COLLEGE PRIVE LAIC YMELE

Durée	Epreuve	Coef	Durée	Classe	Année Scolaire
Séquence 4	Mathématiques	06	3h00	1^{ere} C	2020/2021

présentation et le soin apportés à la copie seront pris en compte dans l'évaluation de la copie.

PARTIE A : Utilisation des ressources **15pts**

Exercice 1 : 4pts

E est un espace vectoriel euclidien rapporté à une base orthonormée $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On désigne par f l'endomorphisme de E qui à tout vecteur $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ associe le vecteur $f(\vec{u}) = [(\sqrt{2}\,cosa - 1)x + ycosa)]\,\vec{\imath} + [(-2xcosa + (\sqrt{2}\,cosa + 1)y]\,\vec{\jmath}$, $a \in \mathbb{R}$.

1) Donner la matrice de f dans la base B. 0.5pt

2) a. Pour quelles valeurs de a f n'est-elle pas bijective ? 0.5pt

b. Représenter les valeurs de a ainsi trouvées sur un cercle trigonométrique. 0.75pt

On suppose dans tout le reste de l'exercice $a = \frac{\pi}{4}$.

3) Donner l'expression analytique de f puis calcule l'image de $(\sqrt{2}\,; 2)$ par f. 0.75pt

4) Déterminer $kerf$ et imf. 0.75pt

5) A tout nombre réel α , on associe le sous ensemble F_α de E tel que $F_\alpha = \{\vec{u} \in E / f(\vec{u}\,) = \alpha\vec{u}\,\}$.

Montrer que F_α est un sous espace vectoriel de E. 0.75pt

Exercice 2 : 5.5 pts

I/ ABC est un triangle isocèle en A, de hauteur AK tel que $AK = 2\sqrt{3}\ cm$ et $BC = 4cm$

1) Construire le point G barycentre des points pondérés $(A, 2), (B, 1)$ et $(C, 1)$. 0.5pt

2) M désigne un point quelconque du plan.

a. Démontrer que $\vec{U} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ est un vecteur constant de norme $4\sqrt{3}$. 0.5pt

b. Déterminer l'ensemble (Γ) des points du plan tels que $\|4\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \sqrt{3}\|\vec{U}\|$. 0.5pt

c. Tracer (Γ) . 0.25pt

II/ 1. Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie par $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$. f est-elle prolongeable par continuité en 2 ? Si oui définir ce prolongement. 1pt

2. Soit k la fonction d'une variable réelle définie par $k(x) = |x - 2|$. Etudier la dérivabilité de k en 2 et déduire éventuellement les équations des tangentes ou demi-tangentes. 1.5pt

3. La fonction $g : \mathbb{R} \setminus \{5\} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{2x-1}{-x+5}$ est –elle bijective ? si non que faut-il pour qu'elle soit bijective ? Dans ce cas, définir sa bijection réciproque g^{-1}. 1.25pt

Exercice 3: 6pts

Soit la fonction h définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $\boldsymbol{h(x) = a x^2 + b x + c}$ où a, b et c sont trois réels. On suppose que la courbe de la fonction h passe par les points $A(0; 2)$, $B(-2; 0)$ et $C\,(2; 0)$.

1) Montrer que pour tout réel x , $h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$. 1pt

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $h(x) \leq 0$. 0,25pt

3) Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie par $f(x) = \frac{-x^2+x-4}{x}$. $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repere orthonormé du plan.

a. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f puis les limites aux bornes, en déduire une équation de l'asymptote verticale à la courbe $(\mathcal{C})$. 1,5pt

b. Montrer que pour tout réel x différent de zéro, $f'(x)$ peut se s'écrire $f'(x) = \frac{2h(x)}{x^2}$. 0,5pt

c. En déduire le sens de variation de f, puis construire son tableau de variation. 1,25pt

d. Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote oblique à ($\mathcal{C}$). 0.5pt

e. Tracer la courbe ($\mathcal{C}$) et ses asymptotes, (unités sur les axes : 1 cm) . 1pt

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (4,5 pts)

Compétence visée : Utilisation du barycentre, arc capable et de la trigonométrie pour évaluer un budget.

A l'occasion de la compétition nationale de Tennis-lancer de poids & 200m organisée au Cameroun dans la ville de Yaoundé en 2021, M. NGUEGUIM, ingénieur des travaux est chargé de construire au centre-ville deux stades (l'un pour le tennis, l'autre pour le lancer de poids) et une piste d'athlétisme. A partir de sa maquette et de son devis provisoire, on a les informations ci-dessous :

Le stade du lancer de poids est équipé d'une caméra mobile qui filme et retransmet les images selon les positions M du plan qu'elle occupe. Les positions M sont telles que $Mes(\widehat{PMQ},) = \frac{\pi}{3}$ avec $PQ = 6m$ où PQ est la largeur du stage. Il doit recouvrir toute la surface de ce stade observée avec du gazon synthétique. Le mètre carré de ce gazon synthétique diminué du tiers coûte 4200 F.

Le stade de Tennis est délimité par les points $M(cosx; sinx)$ du plan ($x \in]-\pi;\pi]$) tels que $\cos^2 x + \frac{(\sqrt{2}-1)}{2} cosx - \frac{\sqrt{2}}{4} = 0$. Pour éviter que la pelouse soit boueuse, il doit la recouvrir d'une couche de béton armé d'épaisseur $20cm$. Le mètre cube de ce béton coûte 9000 F.

Enfin, la piste d'athlétisme , est délimitée dans le plan autour d'une portion ayant la forme d'un triangle équilatéral ABC de côté $10m$ par des points M tels que :

$18 \leq \|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| \leq \sqrt{2}\|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MC}\|$. Il a recouvert chacun des dix couloirs de course de cette piste par dix couches de peintures dont le mètre carré coûte 2000F ; deux boites de peinture permettent de couvrir $6m^2$. Dans le but de faire un bilan des dépenses, tu dois aider cet ingénieur à traiter les tâches suivantes.

Prendre : une unité d'aire égal à $100\ m^2$

Tâches :

1. Quel budget cet ingénieur doit-il prévoir pour construire le stade de lancer de poids ? 1.5Pt

2. Quel budget cet ingénieur doit-il prévoir pour construire le stade de Tennis ? 1.5Pt

3. Quel budget cet ingénieur doit-il prévoir pour construire le stade de la piste d'athlétisme ? 1.5Pt

Confucius a dit *« Celui qui déplace la montagne, c'est celui qui commence par enlever les petites pierres. »*