Tle D(JUIN 2020).

Il faut prendre toute difficulté comme une opportunité de se battre.

Fiche de travaux dirigés de mathématiques.

..

Ce n'est pas parce que les choses sont difficiles que nous n'osons pas. C'est parce que nous n'osons pas qu'elles sont difficiles.

. **(Sénèque)**

✍Partie A : Nombres complexes.

..

Apprendre sans réfléchir est vain. Réfléchir sans apprendre est dangereux.

. **(CONFUCIUS)**

Exercice 1 :

1. P est le polynôme complexe défini par $P(z) = z^3 + 3iz - 5 + 5i$.
   a) Vérifier que le nombre complexe $-1 - i$ est une racine de P.
   b) Déterminer les complexes a et b tels que :$P(z) = (z + 1 + i)(z^2 + az + b)$.
   c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On donne les points $A(z_A = -1 - i)$, $B(z_B = 2 - i)$ et $C(-1 + 2i)$.
   a) Déterminer l'ensemble $(\mathcal{D})$ des points $M(z)$ qui vérifie la relation : $|z - 2 + i| = |z + 1 - 2i|$, puis vérifier que le point A appartient à $(\mathcal{D})$.
   b) Déterminer l'argument du nombre complexe $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$, puis en déduire la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right)$.
   c) En déduire la nature exacte du triangle ABC.
3. On considère la similitude directe S de centre B qui transforme A en C.
   a) Déterminer le rapport et l'angle de la similitude S.
   b) Donner l'écriture complexe de S.
   c) $(\mathcal{C})$ est un cercle circonscrit au triangle ABC, déterminer les caractéristiques de $(\mathcal{C}')$ par S.

Exercice 2 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit P le polynôme défini par : $P(z) = z^4 + 2(2i + 1)z^2 + 4(1 + 2i)z + 8(1 + i)$ où z est un nombre complexe.

1. a) Déterminer les réels a et b tels que $P(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + 2z + 2)$.
   b) Calculer $(2 - 4i)^2$.
   b) Résoudre $P(z) = 0$.

2. On donne les points $A(z_A = -1+i)$, $B(z_B = -1-i)$, $C(z_C = 2i)$ et $D(z_D = 2-2i)$.
   a) Placer ces points sur le repère.
   b) Calculer $\dfrac{z_C - z_B}{z_D - z_B}$ et $\dfrac{z_C - z_A}{z_D - z_A}$, puis en déduire la nature des triangles ACD et BCD.
   c) On pose $K = \dfrac{z_C - z_B}{z_D - z_B} \div \dfrac{z_C - z_A}{z_D - z_A}$
   i. Montrons que K est un nombre réel.
   ii. En déduire que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
3. On désigne par S la similitude directe de centre C qui transforme B en D et $(\mathcal{E})$ le cercle de centre $\Omega(1, O)$ et rayon $\sqrt{5}$ cm.
   a) Déterminer l'écriture complexe de S.
   b) Déterminer l'image $(\mathcal{E}')$ par S.

Exercice 3 :

I. Soit donné dans le plan complexe les points A, B, C et D d'affixes respectifs $Z_A = 4-3i$; $Z_B = -4-3i$; $Z_C = -4+3i$ et $Z_D = 5+2i$.
   1. Calculer $\dfrac{Z_B - Z_A}{Z_B - Z_C}$ et en déduire la nature du triangle ABC.
   2. Déterminer l'affixe du point E tel que $AODE$ soit un parallélogramme.
   3. Déterminer l'écriture complexe de la similitude S_3 de centre A, de rapport 2 et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
   4. Donner l'écriture complexe de la similitude S_4 de centre B qui transforme C en A.
   5. Donner l'écriture complexe de $S_3 \circ S_4$.

