



La clarté de la rédaction et le soin pris pour le tracé des figures seront pris en compte dans l'évaluation complète de la copie du candidat. Evitez toutes ratures.

**Exercice 1 :**

8pts

Pour tout  $k$  entier on note  $f_k$  l'application de  $[0; 1]$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f_k(x) = x^k \sqrt{1-x}$ . On appelle  $C_k$  sa courbe représentative.

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f_k$ .

1pt

2. Donner, en distinguant suivant la valeur de  $k$ , le tableau de variations de  $f_k$ .

1pt

3. Etudier les positions respectives de  $C_k$  et  $C_{k+1}$ . Tracer les courbes  $C_0, C_1, C_2$ .

2pts

4. On pose  $I_k = \int_0^1 f_k(x) dx$ .

Calculer  $\int_0^1 f_0(x) dx$ .

0.75pt

5. a. Quel est le sens de variation de  $I_k$  ? Montrer que  $I_k$  converge vers une limite  $l$  que l'on ne cherchera pas.

0.75pt

5. b. Montrer, que pour tout entier  $k > 0$ , on a  $I_k = \frac{2k}{2k+3} I_{k-1}$ . En déduire une expression de  $I_k$ .

1.5pts

5. c. Montrer que pour tout  $k$  entier, on a  $\int_0^1 f_k(x) dx \leq \frac{a}{1+k}$  où  $a$  est une constante que l'on déterminera. En déduire la limite de  $I_k$

1pt

**Exercice 2 :**

3pts

L'espace est muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

1. Soient  $F$  le point de coordonnées  $(0; 0; \frac{1}{4})$  et  $(P)$  le plan d'équation  $z = -\frac{1}{4}$ .

On note  $d(M, P)$  la distance d'un point  $M$  au plan  $(P)$ . Montrer que l'ensemble  $(S)$  des points  $M$  de coordonnées  $(x; y; z)$  qui vérifient  $d(M, P) = MF$  a pour équation  $x^2 + y^2 = z$ .

0.5pt

2. a. Quelle est la nature de l'intersection de l'ensemble  $(S)$  avec le plan d'équation  $z = 2$  ?

0.25pt

b. Quelle est la nature de l'intersection de l'ensemble  $(S)$  avec le plan d'équation  $x = 0$  ? Représenter cette intersection dans le repère  $(O; \vec{j}, \vec{k})$ .

0.75pt

3. Dans cette question,  $x$  et  $y$  désignent des nombres entiers naturels.

a. Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de  $x^2$  par 7 ?

0.75pt

b. Démontrer que 7 divise  $x^2 + y^2$  si et seulement si 7 divise  $x$  et 7 divise  $y$ .

0.75pt

4. Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  (unité graphique : 1 cm).

**Partie A :**

Dans le repère  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , on considère la courbe H d'équation  $y^2 - x^2 = 16$ .

1. Montrer que H est la réunion de deux courbes C et C' où C est la courbe représentative de la fonction f définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \sqrt{x^2 + 16}$  et où C' est l'image de C par une transformation simple que l'on précisera. 0.5pt

2.a. Étudier la fonction f (limites aux bornes de l'ensemble de définition et sens de variation). 1pt

b. Montrer que la droite d'équation  $y = x$  est une asymptote de C'. 0.5pt

c. Tracer H dans le repère  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . 0.5pt

d. On nomme A et B les points de la courbe H d'abscisses respectives -3 et 3. On considère le domaine D du plan constitué des points  $M(x; y)$  vérifiant  $-3 \leq x \leq 3$  et  $\sqrt{x^2 + 16} \leq y \leq 5$ . Hachurer le domaine D et exprimer l'aire de D à l'aide d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer. 1pt

e. Calculer le volume du solide obtenu par rotation de la portion de la courbe de f délimitée par les droites d'équations  $x=0$ ;  $x=3$ , au tour de l'axe des ordonnées. 0.75pt

**Partie B**

On appelle r la rotation de centre O et d'angle  $\frac{\pi}{4}$ .

1. a. Donner l'écriture complexe de r. 0.25pt

b. On désigne par x' et y' les coordonnées du point M', image par r du point  $M(x; y)$  du plan.

