2ème évaluation_2ème trimestre_Février 2021

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Classes : Tles D & TI **Durée : 2h40** **Coefficient : 4**

Partie A : Evaluation des ressources / 15 pts

Exercice 1 / 4 pts

1. Soit le nombre complexe $a = 2\sqrt{2}(-1+i)e^{-i\frac{2\pi}{3}}$
   a) Mettre a sous forme trigonométrique et sous forme algébrique **(1pt)**
   b) Montrer que a^{24} est un réel positif que l'on écrira comme une puissance de 2 **(0,5pt)**
   c) Déduire de la question 1.a) que : $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ **(0,5pt)**
   d) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(\sqrt{3}+1)\cos x + (\sqrt{3}-1)\sin x + \sqrt{2} = 0$ **(1pt)**
2. Linéariser l'expression $h(x) = \sin^2 x \cos 2x + \cos^2 x \sin 2x$ **(1pt)**

Exercice 3 / (7,5pts)

1. Déterminer sous forme algébrique les racines quatrièmes de l'unité **(1pt)**
2. a) Vérifier que $2+i$ est une racine quatrième de $-7+24i$ **(0,5pt)**
   b) Montrer qu'un nombre complexe z est une racine quatrième de $-7+24i$ si et seulement si $\frac{z}{2+i}$ est une racine quatrième de l'unité **(0,5pt)**
   c) En déduire sous forme algébrique toutes les racines quatrièmes de $-7+24i$ **(0,5pt)**
3. a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2(-7+24i)z - 527 - 336i = 0$ **(1pt)**
   b) En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^8 - 2(-7+24i)z^4 - 527 - 336i = 0$
4. Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 2+i$; $z_B = -1+2i$; $z_C = -2-i$ et $z_D = 1-2i$.
   a) Placer A, B, C et D dans le plan complexe **(1pt)**
   b) Calculer les distances AB et AD **(0,5pt)**
   c) Déterminer (par calculs) une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}})$ **(0,5pt)**
   d) En déduire la nature exacte du triangle ABD **(0,5pt)**
   e) Montrer que ABCD est un carré **(0,5pt)**
   f) Déterminer l'affixe du point G, centre de gravité du triangle ABC **(0,5pt)**

Exercice 4 / (3,5pts)

Deux récipients A et B sont séparés par une membrane perméable. On place dans A une solution contenant a_0 molécules et dans B une solution contenant b_0 molécules. On suppose que, toutes les heures, 20% de molécules passent de A dans B et 10% de molécules passent de B dans A. On note a_n et b_n les nombres respectifs de molécules présentes dans A et B au bout de n heures.

1. Démontrer que pour tout entier naturel n , on a : $\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}8a_n + 0{,}1b_n \\ b_{n+1} = 0{,}2a_n + 0{,}9b_n \end{cases}$ **(0,5pt)**
2. On pose, pour tout n : $u_n = a_n + b_n$ et $v_n = 2a_n - b_n$
   a) Démontrer que (u_n) est constante et exprimer u_n en fonction de a_0 et b_0 **(0,5pt)**
   b) Démontrer que (v_n) est géométrique et exprimer v_n en fonction de n, a_0 et b_0 **(1pt)**
3. Exprimer a_n et b_n en fonction de n, a_0 et b_0 **(1pt)**
4. Etudier les limites des suites (a_n) et (b_n), puis commenter les résultats. **(0,5pt)**

Partie B : Evaluation des compétences / 4,5 pts

Mme Bella est une agricultrice spécialisée dans la culture des pommes de terre. Les études ont révélé que, par an, lorsque Mme Bella utilise dans sa plantation x tonnes d'engrais naturel ($x \in [1; +\infty[$), elle produit $t(x) = x + \frac{9}{x}$ tonnes de pommes de terre ; et pour t tonnes de pommes de terre produites, elle réalise après-vente un gain algébrique g (en millions de FCFA) tel que $g(t) = -3t + 30$.

Tâche 1 : Quelle quantité minimale de pommes de terre (en tonnes) Mme Bella peut-elle produire par an ? **(1,5pt)**

Tâche 2 : Dans quel intervalle doit se situer la quantité x d'engrais naturel à utiliser pour que le business agricole de Mme Bella soit rentable annuellement? **(1,5pt)**

Tâche 3 : Quelle quantité d'engrais naturel Mme Bella doit-elle utiliser pour réaliser le bénéfice annuel maximal ? Que vaut ce bénéfice ? **(1,5pt)**

Présentation / 0,5 pt

Bonne composition !