II. Considérons le nombre complexe : $W = \left(\sqrt{3}+1\right) + i\left(\sqrt{3}-1\right)$.
   1. Calculer W^2.
   2. Déterminer le module et un argument de W^2, puis déduire le module et un argument de W.
   3. Déduire de ce qui précède les valeurs de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$.

Exercice 4 :

Soit P le polynôme défini par : $P(z) = 2z^4 - 6z^3 + 9z^2 - 6z + 2$.

1. Soit z un nombre complexe. Comparer $\overline{P(z)}$ et $P(\overline{z})$, puis $P(\frac{1}{z})$ et $P(z)$.
2. En déduire que si z_0 est racine de P alors $\overline{z_0}$, $\frac{1}{z_0}$ et $\frac{1}{\overline{z_0}}$ sont aussi racine de P.
3. Montrer que $P(1+i) = 0$.
4. Déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 5 :

Soit s la similitude plane directe qui à tout point M d'affixe $z = x+iy$ du plan associe le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$ du plan complexe tel que : $\begin{cases} x' = x + y\sqrt{3} - \sqrt{3} \\ y' = -x\sqrt{3} + y + \sqrt{3}. \end{cases}$

1. Déterminer l'expression de z' en fonction de z.
2. Déterminer les éléments caractéristiques de s.
3. Soit $(\mathcal{E})$ le cercle de centre $A(1;1)$ et de rayon 5.Déterminer $(\mathcal{E}')$ l'image de $(\mathcal{E})$ par s.

Exercice 6 :

Soit g la transformation du plan complexe qui, à tout point $M(z = x + iy)$, associe le point $M'(z' = x' + iy')$ tel que $z' = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}z + \dfrac{3 - i\sqrt{3}}{2}$.

1. Déterminer le module et l'argument principal du nombre complexe $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. En déduire la nature et les éléments caractéristiques e g.
3. Déterminer l'expression analytique de g.
4. Déterminer l'image (Δ') par g de la droite (Δ) d'équation $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$.

Exercice 7 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives i, $-\sqrt{2} + i$ et $1 + 2i$.

1. Donner la nature exacte et l'écriture complexe de la similitude directe S_1 de centre A qui transforme B en C.
2. On définit la similitude plane directe S_2 de centre O, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'.
   Exprimer z' en fonction de z.
3. Donner la nature et l'écriture complexe de la transformation $S_2 \circ S_1$. Puis en déduire le centre D de l'application composée $S_2 \circ S_1$.

Qui veut faire quelque chose trouve un moyen.
Qui ne veut rien faire trouve une excuse.

(Proverbe ARABE)

✍Partie B : Equations différentielles.

Choisis toujours le chemin qui semble le meilleur même s'il paraît plus difficile : l'habitude le rendra bientôt agréable.

(PYTHAGORE)

Exercice 1 :

Soit l'équation différentielle (E) :$y' - 2y = xe^x$

1. Déterminer les réels a et b pour que la fonction f définie par $f(x) = (ax + b)e^x$ soit solution de (E).
2. Montrer qu'une fonction h est solution de (E) si, et seulement si la fonction $h - f$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y' - 2y = 0$.
3. a) Résoudre l'équation (E').
   b) En déduire l'ensemble solution de l'équation (E).
   c) Déterminer la solution de (E) qui s'annule en 0.

Exercice 2 :

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = (2x + 3)e^x$

1. Vérifier que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x + 1)e^x$ est une solution de (E).
2. Démontrer que la fonction $f + h$ est solution de (E) si, et seulement si la fonction f est solution de l'équation différentielle (E') : $y' + y = 0$.
3. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E').
   b) En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) qui prend la valeur 2 en 0.

Exercice 3 :

1. Déterminer les solutions générales de l'équation différentielle E_0 définie par : $y'' + 2y' + y = 0$.
2. On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$.
   a) Vérifier que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2e^{-x}$ est une solution particulière de (E).
   b) Démontrer qu'une fonction f est une solution de (E) si, et seulement si $g = f - h$ est solution de (E_0).
   c) Déterminer toutes les solutions de (E).