Vérifier que  $\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) \end{cases}$ . Déterminer les coordonnées des points A' et B', images respectives de A et B par la rotation r.

Placer les points A' et B' dans le repère  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . 1pt

2. Soit H' l'hyperbole d'équation  $xy = 8$ .

a. Montrer que H' est l'image de H par la rotation r. 0.5pt

b. Tracer H' dans le repère  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . 1pt

3. Soit D' l'image de D par la rotation r. On admet que D' est l'ensemble des points  $M(x; y)$  du plan vérifiant  $\sqrt{2} \leq x \leq 4\sqrt{2}$  et  $\frac{8}{x} \leq y \leq 5\sqrt{2} - x$ .

a. Hachurer D'. 0.5pt

b. Calculer l'aire de D' exprimée en  $\text{cm}^2$ . En déduire une valeur approchée à  $10^{-3}$  près de l'aire de D. 1.5pts

**« Toujours dire c'est dur, est une expression implicite de l'incompétence »**  
**Proposition : Boris Gisclair DONGMO**



La clarté de la rédaction et le soin pris pour le tracé des figures seront pris en compte dans l'évaluation complète de la copie du candidat. Evitez toutes ratures.

**Exercice 1 :**

I. soit a et b des entiers naturels non nuls tels que  $d = \text{pgcd}(a, b)$  et  $m = \text{PPCM}(a, b)$ . Déterminer a et b pour que : 
$$\begin{cases} m = d^2 \\ m + d = 156 \\ b \leq a \end{cases}$$
 1.5pts

II. on se propose de déterminer les entiers relatifs n tels que : 
$$\begin{cases} n \equiv 1[5] \\ n \equiv 5[7] \end{cases} \quad (S)$$

1) Montrer que n est solution de (S), si et seulement si : 
$$\begin{cases} 4n + 1 \equiv 0[5] \\ 4n + 1 \equiv 0[7] \end{cases}$$
 0.5pt

2) En déduire que si n est solution de (S), alors on a  $35q - 4n = 1$  (1) où q appartenant à Z. 0.5pt

3) Résoudre (1), puis (S). 0.5pt

III. Déterminer et représenter le lieu géométrique des points M d'affixe z du plan vérifiant  $\frac{z+i}{z-1}$  est un imaginaire pur non nul. 1pt

**Exercice 2 :**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, e_1, e_2)$ . L'unité graphique est de 6 Cm.

1) a. Reconnaitre et caractériser la transformation f du plan complexe dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe de point M' d'affixe z' telles que  $z' = -iz + 1 + i$ . 0.25pt

b. Donner les formules analytiques de f. 0.25pt

2) les points  $M_\theta$  ont leurs coordonnées  $(x, y)$  définies par : 
$$\begin{cases} x = \frac{\cos \theta}{2 + \cos \theta} \\ y = \frac{\sin \theta}{2 + \cos \theta} \end{cases} \quad \text{ou } \theta \in [0, 2\pi]$$

a. Calculer en fonction de  $\theta$ , la distance  $OM_\theta$  et  $d(M_\theta, (D))$  la distance de M à la droite (D) d'équation  $x - 1 = 0$ . 0.5pt

b. Evaluer  $\frac{OM_\theta}{d(M_\theta, (D))}$ . En déduire que, pour tout réel  $\theta \in [0, 2\pi]$ , les points  $M_\theta$  appartiennent à une même ellipse (E) dont on déterminera l'excentricité, le grand axe ainsi que les coordonnées des quatre sommets. Préciser les points d'intersection de (E) avec  $(Y'OY)$ . 2pts

c. Tracer (E) 0.5pt

d. Déterminer et tracer  $(E')$ , l'image de (E) par f. 0.5pt

**Exercice 3 :**

Partie A : l'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J, K)$ . On donne les points  $A(1 ; 0 ; -1)$ ,  $B(2 ; 1 ; 0)$ ,  $C(0 ; 1 ; -1)$  et  $D(-1 ; 0 ; 4)$ .

