comme } A \cap B = \emptyset$$

$$\text{d'où } P(A \cap B) = 0$$

$$\text{Alors } P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Définition :

- La probabilité d'un évènement est toujours comprise entre 0 et 1.
- La probabilité de l'évènement certain est 1. (**Un évènement certain se réalise toujours**).
- La probabilité de l'évènement impossible est nulle. (**Un évènement impossible ne se réalise jamais**).
- La probabilité d'un évènement est la somme des probabilités des évènements élémentaires qui le compose.

Application 1

Soit Ω l'univers des éventualités a, b, c, d, e d'une expérience aléatoire

Déterminer la probabilité sur Ω telle que :

$$P(a) = 2P(b) = 2P(c) = 4P(d) = 4P(e)$$

Réponse

Calculons la probabilité des évènements A, B, C définies par :



$$A = \{a, b\} ; \quad B = \{c, e\} ; \quad C = \{b, c, d\}$$

Comme la somme des probabilités de tous les événements de l'univers est 1 on a :

$$P(a) + P(b) + P(c) + P(d) + P(e) = 1$$

Déterminons la probabilité des événements a, b, c, d en fonction de $P(e)$

$$P(a) = 4P(e) ; \quad P(b) = 2P(e) ; \quad P(c) = 2P(b) ; \quad P(d) = P(b)$$

$$\text{Ainsi on a : } 4P(b) + 2P(b) + 2P(b) + P(e) + P(e) = 1 \Rightarrow 10P(e) = 1 \Rightarrow P(e) = \frac{1}{10} = 0,1$$

$$\text{D'où } P(a) = 4 \times 0,1 \Rightarrow P(a) = 0,4$$

$$P(b) = 2 \times 0,1 \Rightarrow P(b) = 0,2$$

$$P(c) = 2 \times 0,1 \Rightarrow P(c) = 0,2$$

$$P(d) = P(e) \Rightarrow P(d) = 0,1$$

Vérification

$$P(a) + P(b) + P(c) + P(d) + P(e) = 0,4 + 0,2 + 0,2 + 0,1 + 0,1 = 1$$

$$\text{Calculons } P(A) ; P(B) ; P(C)$$

$$P(A) = P(a) + P(b) = 0,4 + 0,2 = 0,6$$

$$P(B) = P(c) + P(e) = 0,2 + 0,1 = 0,3$$

$$P(C) = P(b) + P(c) + P(d) = 0,2 + 0,2 + 0,1 = 0,5$$

❖ Cas d'équiprobabilité

Ce cas est suggéré dans un énoncé par certaines expressions.

- Pour le lancer des dés
- Pour le lancer des pièces de monnaies...

Sont supposés parfaitement équilibrées et leur face portées des signes.

- pour le tirage de boules, de jetons, des darts...

Sont indiscernables au toucher de plus, tirer au hasard.

Application 2

Une urne contient six boules indiscernables au toucher numéroté de 1 à 6

On lance un dé cubique parfaitement équilibré, on lit le numéro inscrit sur la face supérieure.

Quelle est la probabilité avoir un chiffre pair ?

Quelle est la probabilité d'avoir un chiffre plus grand que 4 ?

Réponse

Tirer d'une urne une boule indiscernable au toucher et lire son numéro ainsi que lancer un dé cubique est une expérience aléatoire dont l'univers Ω est défini par :



$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

Soit A l'évènement « le chiffre obtenu est pair ».

B l'évènement « le chiffre obtenu est plus grand que 4 »

Calculons les probabilités de A et B

Avec $A = \{2; 4; 6\}$; $B = \{5; 6\}$

$$CARD(A) = 3 ; CARD(B) = 2 \quad \text{et} \quad CARD(\Omega) = 6$$

$$P(A) = \frac{CARD(A)}{CARD(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{CARD(B)}{CARD(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Autre méthode

Dans l'équiprobabilité des évènements élémentaires chaque évènement à la même probabilité

C'est-à dire $\frac{1}{6}$

$$P(A) = P(\{2; 4; 6\}) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = P(\{5; 6\}) = P(5) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

❖ Tirage simultané

Application 3 :

Un sac contient dix boules indiscernables au toucher dont six rouges $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$

Et quatre noires N_1, N_2, N_3, N_4 . On tire simultanément et au hasard trois boules du sac.