Exercice 4 :

Dans cet exercice, on cherche à calculer l'intégrale $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\sin(2x) + e^{-x}\cos(x - \frac{\pi}{4})\right) dx$ à l'aide d'une équation différentielle.

1. Résoudre l'équation différentielle (E_1) : $y'' + 2y' + 2y = 0$.
2. On considère l'équation différentielle (E_2) :$y'' + 2y' + 2y = 4\cos(2x) - 2\sin(2x)$.
   a) Déterminer deux réels a et b pour que la fonction f_1 définie dans $\mathbb{R}$ par :
   $f_1(x) = a\sin(2x) + b\cos(2x)$ soit solution de l'équation (E_2).
   b) Démontrer que f est solution de (E_2) si, et seulement si $f - f_1$ est solution de (E_1).

c) En déduire la solution générale de (E_2).
d) Vérifier que la solution f de (E) telle que $f(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $f'(0) = 2$ est $f(x) = \sin(2x) + e^{-x}\cos(x - \frac{\pi}{4})$ pour tout réel x.

3. a) Utiliser (E) pour trouver l'ensemble des primitives F de f.
   b) En déduire la valeur de l'"intégrale I.

Exercice 5 :

1. Considérons l'équation (E_1) : $f" - 2f' + 5f = 0$
   a. Résoudre (E_1), puis déterminer la solution vérifiant $f'(0) = 1$ et $f(0) = 0$.
   b. On pose pour tout réel x, $F(x) = -\frac{1}{5}\left[f'(x) - 2f(x)\right]$ où f est une solution de (E_1). Montrer que F est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.
2. Soient à présent les équations (E_2) : $y" - 4y' + 3y = 6x^2 + 5x$ et (E_3) : $y" - 4y' + 3y = 0$
   a. Déterminer les réels a, b et c pour que le polynôme $g(x) = ax^2 + bx + c$ soit une solution de (E_1).
   b. Démontrer que h est solution de (E_2) si, et seulement si $h - g$ est solution de (E_3).
   c. Résoudre (E_3) et déduire les solutions de (E_2).

A vaincre sans péril, on triomphe sans gloire.

(P.CORNEILLE)

✍Partie C : Etude des fonctions.

..

Si vous ne travaillez pas pour vos rêves, quelqu'un vous embauchera pour travailler pour les siens.

(Steve Jobs)

Exercice 1 :

Cette exercice comporte trois parties $I)$, $II)$ et $III)$.
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, d'unité sur les axes $1cm$.

I) Soit g la fonction définie sur $D =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ par $g(x) = -2x^2 + 2 - \ln(x^2)$.

1. Déterminer les limites de g aux bornes de D.
2. Déterminer la fonction dérivée g' de g et dresser son tableau de variations.
3. Calculer $g(1)$, $g(-1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

II) Soit la fonction f définie sur D par $f(x) = -2x + 1 + \dfrac{2\ln(|x|)}{x}$.

1. Calculer les limites de f aux bornes de D.
2. Calculer la dérivée f' de f et vérifier que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
3. Dresser le tableau de variations de f. **On utilisera la partie I)**

III) Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f.

1. Montrer que la droite $(\mathcal{D}')$ d'équation $y = -2x + 1$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$. Préciser l'autre asymptote.
2. Etudier la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à $(\mathcal{D}')$.
3. Montrer que le point $A(0, 1)$ est centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.
4. Déterminer les coordonnées des points B et C de $(\mathcal{C}_f)$ où la tangente en chacun de ces points est parallèle à $(\mathcal{D}')$.
5. Tracer avec soin la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et ses asymptotes.
6. Calculer l'aire du domaine du plan délimité par $(\mathcal{C}_f)$, la droite $\mathcal{D}'$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.