1) Montrer que les points A, B et C définissent un plan. 0.25pt

2) Montrer que les points A, B, C et D sont non coplanaires. 0.25pt

3) Calculer le volume du tétraèdre ABCD. 0.25pt

Partie B : On donne (P) :  $x + y - 2z + 1 = 0$ .

1) Donner l'expression analytique de S, la réflexion d'axe (P) 0.75pt

2) On note (D) la droite passant par D et de vecteur directeur  $\vec{u}(-1 ; -1 ; 2)$ .

a. Justifier que (D) est perpendiculaire à (P) et en déduire les coordonnées du point H, projeté orthogonal de D sur (P). 0.75pt

b. Déterminer l'expression analytique du demi-tour h d'axe (D). 0.75pt

c. Quelle est la nature et élément caractéristique de  $g = S \circ h$ . 0.25pt

d. Déterminer l'ensemble des antécédents du point A par S noté (L). 0.25pt

e. Déduire la nature et éléments caractéristiques de  $S_{(D)} \circ S_{(L)}$ . 0.5pt

**Problème :** 8pts

Ce problème a deux parties indépendantes.

**Partie A :**

Soit f la fonction définie par :  $f(x) = \int_2^x \frac{dt}{\sqrt{-t^2 + 4t - 3}}$ .

1.a. Déterminer l'ensemble de définition de f et calculer f(2). 0.5pt



- b. Justifier que  $f$  est dérivable sur  $]1; 3[$  et calculer  $f'(x)$ . 0.5pt  
 c. En déduire le sens de variation de  $f$ . 0.25pt
2. Soit  $g$  la fonction définie sur  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  par  $g(x) = f(2 + \sin x)$ .  
 a. A l'aide du théorème de dérivation des fonctions composées, montrer que pour tout  $x$  de  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ ,  $g'(x) = 1$ . 0.5pt  
 b. En déduire que pour tout  $x$  de  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ ,  $g(x) = x$  et que  $\int_2^3 \frac{dt}{\sqrt{-t^2+4t-3}} = \frac{\pi}{2}$ . 0.75pt  
 c. Que peut-on dire des fonctions  $f$  et  $m : x \rightarrow 2 + \sin x$ ? 0.25pt
3. a. Dresser le tableau de variation de  $m$  sur  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ , puis en déduire celui de  $f$  sur  $[1; 3]$ . 0.5pt  
 b. Construire la courbe représentative de  $f$  dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'unité 2 cm. 0.5pt

**Partie B :**

4pts

Soit  $(u_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $u_n = \sum_{k=n}^{k=2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$ .

1-a) Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $u_{n+1} - u_n = \frac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}$  0.5pt

b) En déduire le sens de variation de la suite  $(u_n)$  et établir que  $(u_n)$  est une suite convergente. 0,5pt

2) L'objectif de cette question est de déterminer la valeur de la limite de la suite  $(u_n)$ . Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ .

a-i) Justifier pour tout entier naturel  $n$  non nul l'encadrement :  $\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{n}$ . 0.5pt

ii) Vérifier que  $\int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{n} - f(n)$  et déduire que pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $0 \leq f(n) \leq \frac{1}{n(n+1)}$ . 0.5pt

b) On considère la suite  $(S_n)$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :  $S_n = \sum_{k=n}^{k=2n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{2n(2n+1)}$ . 0.5pt

i) Montrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $0 \leq f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n) \leq S_n$

ii) Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que pour tout réel  $x$  distinct de  $-1$  et de  $0$ , on ait :  $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$ . 0.25pt

iii) En déduire l'égalité  $S_n = \frac{n+1}{n(2n+1)}$ . 0.5pt

iv) Déterminer alors la limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$  de  $\sum_{k=n}^{k=2n} f(k) = f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n)$ . 0,25pt

v) Vérifier que pour tout entier  $n > 1$ ,  $f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n) = u_n - \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right)$ . 0.5pt

vi) Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ . 0.25pt

5) Représenter graphiquement  $f$  et  $h^{-1}$  dans un repère orthogonal d'unités 5cm en abscisse et 10cm en ordonnée. On prendra  $\alpha=10^2$ . 1pt

**PARTIE C : Recherche des Primitives de f**

/1,5pt

1) Vérifier que pour tout réel  $x > 0$ , on a :  $f'(x) + f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{e^x}{e^x + 1}$

