MINESEC		Classe : T[le] C
GBHS down town Bamenda	MATHEMATIQUES	Durée : 4 h 00 min
Année :2020/2021	Séquence :04	Coefficient : 07

EVALUATION DES COMPETENCES : 15,5 pts

EXERCICE 1 **2 pts**

1-a) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E') : $2x-3y=0$. 0,5pt

1-b) Déterminer dans $\mathbb{Z}^2$ une solution $(x_0 ; y_0)$ de l'équation (E) : $2x-3y=3$. 0,5pt

1-c) Résoudre (E). 1pt

Exercice2 : **7,5pts**

Soit (H) l'hyperbole définie par l'équation : $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ dans un repère orthonormal $(0,\vec{i},\vec{j})$.

Soit f la similitude de traduction complexe : $z'=(1+i)z+i$. On note (H') l'image de (H) par f.

1. Déterminer le centre, l'axe focal, sommets et les asymptotes de l'hyperbole (H). 2pt
2. Expliquer pourquoi (H') est une hyperbole. 1pt
3. Déterminer l'expression analytique de f. 1pt
4. Déterminer ses éléments caractéristiques (sommets, foyers, directrices, asymptotes). 2pt
5. Représenter sur le même graphique les hyperboles (H) et (H'). 1,5pt

EXERCICE 4 9,5pts

f est une fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. (c) est la courbe représentant f dans un repère orthonormal.

1.a. Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation. 2,5pts

b. Trouver une équation de la tangente (T) à (c) au point d'abscisse 1. 1pt

c. Tracer la droite (T) et la courbe (c). 1,5pt

d. Résoudre graphiquement le nombre de solutions de l'équation $\ln x-\lambda x=0$ suivant les valeurs de λ .0,75pt

2.a. Calculer $f''(x)$ pour $x>0$. 0,5pt

b. Pour $n\geq 1$, on note $f^{(n)}(x)$ la dérivée $n^{ième}$ de f. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n\geq 1$; $f^{(n)}(x)=\frac{u_n+v_n\ln x}{x^{n+1}}$ pour tout $x>0$, avec $u_1=1$ et $v_1=-1$, $u_{n+1}=v_n-(n+1)u_n$ et $v_{n+1}=-(n+1)v_n$. 1,25pt

c. Exprimer v_n explicitement en fonction de n. 0,75pt

d. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n\geq 1$ $u_n=(-1)^{n+1}n!\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right)$. 1,25pt

EXERCICE 5 12pts

L'espace est orienté et muni d'un repère orthogonal direct $(0;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points A, B, C de l'espace de coordonnées respectives dans ce repère : $A(2;0;0)$, $B(1;3;0)$, $C(1;1;2)$.

Soit le triangle $M_1M_2M_3$ défini par : $\overrightarrow{OM_1}=a\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OM_2}=b\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OM_3}=c\overrightarrow{OC}$ où a, b, c sont trois nombres réels de l'intervalle $[0;1]$.

Le but de l'exercice est de déterminer, parmi les triangles $M_1M_2M_3$, un triangle d'aire maximale.

1. Fais la figure. 2pt

2. On pose : $\vec{S}_1 = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC}$; $\vec{S}_2 = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OA}$; $\vec{S}_3 = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$; $\vec{S}_4 = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

a. Calculer les coordonnées de ces quatre vecteurs ainsi que leurs normes. On note S la plus grande des normes trouvées. Prouver l'égalité : $\vec{S}_4 - \vec{S}_1 - \vec{S}_2 - \vec{S}_3 = \vec{0}$. 5pts

b. On pose $\vec{T} = \frac{1}{2}\overrightarrow{M_1M_2} \wedge \overrightarrow{M_1M_3}$. Rappeler l'interprétation de la norme du vecteur $\vec{T}$. 0,5pt

c. Prouver l'égalité : $bc\vec{S}_1 + ca\vec{S}_2 + ab\vec{S}_3 = \vec{T}$. Montrer que $\vec{T}$ s'écrit aussi sous la forme :
$\vec{T} = (bc - x)\vec{S}_1 + (ca - x)\vec{S}_2 + (ab - x)\vec{S}_3 + x\vec{S}_4$ où x désigne un réel quelconque. 1,5pt

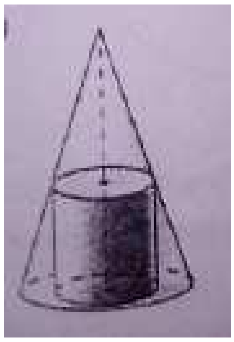
3. On suppose $a \le c$ et $b \le c$.

a. En choisissant $x = ab$, prouver que $\|\vec{T}\| \le (bc + ca - ab)S$. 1pt

b. Déduire de l'égalité $bc + ca - ab = c^2 - (c-b)(c-a)$ que $0 \le bc + ca - ab \le 1$ puis l'inégalité : $\|\vec{T}\| \le S$. 1,5pt

4. Préciser, parmi les triangles $M_1M_2M_3$, un triangle dont l'aire est maximale. 0,5pt

<u>Evaluation des compétences : 9 pts</u>



On doit fabriquer un conteneur en métal de forme cylindrique sans couvercle et d'une capacité de 24π cm^3. Le métal utilisé pour la fabrication du fond coûte 1f par cm^2 et celui utilisé par la partie courbe coûte 0,3f par cm^2. La fabrication ne donne lieu à aucun déchet.
On veut inscrire un autre cylindre de révolution de volume maximal dans un cône de révolution de hauteur 12cm et de rayon de base 4cm, les axes du cylindre et du cône coïncidant. Pour classer ces cylindre fabriqué, une échelle de 6 mètres est appuyée contre un mur vertical et repose sur un sol horizontal. A un instant pris comme origine des temps, on a fait glisser le pied de l'échelle (P), en l'écartant du mur à une vitesse constante de 0,6 m/s.

1- Quelles doivent être les dimensions du cylindre pour que son coût de fabrication soit le plus petit possible ? 3 pts

2- Trouver les dimensions d'un tel cylindre de révolution. 3 pts

3- Quelle est la vitesse instantanée du haut de l'échelle (H) lorsqu'il se trouve à 4m du sol ? (on suppose que lors du mouvement, H glisse le long du mur) 3 pts

Examinateur :M. NGUEKENG