On note leurs couleurs.

A « l'évènement les trois boules tirées contiennent au moins une rouge »

B « l'évènement les trois boules tirées contiennent au plus une rouge »

Réponse

$$10 \text{ boules } \begin{cases} 6 \text{ boules rouges} \\ 4 \text{ boules noires} \end{cases}$$

Soit Ω l'univers des cas possibles

C'est un tirage simultané de 3 boules dans un total de 10 boules.

$$CARD(\Omega) = C_{10}^3 = 120$$

$$P(A) = \frac{CARD(A)}{CARD(\Omega)}$$

$$CARD(A) = C_6^1 \times C_4^2 + C_6^2 \times C_4^1 + C_6^3 \times C_4^0 = 116$$



$$P(A) = \frac{116}{120} = \frac{29}{30}$$

$$P(B) = \frac{\text{CARD}(B)}{\text{CARD}(\Omega)}$$

$$\text{CARD}(B) = C_6^1 \times C_4^2 + C_6^0 \times C_4^3 = 40$$

$$P(B) = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$$

Remarque 1: sur la notion d'au moins et d'au plus.

- Un oncle vient vous rendre visite et vous lui dites avant de partir donne moi au moins 100f. Cela veut dire simplement ; s'il ne vous a rien donné c'est 100f ou plus que ça.
- Sur une table est posé dix bonbons et vous demandez qu'on vous apporte au plus un. Cela veut dire si on vous a trop apporté de bonbons c'est un ou rien.
- Simultanément veut dire à la fois ; en même temps ou à la fois.

Remarque 2 : A quel moment utilise-t-on la notion de combinaison

On utilise la combinaison lorsqu'on parle de :

- tirage simultané
- tirage simultané avec remise
- tirage successif
- tirage successif avec remise (on tire l'un après l'autre avec remise)

❖ **Tirage successif avec remise**

Application 4 :

Un sac contient huit boules indiscernables au toucher dont cinq rouges $R_1; R_2; R_3; R_4; R_5$

Et trois noires $N_1; N_2; N_3$. On tire au hasard une boule du sac, on note sa couleur on la remet dans le sac puis on tire au hasard une deuxième boule, on note sa couleur.

Calculons les probabilités de chacun des événements suivants :

A « les deux boules tirées sont de couleur différente »

B « les deux boules tirées sont de même couleur ».

Réponse

$$8 \text{ boules } \begin{cases} 5 \text{ boules rouges} \\ 3 \text{ boules noires} \end{cases}$$

Tirer une boule parmi 8 la remettre et tirer à nouveau une boule parmi 8 est un produit cartésien de l'ensemble E dans F tel que $\text{CARD}(E) = 8$ et $\text{CARD}(F) = 8$

$$\begin{aligned} \text{CARD}(E \times F) &= \text{CARD}(E) \times \text{CARD}(F) \\ &= 8 \times 8 \\ &= 64 \end{aligned}$$

Ce produit cartésien est noté $E \times F$ ou $F \times E$



Soit A l'évènement « les deux boules tirées sont de couleurs différentes ».

A est constitué par les éléments des ensembles suivants :

$$\{R_1; R_2; R_3; R_4; R_5\} \times \{N_1; N_2; N_3\} \text{ ou } \{N_1; N_2; N_3\} \times \{R_1; R_2; R_3; R_4; R_5\}$$

$$\text{CARD}(A) = (5 \times 3) + (3 \times 5) = 30$$

$$P(A) = \frac{\text{CARD}(A)}{\text{CARD}(\Omega)} = \frac{30}{64} = \frac{15}{32}$$

Donc

Soit l'évènement B « les deux boules tirées sont de même couleur ».