2) On pose  $g(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{e^x}{e^x + 1}$

a) Trouver une primitive  $G$  de  $g$  sur l'intervalle  $]0, +\infty[$

0,5pt

b) En déduire les primitives  $F$  de  $f$  sur  $]0, +\infty[$

0,5pt

**PARTIE D : Equation différentielle / 2pts**

1) On considère les fonctions  $f$  définies de  $]0, +\infty[$  vers  $\mathbb{R}$  vérifiant les conditions suivantes :

(1) :  $f$  est deux fois dérivable et  $x^2 f''(x) - 2f(x) = 0$  pour  $x > 0$

a) Soit  $f$  une fonction définie sur  $]0, +\infty[$  et la fonction  $g$  définie pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = f(e^x)$ . Montrer que  $f$  vérifie les conditions (1) si et seulement si  $g$  est solution de l'équation différentielle  $y'' - y' - 2y = 0$

0,75pt

b) Trouver toutes les fonctions  $f$  de  $]0, +\infty[$  qui vérifient les conditions (1)

0,75pt

c) Trouver les fonctions  $f$  vérifiant les conditions (1) et qui se prolongent par continuité en 0.  
0,5pt

« toujours dire c'est dur, est une expression implicite de l'incompétence »  
Proposition : Boris Gisclair DONGMO



**EXERCICE 1 :**

/6pts

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On prendra pour unité graphique 1cm.

On considère l'application  $f$  du plan dans lui-même qui, à tout point  $M$  d'affixe  $Z$ , associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  telle que :  $z' = -(\sqrt{3} + i)z - 1 + i(1 + \sqrt{3})$

- 1) Montrer que  $f$  est une similitude directe dont le centre  $\Omega$  a pour affixe  $j$ . En déterminer le rapport et l'angle. 0.75pt
- 2) Soit  $M_0$  le point d'affixe  $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} + i\frac{3}{4}$ . Calculer  $\Omega M_0$  et donner une mesure de l'angle  $(\vec{u}, \Omega M_0)$ . 0.5pt
- 3) On considère la suite des points  $(M_n)_{n \geq 0}$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $M_{n+1} = f(M_n)$ . On note  $z_n$  l'affixe de  $M_n$ .
  - a) Placer les points  $\Omega, M_0, M_1, M_2, M_3$  et  $M_4$ . 1pt
  - b) Montrer par récurrence pour tout entier naturel, l'égalité :  $z_n - i = 2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}} (z_0 - i)$ . 0.5pt
  - c) Pour tout entier naturel  $n$ , calculer  $\Omega M_n$ , puis déterminer le plus petit entier naturel  $n$  tel que  $\Omega M_n \geq 10^2$ . 0.5pt
- 4) a) On considère l'équation (E) :  $7x - 12y = 1$  où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs. Après avoir vérifié que le couple  $(-5; -3)$  est solution, résoudre (E). 0.75pt
  - b) Soit  $\Delta$  l'ensemble des points  $M$  du plan d'affixe  $z$  telle que  $\text{Im}(z)=1$  et  $\text{Re}(z) \geq 0$ . Caractériser géométriquement  $\Delta$  et le représenter. 1pt
  - c) Déterminer l'ensemble des entiers naturels  $n$  tels que  $M_n$  appartienne à la demi-droite d'origine  $\Omega$  dirigée par le vecteur  $\vec{u}$ . Préciser son plus petit élément. 1pt

**EXERCICE 2 :**

/3pts

**PARTIE A**

$(\Gamma_m)$  est l'ensemble des points du plan de coordonnées  $(x, y)$  pour tout  $m$  un nombre réel.