Exercice 2 :

Les fonctions f, g et h sont définies dans $D =]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x + \ln(x)}{x^2}$, $g(x) = 1 - x - \ln(x)$ et $h(x) = -1 - \frac{1}{x}$. $(\mathcal{C})$ est la courbe de f dans le repère orthonormé (O, I, J) ayant $2cm$ pour unité sur les axes.

A. **Etude du signe de** g

1. a) Calculer $g(1)$.
   b) Déterminer les limites de g aux bornes du domaine de définition de g.
2. a) Calculer la dérivée g' de g.
   b) En déduire que g est une primitive de h sur D
3. a) Pourquoi g est strictement décroissante sur D ?

   b) Dresser le tableau de variations de g.

4. En déduire le signe de $g(x)$ suivante les valeurs de x.

B. **Etude et courbe de** g

1. a) Calculer les limites de f aux bornes de D.
   b) En déduire que les axes du repère sont les asymptotes à $(\mathcal{C})$.
2. a) Montrer que pour tout $x \in D$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$.
   b) Etudier les variations de f.
3. Montrer que :
   a) l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α dans $]0,5; 0,6[$.
   b) la fonction f est une bijection de $[1; +\infty[$ vers un intervalle W à déterminer.
4. a) Tracer $(\mathcal{C})$.
   b) Soit m un réel.
   Discuter suivant les valeurs de m le nombre et le signe des solutions de l'équation $mx^2 - x - \ln(x) = 0$

Exercice 3 :

A. Soit l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = xe^x$.

1. Déterminer les réels a et b pour que la fonction f définie par $f(x) = (ax + b)e^x$ soit une solution de l'équation (E).
2. Montrer une fonction h est solution de l'équation (E) si, et seulement si la fonction $h - f$ est solution de l'équation (E') :$y' - 2y = 0$.
3. a) Résoudre l'équation (E').
   b) En déduire l'ensemble solution de l'équation (E).
   c) Déterminer la solution de (E) qui s'annule en 0.

B. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x - x - 2$.

1. Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variations.
3. a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions dont l'une est 0 et l'autre, notée α, est telle $-1,6 < \alpha < -1,5$.
   b) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

C. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2cm.

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations (on pourra utiliser la partie B.)
3. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$ et déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
4. Représenter $(\mathcal{C}_f)$.
5. Calculer en cm^2, l'aire du domaine plan délimité par $(\mathcal{C}_{\{})$, l'axe des abscisse et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 4 :

(*Cet exercice comporte trois parties dépendantes. Il est conseillé de travailler dans l'ordre.*)
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{xe^x + 1}$. Soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative. **(Unité sur les axes 4 cm)**

Partie A

On considère la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = x + 2 - e^x$.

1. Calculer les limites.
2. Etudier les variation de g sur $[0, +\infty[$.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $[0, +\infty[$.
4. Prouver que $1,14 \leq \alpha \leq 1,15$.
5. Donner le signe de $g(x)$ sur $[0, +\infty[$.

Partie B

1. Montrer que $f'(x) = \dfrac{e^x}{(xe^x + 1)^2} g(x)$ puis, en déduire le sens des variations de f.
2. a) Montrer que $f(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$.
   b) En déduire la limite de f en $+\infty$ puis, interpréter graphiquement le résultat.
3. a) Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha + 1}$.
   b) Donner un encadrement de $f(\alpha)$.
4. Donner une équation de la tangente (T) à la courbe au point d'abscisse $x_0 = 0$.
5. a) Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f(x) - x = \dfrac{(x+1)}{xe^x + 1} U(x)$ où U est la fonction à déterminer.
   b) Étudier les sens des variations de U puis, en déduire le signe de $U(x)$.
   c) Déduire des questions précédentes la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (T).
6. Tracer $(\mathcal{C})$ et (T).
7. Calculer l'aire en cm^2 de la partie du plan délimité par les courbes $(\mathcal{C})$, (T) et la droite d'équation $x = 1$.