B est constitué par les éléments des ensembles suivants :

$$\{R_1; R_2; R_3; R_4; R_5\} \times \{R_1; R_2; R_3; R_4; R_5\} \text{ ou } \{N_1; N_2; N_3\} \times \{N_1; N_2; N_3\}$$

$$\text{CARD}(B) = (5 \times 5) + (3 \times 3) = 34$$

$$P(A) = 1 - P(B)$$

NB : B est contraire à A car

❖ Tirage successif sans remise

Application 5 :

Un sac contient huit boules indiscernables au toucher dont cinq rouges R_1, R_2, R_3, R_4, R_5

Et trois noires N_1, N_2, N_3 . On tire au hasard une boule du sac, on note sa couleur on ne la remet pas dans le sac puis on tire au hasard une deuxième boule, on note sa couleur.

Calculons les probabilités des évènements suivants :

A « les deux boules tirées sont de couleurs différentes. »

B « les deux boules tirées sont de même couleurs. »

Réponse

$$8 \text{ boules } \begin{cases} 5 \text{ boules rouges} \\ 3 \text{ boules noires} \end{cases}$$

Soit Ω l'univers des cas possibles.

$$\Omega = \{R_1; R_2; R_3; R_4; R_5; N_1; N_2; N_3\} \Rightarrow \Omega = 8$$

Le premier tirage d'une boule s'effectue dans les 8 boules.

Comme on ne remet plus les boules tirées dans le sac alors le deuxième tirage s'effectue dans les

(8-1) boules restantes c'est-à-dire 7 boules.

Calculons le $\text{CARD}(\Omega)$

Il s'agit d'un arrangement de 2 boules dans un total de 8.

-Un arrangement fait intervenir la notion d'ordre mais sans répétition.

$$\text{CARD}(\Omega) = A_8^2 = 8 \times 7 = 56$$

Ici encore l'épreuve a lieu dans le cadre de l'équiprobabilité des évènements élémentaires.

A « les deux boules tirées sont de couleurs différentes »

$$\text{CARD}(A) = (A_5^1 \times A_3^1) + (A_3^1 \times A_5^1) = 30$$



$$P(A) = \frac{CARD(A)}{CARD(\Omega)} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28} \Rightarrow P(A) = \frac{15}{28}$$

B « les deux boules tirées sont de même couleurs »

$$P(B) = \frac{CARD(B)}{CARD(\Omega)} = \frac{26}{56} = \frac{13}{28} \Rightarrow P(B) = \frac{13}{28}$$

On remarque les deux évènements A et B contraires.

$$\text{On } P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{15}{28} = \frac{13}{28} \quad \text{et } P(A) = 1 - P(B) = 1 - \frac{13}{28} = \frac{15}{28}$$

❖ Lancer d'un dé cubique truqué

Application 6 :

On lance un dé cubique parfaitement équilibré dont une face est marquée (a), deux faces sont marquées (b) et trois faces sont marquées (c) ; un tel dé est truqué

On note la lettre marquée sur la face supérieure du dé immobilisé.

Quelle est la probabilité pour que la face supérieure soit marquée (a) ? Soit marquée (b) ? Soit marquée (c) ?

Réponse

Un dé parfaitement équilibré dont les faces présentent des évènements élémentaires distincts en nombre. Un tel dé est truqué et les évènements élémentaires n'ont pas la même chance de se réaliser donc n'ont pas les mêmes probabilités.

