MINESEC _ Lycée de guider
Département de Mathématiques

Examen : Evaluation N°3
Année scolaire 2020-2021
Classe : Tle C
Durée : 4 heures **Coef** : 7

Epreuve de Mathématiques

Consigne : L'épreuve comporte 2 parties obligatoires pour tous. Clarté de la copie de l'élève exigée

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES / 15,5 points

EXERCICE 1 / 3 points

1. On se propose dans cet exercice de résoudre l'équation (E) : $2x^2 + y^2 = 139$.où (x, y) désigne un couple d'entiers naturels.
   a) Quels sont les restes possibles de la division euclidienne d'un entier a par 3 ? **0,25pt**
   b) En déduire les restes possibles de la division euclidienne du carré a^2 d'un entier a par 3. **0,25pt**
   c) On suppose que (x, y) est un couple d'entiers naturels vérifiant $2x^2 + y^2 = 139$.
      i. Montrer que x est divisible par 3. **0,75pt**
      ii. Montrer que $x \leq 8$; puis résoudre l'équation (E). **1pt**
2. Trois phares A, B et C lancent un signal lumineux respectivement toutes les 25 secondes, les 30 secondes et les 35 secondes. Un signal simultané se produit à 22 heures. A quelle heure se prod uira le premier signal simultané après minuit ? **0,75pt**

EXERCICE 2 / 3,5 points

Soit $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. On considère l'équation d'inconnue $z : (E) : (1 + iz)^3(1 - itan\theta) = (1 - iz)^3(1 + itan\theta)$.

1. Soit z une solution de (E). Montrer que $|1 + iz| = |1 - iz|$ et en déduire que z est un reel. **1pt**
2. a) Exprimer $\frac{1+itan\theta}{1-itan\theta}$ sous forme exponentielle. **0,5pt**
   b) Soit z, un reel. On pose $z = tan\theta$, avec $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Montrer l'équation (E) équivaut à une equation d'inconnue θ et la resoudre. **1pt**
   c) Déterminer les solutions z_1, z_2 et z_3 de (E). **1pt**

EXERCICE 3 / 4 points

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. (***unité graphique : 2cm***). On considère l'équation d'inconnue z ; (E) : $z^3 - 7iz^2 - 15z + 25i = 0$.

1. a. Montrer que $5i$ est une solution de l'équation (E). **0,25pt**
   b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). **1pt**
2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $2 + i$; $5i$ et $-2 + i$. La droite (D) d'équation $y = 2$ rencontre la droite (AB) en K et la droite (OA) en L. (Γ) et (Γ') sont les cercles circonscrits aux triangles OAB et ALK respectivement. Soit S la similitude directe qui transforme B en O et K en L ; soit Ω le centre de S.
   a. Faire une figure. **0,25pt**
   b. Montrer que Ω appartient à (Γ) et (Γ') et qu'il est distinct du point A. **1pt**
   c. Déterminer l'écriture complexe de S et donner ses éléments caractéristiques. **1pt**
3. Déterminer l'ensemble (ξ) des points M du plan d'affixe z tel que
$|(1 + i)z + 2 - i| = 4$. **0,5pt**

EXERCICE 4 / 5 points

I/ Soit f la fonction définie par $f(x) = \tan x$. On admet que f est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ vers $\mathbb{R}$.

1. Justifier que f^{-1} est derivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R},\ (f^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. **0,5pt**
2. Soit la fonction φ définie par : $\varphi(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$.
   a) Démontrer que $\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\varphi(\tan t) = -\frac{1}{2} + \frac{\sin t}{2}$. **0,5pt**
   b) En déduire le signe de $\varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. **0,5pt**

II/ Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -\frac{x}{2} + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$. On désigne par (C) la courbe representative de g.

1. Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$. **0,25pt+0,5pt**
2. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation(on utilisera la partie A). **1pt**
3. Etudier les branches infinies de (C). **0,75pt**
4. Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J à determiner. **0,5pt**
5. Construire (C), puis la courbe de g^{-1} dans le meme repère. **0,5pt**

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES / 4,5 points

On étudie en fonction du temps le déplacement d'une balle dans le plan rapport à un repère orthonormé. A chaque instant $t \geq 0$, on définit le vecteur Vitesse de la balle $\vec{V}$ de coordonnées $(f(t),\ g(t))$. Sachant que $f(t) = V_A \cos\alpha$ et $g(t) = -gt + V_A \sin\alpha$; V_A, α et g sont 3 réels fixes. On pose $x'(t) = f(t)$ et on obtient $G(x) = -0{,}0333x^2 + 0{,}5773x + 0{,}6$.

Tache 1 : a) Donner toutes les primitives F et G de f et g (**NB** : la variable est t). **0,5pt**

b) F(t) et G(t) sont les coordonnées de la balle à l'instant t. Sachant que à l'instant $t = 0$ la balle se trouve au point A(0; 0,6), determiner alors F et G. **0,5pt**

c) On donne $g = 9{,}81$; $V_A = 14$ et $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Déterminer la position de la balle lorsque $t = 1$. (On donnera des valeurs approchées à 10^{-1} des coordonnées). **0,5pt**

Tache 2 : On suppose que la balle se dirige vers un but de hauteur $h = 2$ lorsque $x = 14$ (schema ci-dessous). La balle entre-t-elle dans le but ? **1,5pt**

Tache 3 : Quelle est l'altitude maximale que peut atteindre la balle ? **1,5pt**

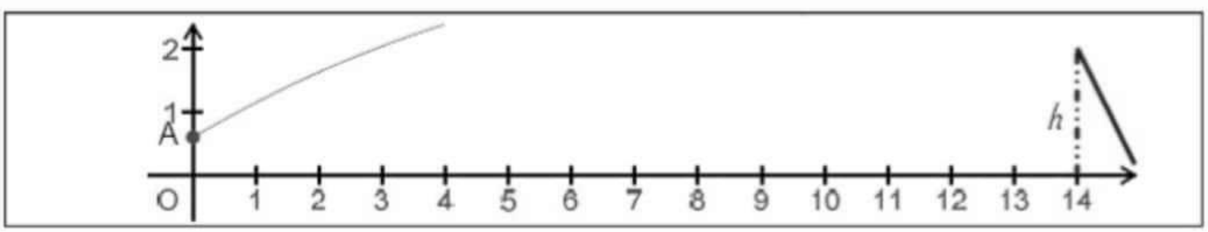

FIGURE 1

Examinateur : M. NGANSOB NONO Yves.B (PLEG_Maths)