$$(7 - m)x^2 + m^2 y^2 + 2(7 - m)x - (7 - m)(m^2 - 1) = 0$$

- 1) Déterminer les valeurs de  $m$  pour que  $(\Gamma_m)$  existe. 0,25pt
- 2) Dans la suite de l'exercice de  $(\Gamma_m)$  existe
  - a) Pour quelles valeurs de  $m$   $(\Gamma_m)$  est-il un cercle ? 0,5pt
  - b) On suppose que  $(\Gamma_m)$  n'est pas un cercle. Donner l'équation réduite de  $(\Gamma_m)$ . 0,25pt
- 3) Déterminer la nature et éléments caractéristiques de  $(\Gamma_0)$ . Construire  $(\Gamma_0)$ . 0,5pt
- 4) On suppose que  $(\Gamma_m)$  a pour équation réduite  $\frac{(x+1)^2}{m^2} + \frac{y^2}{7-m} = 1$ 
  - a) Pour quelles valeurs de  $m$   $(\Gamma_m)$  est-elle :
    - i) une parabole ? 0,25pt
    - ii) Une ellipse ? 0,25pt
    - iii) Une hyperbole ? 0,2pt
  - b) On pose  $m = 3$ . Déterminer pour  $(\Gamma_3)$ 
    - i) L'excentricité



ii) Les coordonnées des foyers F et F' dans le repère  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  puis dans le repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  tel que  $\Omega(-1; 0)$

iii) Construire  $(\Gamma_3)$

0,75pt

**PARTIE B**

/ 0,5pt x 3 = 1,5pt

Une seule des réponses proposées est exacte

Q1 : Dans un repère orthonormal, la parabole (P) ;  $y = -2x^2$  a pour foyer de coordonnées :

- a)  $(-\frac{1}{8}; 0)$
- b)  $(0; -\frac{1}{8})$
- c)  $(0; \frac{-1}{4})$
- d)  $(-\frac{1}{2}; 0)$

Q2 : Dans un repère orthonormal direct, l'ellipse  $\mathcal{E}$  a pour équation  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$  Alors l'un des

foyers a pour coordonnées :

- a)  $(\sqrt{3}; 0)$
- b)  $(-\sqrt{5}; 0)$
- c)  $(0; \sqrt{5})$
- d)  $(0; -\sqrt{5})$

Q3 : La courbe  $\mathcal{C}$  représente dans un repère orthonormal, la fonction  $x \mapsto \sqrt{4x^2 - 1}$ . alors  $\mathcal{C}$  est une demi.....

- a) Ellipse
- b) parabole
- c) hyperbole
- d) hyperboloïde.

**PROBLEME**

**PARTIE A : Etude de fonctions auxiliaires**

/3,75pts

I. On définit dans  $]1; +\infty[$ ,  $g(x) = 2x - (x - 1) \ln(x - 1)$

1) Etudier les variations de g

1pt

2) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  tel que :

$e + 1 < \alpha < e^3 + 1$

0,5pt

3) En déduire le signe de  $g(x)$

0,25pt

II. Soit  $\varphi$  la fonction définie sur  $]1; +\infty[$  par  $\varphi(x) = \frac{\ln(x^2 - 1)}{x}$

1) Calculer les limites de  $\varphi$  aux bornes de son domaine de définition.

0,75pt

2) Calculer  $\varphi'(x)$  et montrer que  $\varphi'(x) = \frac{g(x^2)}{x^2(x^2 - 1)}$

0,5pt

3) En déduire les signes de  $\varphi'(x)$  et de  $\varphi'(e^x)$  suivant les valeurs de x.

0,75pt

**PARTIE B : Etude de la fonction f /4,25pts**

0,25pt

1) Vérifier que  $\forall x \in ]0; +\infty[$ ,  $f(x) = \varphi(e^x)$

2) En déduire :

a) La limite de  $f(x)$  lorsque x tend vers 0.

0,25pt

b) La limite de f lorsque x tend vers  $+\infty$

0,25pt

c) Le sens de variations de f sur  $]0; +\infty[$  et que f admet un maximum de  $\ln(\sqrt{2})$

1pt

3) Montrer  $\varphi(\sqrt{\alpha}) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha - 1}$  et déduire de ce qui précède que  $\forall x > 0$ , on a :  $f(x) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha - 1}$

0,75pt

4) Soit h la restriction de f sur  $[\ln\sqrt{\alpha}; +\infty[$ . Montrer que h admet une réciproque  $h^{-1}$  dont on

donnera le domaine de définition et le domaine de dérivabilité dont on donnera le domaine de définition et le domaine de dérivabilité.