Pour cette expérience, l'univers des possibles est $\Omega = \{a; b; c\}$

Désigne par f_1 la face une

$$f_1 \rightarrow a$$

$$f_2 \rightarrow b, b$$

$$f_3 \rightarrow c, c, c$$

A l'évènement « la face supérieure est marquée (a) » $CARD(A) = 1$

Soit A cette probabilité $P(A)$

B est l'évènement « la face est marquée (b) »

$$P(B) = \frac{CARD(B)}{CARD(\Omega)} ; CARD(B) = 2 \Rightarrow P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

C est l'évènement « la face supérieure est marquée »

$$CARD(C) = 3$$

$$P(A) = \frac{CARD(C)}{CARD(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P(C) = \frac{1}{2}$$

❖ Lancer d'un dé cubique pipé

Application 7 :

On lance un dé cubique dont les six faces sont numérotées de 1 à 6. Le centre de gravité de ce dé ne coïncide pas avec son centre, on dit que ce dé est piqué.



Ce dé est tel que les évènements élémentaires 1 ; 2 ; 3 ont la même probabilité, cette probabilité étant le double de la probabilité de chacun des autres évènements élémentaires.

Quelle est la probabilité P définie sur l'univers Ω de cette expérience aléatoire ?

Quelle est la probabilité d'avoir un chiffre paire ?

Réponse

Soit Ω l'univers des cas possible

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Le dé étant pipé il n'est donc pas équilibré, les évènements élémentaires ne sont pas équiprobables.

La probabilité des évènements élémentaires est telle que

$$P(1) = P(2) = P(3) = 2P(4) = 2P(5) = 2P(6)$$

Ecrivons toutes les autres probabilités en fonction de la probabilité de $P(6)$ et comme la somme des probabilités des évènements élémentaires est 1 on a :

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

$$2P(6) + 2P(6) + 2P(6) + P(6) + P(6) + P(6) = 1$$

$$9P(6) = 1 \Rightarrow P(6) = \frac{1}{9} \quad \text{d'où } P(1) = 2 \Rightarrow P(6) = \frac{2}{9}$$

$$P(1) = \frac{2}{9} ; \quad P(2) = \frac{2}{9} ; \quad P(3) = \frac{2}{9} \quad P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{9}$$

Désignons par A l'évènement « le numéro de la face supérieure est un chiffre paire »

$$A = \{2; 4; 6\}$$

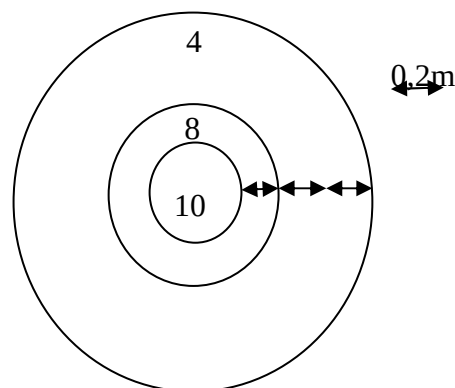
$$P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9} \Rightarrow P(A) = \frac{4}{9}$$

❖ Probabilité et proportionnalité

Application 8 :

On considère une cible de tir à l'axe de rayon 0,8 m comme indiqué lorsque la flèche atteint la cible, le tireur note le nombre de points inscrits dans la couronne où se trouve la flèche.

Sachant que la probabilité d'atteindre une couronne et proportionnelle à l'aire de cette couronne trouver la probabilité des évènements élémentaires 4 ; 6 ; 8 et 10.



Réponse

Soit Ω l'univers des cas possible.

$$\Omega = \{4; 6; 8; 10\}$$

La probabilité d'atteindre une couronne étant proportionnelle à l'aire de cette couronne. Calculons les aires des couronnes de la cible.

Justifier ceci

Numéro	10	8	6	4
Aire (m^2)	0,125	0,377	0,628	0,879



$$A = \pi r^2$$

$$A(10) = \pi \times (0,2)^2 = 0,125$$

$$A(8) = \pi \times (0,4)^2 - A(10) = 0,377$$

$$A(6) = \pi \times (0,6)^2 - \pi (0,4)^2 = 0,628$$

$$A(4) = \pi \times (0,8)^2 - \pi (0,6)^2 = 0,879$$

On calcule l'aire d'une couronne en retranchant l'aire qui n'est pas comprise dans cette couronne.