Exercice 5 :

(*Cette exercice comporte deux parties dépendantes. Il est conseillé de travailler dans l'ordre.*)
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x - 2e^x + 2$. Soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

Partie A

1. a. Calculer la limite de f en $-\infty$ et donner une interprétation géométrique.
   b. Calculer la limite de f en $+\infty$.

c. Calculer la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ en $+\infty$ et donner une interprétation géométrique.

2. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations.
3. a. Déterminer le signe de $f\left(\frac{3}{2}\right)$ et en déduire qu'il existe un unique réel $\alpha \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$ tel que $f(\alpha) = 0$.
   b. En déduire le signe de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
4. Tracer la courbe $\mathcal{C}$.
5. Représenter et déterminer l'aire du domaine du plan délimité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$.

✍Partie B

Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 2(1 - e^{-x})$. On pose $I = \left[\frac{3}{2}; 2\right]$.

1. Montrer que sur $]0; +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ est équivaut à $g(x) = x$.
2. Montrer que pour tout $x \in I$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
3. Montrer que pour tout $x \in I$, $g(x) \in I$.
4. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\begin{cases} u_1 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = g(u_n), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$
   a. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in I$.
   b. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
   c. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$.
5. Montrer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
6. a. Déterminer le plus petit entier p tel que u_p soit une valeur approchée à 10^{-3} près du réel α.
   b. Donner alors une valeur approchée de α à trois décimales.

Exercice 6 :

✍Partie A Soit la fonction numérique f définie par $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et calculer les limites aux bornes de son domaine de définition.
2. Etudier la dérivabilité de f en 0 et préciser la tangente.
3. Calculer la dérivée de f et dresser son tableau de variations.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]1; 2[$.

✍Partie B Soit la fonction g définie par $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

1. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à $g(x) = x$ sur $]1; +\infty[$.
   b) Vérifier que $g(\alpha) = \alpha$.
   c) Montrer que si $x \in [1; 2]$ alors $g(x) \in [1; 2]$.
   d) Justifier que g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et calculer la dérivée g' de g sur $]0; +\infty[$.
   e) Montrer que pour tout $x \in [1; 2]$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
   f) Déduire en utilisant l'inégalité des accroissements finis que : pour tout $x \in [1; 2]$, $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$.
2. On définit la suite $(U)_n$ par $U_0 = 2$ et pour tout entier n, $U_{n+1} = g(U_n)$.

a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \in [1;2]$.
b) Etablir pour tout entier naturel n les inégalités :
$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$ et $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
c) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que U_n soit la valeur approchée de α à 10^{-3} près.

3. Tracer avec soin la courbe représentative de f dans le plan d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 7 :

On considère la fonction numérique de la variable réelle x définie pour tout $x \neq 2$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{x+2}$.
On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

✍Partie A

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
3. Soit g la restriction de f à l'intervalle $I =]-1; +\infty[$; montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera.
4. Tracer dans le même repère, la courbe $(\mathcal{C})$ représentative de f et la courbe $(\mathcal{C}')$ représentative de g^{-1}.

✍Partie B

1. Déterminer l'image par f de l'intervalle $[0; 1]$.
2. Calculer $f''(x)$ et vérifier que pour tout x de $[0; 1]$, $f''(x) > 0$.
3. En déduire que pour tout $x \in [0; 1]$, $\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{2}{3}$.
4. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0; 1]$.(On ne demande pas de calculer α)

✍Partie C

On considère la suite (u_n) à termes positifs définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel non n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer par récurrence sur n que la suite (u_n) est croissante et que $u_n \in [\frac{1}{2}; 1]$. Quelle conclusion peut-on tirer ?
2. Démontrer que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$.
3. En déduire que pour tout entier naturel n, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Il n'existe que deux choses infinies, l'univers et la bêtise humaine... mais pour l'univers, je n'ai pas de certitude absolue.

(Albert EINSTEIN)

Bon courage ! ! !