0,75pt



Enseignant : Boris Gisclair DONGMO

La clarté de la rédaction et le soin pris pour le tracé des figures seront pris en compte dans l'évaluation complète de la copie du candidat. Évitez toutes ratures.

**EXERCICE :**

**/4.5pts**

Dans le plan orienté, on considère un triangle isocèle ABC tel que :  $AB = AC$  et  $(\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{\pi}{4}$ .

Soit I le point tel que le triangle CAI soit isocèle rectangle avec  $(\overline{CA}, \overline{CI}) = -\frac{\pi}{2}$ . Pour la figure, que l'on complètera en traitant les questions, on prendra  $AB = 5$  cm.

1. On appelle  $r_A$  la rotation de centre A qui transforme B en C et  $r_C$  la rotation de centre C et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ .

On pose  $f = r_C \circ r_A$ .

- a. Déterminer les images par  $f$  de A et de B. (0.5pt)
  - b. Démontrer que  $f$  est une rotation dont on précisera l'angle et le centre O. Placer O sur la figure. (0.75pt)
  - c. Quelle est la nature du quadrilatère ABOC ? (0.25pt)
2. Soit  $s$  la similitude directe de centre O qui transforme A en B. On appelle C' l'image de C par  $s$ , H le milieu du segment [BC] et H' son image par  $s$ .
- a. Donner une mesure de l'angle de  $s$ . Montrer que C' appartient à la droite (OA). (0.75pt)
  - b. Donner l'image par  $s$  du segment [OA] et montrer que H' est le milieu de [OB]. (1pt)
  - c. Montrer que (C'H') est perpendiculaire à (OB). En déduire que C' est le centre du cercle circonscrit au triangle OBC. (1.25pts)

**PROBLEME :**

**/15pts**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $[0, +\infty[$  par  $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$ . On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal (o,i,j) ; unité graphique : 4cm

**PARTIE A : ETUDE D'UNE FONCTION AUXILIAIRE**

Soit la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $[0, +\infty[$  par  $g(x) = x + 2 - e^x$

- 1) Etudier le sens de variation de  $g$  sur  $[0, +\infty[$  et déterminer la limite de  $g$  en  $+\infty$  (0.75x2pt)
- 2) a) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution et une seule dans  $[0, +\infty[$ .  
On note  $\alpha$  cette solution. (0.5pt)
- b) Prouver que  $1.14 < \alpha < 1.15$  (0.25pt)
- 3) En déduire le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$  (0.5pt).

**PARTIE B : ETUDE DE LA FONCTION  $f$  ET TRACER LA COURBE (C).**

**(6.25pts)**

- 1) a) Montrer que pour tout  $x \in [0, +\infty[$  ;  $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$  (0.75pt)
- b) En déduire le sens de variation de  $f$  sur  $[0, +\infty[$  (0.5pt)
- 2) a) Montrer que pour tout réel position  $x$ ,  $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$  (0.25pt)
- b) En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$ . Interpréter graphiquement le résultat trouvé. (0.25x2pt)



- 3) a) Etablir que  $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$  (0.5pt)
- b) En utilisant l'encadrement de  $\alpha$  établi dans la question A-2; donner un encadrement de  $f(\alpha)$  d'amplitude  $10^{-2}$ . (0.75pt)
- Déterminer une équation de la tangente ( T ) à la courbe ( C ) au point d'abscisse 0. (0.5pt)
- 4) Etablir que , pour tout  $x \in [0, +\infty[$ ,  $f(x) - x = \frac{(x+1)u(x)}{xe^x + 1}$  avec  $u(x) = e^x - xe^x - 1$  (0.5pt)
- b) Etudier le sens de variation de  $u$  sur l'intervalle  $[0, +\infty[$ ; en déduire le signe de  $u(x)$  (1pt)
- c) Déduire des questions précédentes la position de ( C ) par rapport à ( T ) (1pt)
- 6) Tracer ( T ) et ( C ) (1pt)

**« Toujours dire c'est dur, est une expression implicite de l'incompétence »**  
**Proposition : Boris Gaclair DONGMO**