LYCEE BILINGUE DE YOKADOUMA

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Trimestre 2 ; Evaluation n°1.

Classe :T^{lle} D ; coef 4 ; durée 4h.

EPREUVE DE MATHEMATIQUES.

Partie A : Evaluation des ressources : 15,5 points

Exercice 1 : 06 points

I- On considère le polynôme $P(z) = z^3 + (4+5i)z^2 + (8-20i)z - 40i$.

1-a) Démontrer que l'équation $P(z)=0$ admet une racine imaginaire pure z_0 que l'on précisera. 0,5pt

b) Déterminer les réels a, b et c tels que $P(z) = (z-z_0)(az^2+bz+c)$. 0,75pt

c) Résoudre dans C l'équation $P(z)=0$. 0,5pt

2- On considère les points A(3+i) , B(2i) et C(2-2i).

a)Placer les points A, B et C dans le plan complexe $(O.\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. 0,75pt

b) Donner la nature du triangle ABC. 0,5pt

c) Déterminer les coordonnées du point D pour que ABCD soit un parallélogramme. 0,5pt

d) Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe de centre A qui transforme B en C. 0,5pt

II- Soit f la transformation du plan d'écriture complexe $z' = (1-i)z + 2 + 3i$ avec $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$

1- Montrer que f est une similitude directe et déterminer ses éléments caractéristiques. 1pt

2- Donner l'expression analytique de f. 0,5pt

3- Soit la droite (D) : $x-y+5=0$. Déterminer une équation cartésienne de la droite (D') image de la droite (D) par f. 0,5pt

III- On donne $Z = \frac{z+i}{z-i}$, avec $z=x+iy$.

1) Donner la forme algébrique de Z. 0,5pt
2) Déterminer l'ensemble des points M du plan dans chacun des cas suivants : 0,5pt

   a) $Z \in IR$ et b) $Z \in iIR$.

EXERCICE 2 : 04 points

I-On donne la fonction $f(x) = \frac{1}{\sin x}$

1)Montrer que f réalise une bijection de $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ vers un intervalle J à préciser. 0,5pt

2) Calculer $(f^{-1})'\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ et $(f^{-1})'\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)$. 1pt

II- Soit la fonction $g(x) = \frac{x^3+x^2-5x-2}{(x-1)^2}$.

1) Déterminer les réels a , b et c tels que $g(x) = ax + b + \frac{C}{(x-1)^2}$. 0,75pt

2) a- Déterminer les primitives de la fonction g. 0,25pt

b- Déterminer la primitive de g qui prend la valeur -1 en 2. 0,5pt

III- On considère la fonction $h(x) = \sqrt{x+1}$, $\forall x \in [0;1]$.

En appliquant l'inégalité des accroissements finis à h , démontrer que : 1pt

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}(x + 1) \leq \sqrt{x+1} \leq \frac{1}{2}(x + 1)$ sur [-1;x] : b) $|\sqrt{x+1}-1| \leq \frac{x}{2}$ sur [0;x].

EXERCICE 3 : 05points

On donne les fonctions $g(x) = x^3-3x-3$ définie sur IR et $f(x) = \frac{2x^3+3}{x^2-1}$ sur IR∖{-1;1}.

A) 1- Etudier les variations de g et dresser son tableau de variations . 1pt

2- Démontre que l'équation g(x)=0 admet une solution unique $\alpha \in]2,10 ;2,11[$. 0,5pt

3- Donner le signe de g suivant les valeurs de x. 0,25pt

B) 1- Démontrer que $f(x)' = \frac{2x.g(x)}{(x^2-1)^2}$. 0,5pt

2- Etudier le signe de f et dresser le tableau de variations de f. 0,75pt

3- Montrer que $f(\alpha) = 3\alpha$ et déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
0,75pt

4- Montrer que la droite (D) : $y=2x$ est asymptote à la courbe de f.
0,5pt

5- Construire la courbe de f et (D) dans un repère orthonormé (0,I,J).
0,75pt

PARTIE B : Evaluation des compétences. 04,5points

Soient les fonctions h et i définies sur $]0;+\infty[$ par

$$h(x) = x + 2 + 2\ln x \text{ et } i(x) = \frac{2x}{x+2}\ln x.$$

1- Etudier les variations de h et dresser son tableau de variations.
1,5 pt

2- Soit $\beta \in]0;+\infty[$ une solution de l'équation $h(x)=0$.

Après avoir donner le signe de h, montrer que $i(x)' = \frac{2.h(x)}{(x+2)^2}$ et dresser le tableau de variations de la fonction i.
1,5pt

3- On donne $\beta \in \left]\frac{1}{e^2};\frac{1}{e}\right[$.

Montrer que $i(\beta) = -\beta$ et construire (C_i) dans un repère orthonormé (O,I,J) ainsi que sa tangente (T) au point d'abscisse $x_0 = 1$.
1,5pt

Proposée par : M. Hamadjam Nana Christian.