La proportionnelle entre la probabilité d'atteindre chaque couronne et l'aire de cette Couronne :

$$\frac{P(10)}{A(10)} = \frac{P(8)}{A(8)} = \frac{P(6)}{A(6)} = \frac{P(4)}{A(4)} ; \frac{P(10)}{0,125} = \frac{P(8)}{0,377} = \frac{P(6)}{0,628} = \frac{P(4)}{0,879}$$

La somme des probabilités élémentaires est $P(10) + P(8) + P(6) + P(4) = 1$ exprimons

les autres probabilités en fonction de $P(10)$ D'où $P(10) + \frac{0,377}{0,125} P(10) + \frac{0,628}{0,125} P(10)$

On a : $16,07 P(10) = 1 \Rightarrow P(10) = 0,062$ alors $P(8) = 0,188$

$$P(6) = 0,313$$

$$P(4) = 0,437$$

❖ Pourcentage et probabilité

Application 9 :

Dans une population E 15% des individus ont une maladie Ma. Parmi les individus atteints de la maladie Ma, 20% ont une maladie Mb. Parmi les individus non atteints de la maladie Ma, 4% ont la maladie Mb.

On prend au hasard un individu de la population E. A et B désignant respectivement les événements suivants :

« L'individu est atteint de la maladie Ma ».

« L'individu est atteint de la maladie Mb ».

Quelle est la probabilité pour qu'un individu de E soit atteint :

- 1) de Ma et Mb
- 2) uniquement de Ma
- 3) uniquement de Mb
- 4) d'aucune de Ma et Mb

Réponse

Désignons par A l'évènement « individu ayant la maladie a (Ma) »

B l'évènement « individu ayant la maladie B (Mb) »

$\bar{A}$ L'évènement n'ayant pas la maladie A

$\bar{B}$ L'évènement n'ayant pas la maladie B

$A \cap B$ L'évènement « individu ayant la maladie Ma et Mb

$\bar{A} \cap \bar{B}$ L'évènement « individu n'ayant ni la maladie M_a ni la maladie M_b .

La probabilité pour qu'un individu de E Soit atteint :



de M_a et M_b

$$P(M_a \cap M_b) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{15}{100} \times \frac{20}{100} = 0,03$$

Uniquement M_b

Cela veut dire que l'individu a la maladie M_a et non la maladie M_b

On a : $P(A \cap \bar{B}) = P(A) \times P(\bar{B})$ avec $P(\bar{B}) = 1 - P(B)$

$$P(B) = \frac{20}{100} = 0,2 \Rightarrow 1 - P(B) = 0,8$$

$$P(A \cap \bar{B}) = \frac{15}{100} \times 0,8 = 0,12$$

Uniquement de M_b

$$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \times P(B)$$

Le pourcentage de ceux qui n'ont pas la maladie A est $(100 - 15) \% = 85\%$

$$P(\bar{A} \cap B) = 0,85 \times \frac{4}{100} = 0,034$$

4) d'aucune maladie de M_a et M_b

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \times P(\bar{B})$$

On a $80\% \bar{A}$ et $(100 - 4)\% \bar{B} \Rightarrow 96\% \bar{B}$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{85}{100} \times \frac{96}{100} = 0,85 \times 0,96 = 0,816$$

Dans ce type d'exercice l'élève doit arriver à déterminer tous les pourcentages qui donnent directement les probabilités.

15% des individus ont la maladie M_a directement les individus qui n'ont pas la maladie M_a ont pour pourcentage $(100 - 15)\% = 0,85\%$

$\frac{15}{100}$ donne la probabilité 0,15

$\frac{85}{100}$ donne la probabilité 0,85

20% d'individus ont une maladie M_b cette probabilité est $\frac{20}{100} = 0,2$

Les individus n'ayant la maladie M_b on pour pourcentage $(100 - 20)\% = 80\%$ de probabilité 0,8

On peut éllucider plus clairement et simplement cet exercice à partir d'un arbre de choix.

Où $A = M_a$ et $B = M_b$



